潮汐预报的几种方法（二）

方 国 洪

（中国科学院海洋研究所）

二、调 和 法

调和法是目前潮汐分析和预报中采用的一个基本的主要的方法。目前世界各国出版的潮汐表和潮流表差不多都是采用调和法推算的。

如果一个物理量 Q（如潮高、流速等等）是随时间 t 按余弦函数变化的，则叫做调和量，其表示式为 $Q=A\cos(\sigma t+\alpha)$。这里最基本的量是 σ，称作角速率，Q 的变化周期 T 即等于 $360°/\sigma$。周期的倒数叫频率，常记为 f，它等于 $\sigma/360°$。A 代表 Q 能够达到的最大值，故叫做振幅；而 α 决定着最大值到达的时间，叫做初位相。σ，A 和 α 都不随时间变化。

我们都知道，月亮和地球的运动是具有周期性的，因此月亮和太阳作用于地球的引潮力也具有周期性。当然，地球和月亮的运动不能用一个简单的调和项来代表，但是它们有几种主要的基本周期。

第一是地球自转的平均周期，叫做恒星日，等于0.997270天，这种运动的角速率为每小时15°.041069；第二是月亮围绕地球公转的平均周期，叫做回归月，等于27.321582天，相应的角速率为每小时0°.549017；第三是地球绕太阳公转的平均周期，叫做回归年，等于365.2422天，角速率为每小时0°.041069；第四是月亮近地点运动的平均周期，等于8.85年，角速率为每小时0°.004642；第五是月亮升交点运动的平均周期，等于18.61年，角速率为−0°.002206；第六是太阳近地点运动的平均周期，约等于两万一千年，相应的角速率是每小时0°.000002。由于月亮引潮力比太阳的大得多，实际潮汐的周日变化周期的平均值等于一个太阴日，故习惯上用平太阴日而不用恒星日作为基本周期。太阴日平均长度为1.035050天，相应角速率为每小时14°.492052。地球自转角速率等于它加上月球公转角速率。

这样，地球和月亮运动，因而引潮力所具有的基本角速率为 $\sigma_\tau=14.492052$，$\sigma_s=0.549017$，$\sigma_h=0.041069$，$\sigma_p=0.004642$，$\sigma_N'=0.002206$，$\sigma_p'=0.000002$（单位：度/小时）。

引潮力的调和展开是由英国潮汐学家达尔文（Darwin，1883）和杜德森（Doodson，1921）完成的。展开式可写作如下形式：

$$F=\sum_k C_k\cos(\sigma_k t+\theta_k)。\qquad (3)$$

等号右边的每一调和项叫做一个分潮，k 表分潮的序号，而各个分潮的角速率 σ 都是前述六个基本角速率的线性整数组合：

$$\sigma=n_\tau\sigma_\tau+n_s\sigma_s+n_h\sigma_h+n_p\sigma_p+n_{N'}\sigma_{N'}+n_{p'}\sigma_{p'}。\qquad (4)$$

式中 n_τ，…，$n_{p'}=0$，±1，±2，… 为一些小的整数，它们取不同的值就构成不同的分潮。杜德森算出了系数大于0.0001的项，计有300多项。其中绝大多数是很小的分潮。在实际潮汐预报中考虑的一般只有三、四十个。作为例子，我们把系数大于0.05的分潮列在表3中。

由于式（4）中 $\sigma_\tau\gg\sigma_s\gg\sigma_h\gg\sigma_p$，$\sigma_{N'}\gg\sigma_{p'}$，且 n_τ，…，$n_{p'}$ 均为一些小的整数，故潮

表 3 主要潮汐分潮

系数 C	n_τ	n_s	n_h	n_p	n_N'	n_p'	角速率 σ (度/小时)	周期 T	符号
长周期潮									
0.7387	0	0	0	0	0	0	0.000000		A_0
0.0655	0	0	0	0	1	0	0.002206	18.613年	A_0^*
0.0729	0	0	2	0	0	0	0.082137	182.621日	S_{sa}
0.0825	0	1	0	-1	0	0	0.544375	27.555	M_m
0.1564	0	2	0	0	0	0	1.098033	13.661	M_f
0.0648	0	2	0	0	1	0	1.100239	13.633	M_f^*
全日潮									
0.0722	1	-2	0	1	0	0	13.398661	26.868小时	Q_1
0.0710	1	-1	0	0	-1	0	13.940829	25.823	$^*O_1$
0.3769	1	-1	0	0	0	0	13.943036	25.819	O_1
0.1755	1	1	-2	0	0	0	14.958931	24.066	P_1
0.5305	1	1	0	0	0	0	15.041069	23.934	K_1
0.0718	1	1	0	0	1	0	15.043275	23.931	K_1^*
半日潮									
0.1739	2	-1	0	1	0	0	28.439730	12.658小时	N_2
0.9081	2	0	0	0	0	0	28.984104	12.421	M_2
0.4229	2	2	-2	0	0	0	30.000000	12.000	S_2
0.1151	2	2	0	0	0	0	30.082137	11.967	K_2

汐频率分布的一个显著特点是“成丛”分布的。例如按$n_\tau=0$，1，2便可分为三丛，$n_\tau=0$为长周期分潮，这些分潮的角速率分布于0—2.1（度/小时，下同）之间；$n_\tau=1$为全日周期分潮，它们的角速率分布于12.8—17.2之间；$n_\tau=2$为半日周期分潮，角速率分布于27.9—32.3之间。在2.1—12.8，17.2—27.9，…这些相当宽的区间内不存在潮汐振动。因此潮汐频段是相当狭窄的。同样，在同一个n_τ的一丛之内，还可按n_s的不同而分成更小的丛，丛与丛之间也不存在潮汐振动；而在这种丛内，又可继续按n_h的不同再分成更小的丛；……。凡n_τ相同的分潮叫做一个族，并以n_τ的数值来命名；n_τ和n_s相同的叫做一个群，以（n_τ，n_s）的数值命名；n_τ，n_s，n_h都相同的叫做一个亚群，以（n_τ，n_s，n_h）的数值命名。例如表3中$^*O_1$和O_1都属于1族（或称全日族），（1，－1）群，（1，－1，0）亚群，但它们是不同的分潮。

引潮力是一种作用于海洋中所有水质点上的外力，在这种力的作用下，海水如何运动，这还要受流体动力学方程的制约。由流体动力学方程我们可以知道，如海深比潮汐涨落高度差大得多，则运动过程是线性的，这时引潮力有什么频率的振动，海水的潮汐运动便也只有这几种频率。这样，某一定地点的潮高便可由下式代表：

$$\hat{\zeta}=\sum_k H_k\cos\left(\sigma_k t+\theta_k-g_k\right),\quad (5)$$

这里各个σ的数值是与式（3）一样的，H_k和g_k则随地点变化，它们叫做各个地点的调和常数，其中H叫振幅，g叫迟角。在浅水区域，流体动力学方程中的非线性项不能忽略，潮波产生了非线性畸变。但是在一般情况下，潮高仍然可以用式（5）的形式来表示，不过需增加新的，其频率在引潮力中不存在的调和项，称为浅水分潮。浅水分潮的频率为原有分潮频率的线性组合。例如对于分潮M_2和S_2，它们产

生的浅水分潮的角速率可以有$2\sigma_{M_2}$（分潮符号为M_4），$2\sigma_{S_2}$（S_4），$\sigma_{S_2}-\sigma_{M_2}$（$MS_f$），$\sigma_{M_2}+\sigma_{S_2}$（$MS_4$），$3\sigma_{M_2}$($M_6$),$3\sigma_{S_2}$（$S_6$），$2\sigma_{M_2}-\sigma_{S_2}$($2M\overline{S_2}$)，$2\sigma_{M_2}+\sigma_{S_2}$（$2MS_6$），$2\sigma_{S_2}-\sigma_{M_2}$($2S\overline{M_2}$)，$2\sigma_{S_2}+\sigma_{M_2}$($2SM_6$)，…。

这样一来，潮汐预报成了一件相当简单的事情：只要调和常数知道了，按式（5）计算就行了。而调和常数的求得也不十分困难，只要有足够数量的潮高观测值即可。事实上，对每一观测时刻t_i有一个水位观测值ζ_i，若进行了N次观测，便可列出具有N个方程的方程组：

$$\sum_k [x_k\cos(\sigma_k t_i-\theta_k)+y_k\sin(\sigma_k t_i-\theta_k)]=\zeta_i \qquad (6)$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

式中未知数x_k，y_k与调和常数之间的关系是

$$x_k=H_k\cos g_k,\ y_k=H_k\sin g_k$$

因为式（6）中的余弦和正弦函数都是已知的，故该式为一线性方程组。在实际工作中，N均取为大于未知数的个数，这时上式为一矛盾的线性方程组，未知数一般按最小二乘法求出。这一求解问题在线性代数学中是一个很容易解决的问题，我们在这里将不讨论求解的数学技巧。

然而在计算调和常数时有两个问题需要予以注意。

第一是观测记录的时间间隔问题。我们对水位进行观测时一种可以采用的方式是每隔一定的时间间隔Δt观察一次得到一个水位值；另一种方式是用仪器连续记录得到一条水位曲线，但在进行分析计算时，仍需从曲线上隔一定时间间隔读取一个数值。一般情况下时间间隔Δt是固定不变的。那么Δt的大小对分析结果有没有影响呢？回答是肯定的，其中最重要的是所谓频率的折叠。我们来举个例子。对于两个角速率分别为σ_k和σ_l的分潮，在时刻$t=0$，Δt，$2\Delta t$，…它们对潮位的贡献分别为

$$H_k\cos\varphi_k,\ H_k\cos(\sigma_k\Delta t+\varphi_k),$$
$$H_k\cos(2\sigma_k\Delta t+\varphi_k),\ \cdots,$$
$$H_l\cos\varphi_l,\ H_l\cos(\sigma_l\Delta t+\varphi_l),$$
$$H_l\cos(2\sigma_l\Delta t+\varphi_l),\cdots,$$

这里用φ记$\theta-g$。如果很凑巧，Δt与σ_l及σ_k之间满足关系$\sigma_l=n\cdot 360^\circ/\Delta t\pm\sigma_k$（$n$为整数），那么分潮$l$的贡献就等于

$$H_l\cos\varphi_l,\ H_l\cos(\sigma_k\Delta t\pm\varphi_l),$$
$$H_l\cos(2\sigma_k\Delta t\pm\varphi_l),\cdots。$$

在这个时间间隔之下，分潮l和分潮k混淆起来了。这时分潮k和l的调和常数就不能确定，我们就不可能对式（6）求解。例如若取$\Delta t=3$小时，那么分潮S_6($\sigma=90^\circ$/小时)，S_{10}($\sigma=150^\circ$/小时)，…便要与分潮S_2($\sigma=30^\circ$/小时)发生频率的折叠。如果在进行调和分析时除了S_2外还选入了分潮S_6或S_{10}，…，则方程（6）就解不出来。如想得到解，则应当把S_6，S_{10}，…全部舍弃。不过我们要注意，最后解得的S_2中是包含着S_6，S_{10}，…的贡献的。为了得到较准确的结果，应尽可能选取较小的Δt。一般来说，选取$\Delta t=1$小时是足够的；此时S_2与S_{22}，S_3与S_{21}，…S_{11}与S_{13}将发生折叠，但频率高于S_{12}的分潮振幅很小，可以忽略。幸运的是我们习惯于用太阳时为单位选取观测时间间隔，而潮汐又以太阴潮为主，这使得折叠效应的影响不至于太严重。

第二是观测时段的长度问题。这个问题牵涉到分析结果的误差估计，最好是能给出数学上的说明，但这将引进一些令人厌烦的冗长的数学公式。这里只想给出一些直观的说明。拿M_2和S_2分潮为例，它们都是半日分潮，由它们叠加构成的振动仍然显示出半日循环的特征，不过这一循环与下一循环的振幅就不再是不变的了。当M_2和S_2的位相相同时，它们叠加而形成大潮，位相相反时，互相对消而形成小潮。因此大小潮的变化过程决定于两个分潮的位相差，而位相差的变化速率等于两个分潮的角速率之差。故大小潮变化周期等于$360^\circ/(\sigma_{S_2}-\sigma_{M_2})$，这叫做两个分潮的会合周期。如果我们进行观测的时段长度不短于会合周期，就可以从大潮和小潮的振幅差别来确定M_2和S_2各占多大份量，从大潮和小潮发生的时间确定M_2和S_2的迟角相差多大，这样就能将两个

分潮分离开来。相反，如果观测时段比会合周期短很多，在这一段时间内，包括了大潮便包括不了小潮，包括了小潮便包括不了大潮，由此来推断两个分潮振幅之间和位相之间的关系，显然将缺乏可靠性。

因此选取的分潮应当与观测时段长度相适应：所有分潮之间的会合周期的最大值一般不得大于观测时段长度。*不能选入，而其量值又不可忽略的分潮，要引入它们与主要的、已选入的分潮之间的已知关系，譬如振幅比和迟角差（称为差比关系，其数值一般用附近由较长期观测分析所得的关系代替，有时可采用引潮力的关系代替）。由式（4）可知，对不同族的分潮，一天等于一个或数个会合周期，故分离不同族的分潮，一天以上的观测长度就足够了；对于同族不同群的分潮，则一个月等于一个或数个会合周期；对同族、同群但不同亚群的分潮，则一年等于一个或数个会合周期。所以一月观测资料只能分离不同群的分潮，一年观测资料只能分离不同亚群的分潮。

调和法中能遇到的一个难处理的问题是浅水区域的预报。前面我们已经谈到，为了表示浅水非线性效应，必须引入浅水分潮，不幸的是浅水分潮的数目极大。从前面我们已经可以看到，仅两个源分潮，到三阶相互作用，便出现了10个浅水分潮。对河口站，常常至少要考虑六阶相互作用，这时浅水分潮的数目便更要多得多，实际上还要考虑多个源分潮之间的相互作用，因此浅水分潮实在多得不可胜数。一般来说，随着阶数的增加，各浅水分潮的振幅逐渐减少。但是对于高低潮时的预报来说，高频振动相当重要，因为一个分潮对高低潮的影响大小与它的振幅和频率的乘积成比例。

在电子计算机问世之前，不可能对大量的分潮进行处理。在经典的杜德森方法中，选用了60个分潮，其中将近一半是浅水分潮，但用来预报象吴淞这样的港口误差仍相当大。例如我们曾用1963年的分析结果预报1970年，其中低潮时误差在半小时以内的仅占53%，其中绝大部分表现为预报低潮时偏早。

为了获得较好的预报效果，一个办法是增加浅水分潮的数目，在使用电子计算机的情况下，这不会给分析和预报带来多大困难。齐特勒等（Zetler et al., 1967）和罗西特等（Rossiter et al., 1968）曾借助谱分析分别对阿拉斯加的安科雷季和英国的泰晤士河口寻找可能存在的主要浅水分潮，从而将分潮数目增加至一百一十多个，获得一定效果。值得注意的是他们所增加的浅水分潮在两地有相当大的差异。国内有的单位也曾试用增加浅水分潮来改善预报准确度，但效果尚不令人满意。

国家海洋局王骥采用“相关法”预报浅水潮汐取得比较好的效果（内部交流，1976）。其基本思想是把潮位 $\hat{\zeta}$ 划分为两部分：$\hat{\zeta}=h+\delta$，h由频率不高于2周/日的振动构成，而δ则看作是h经浅水非线性作用而产生的结果。故时刻t的δ值决定于t以前一段时间的h值，或者换个意思，决定于t时刻的h值及h对t的各级导数。即δ可表为

$$\left\{\begin{aligned}\delta=\delta_0&+\sum_{i=o}^{\infty}a_ih_j+\sum_{\substack{i,\ j=o\\ j\gg i}}^{\infty}a_{ij}h_ih_j\\ &+\sum_{\substack{i,\ j,\ k=o\\ k\gg j\gg i}}^{\infty}a_{ijk}h_ih_jh_k+\cdots,\end{aligned}\right.$$

式中h_i代表h对t的i级微商。常数δ_o，a_i，a_{ij}，a_{ijk}，…由实际潮位确定。

我们曾用准调和浅水分潮表示潮汐的高频部分，也得到了较好的效果。我们把所有全日分潮合并为一个准调和分潮，其合成振幅R_1和迟角r_1是随时间变化的；同样所有半日分潮合成的准调和分潮的振幅R_2和迟角r_2也随时间变化。而对高频部分，例如四分日族，其合成的准调和分潮的振幅R_4和迟角r_4便决定于R_1，r_1和R_2，r_2，可写成

$$\begin{aligned}R_4\cos r_4&=K_1R_1^2R_2\cos(2r_1+r_2-\vartheta_1)\\&\quad+K_2R_2^2\cos(2r_2-\theta_2)+\cdots,\\R_4\sin r_4&=K_1R_1^2R_2\sin(2r_1+r_2-\theta_1)\\&\quad+K_2R_2^2\sin(2r_2-\theta_2)+\cdots.\end{aligned}$$

*在观测资料的误差较小时，最大会合周期也可略大于观测时段长度，但不宜大很多。

这样右边的项数要比调和分潮数目少得多。为了跟60个调和分潮的预报效果比较，我们对吴淞港也用1963年的资料进行分析用来预报1970年，结果低潮时误差在半小时以内的从原来的53%增加到91%。

三、感 应 法

感应法是1966年美国和英国海洋学家芒克（Munk）和卡特雷特（Cartwright）提出的。这个方法在理论上比调和法更加严整，但其基本思想却颇为简单。

引潮力是时间和地点的函数，可写成$F(t, \varphi, \lambda)$，这里φ为纬度，λ为经度。显然位于(φ, λ)的一个地点在时刻t的潮高$\hat{\zeta}(t)$决定于该地及周围海区在时刻t以前的引潮力：$F(t-s\Delta\tau, \varphi+p\Delta\varphi, \lambda+q\Delta\lambda)$，$s=0, 1, 2, \cdots$，$p=0, \pm1, \pm2, \cdots$，$q=0, \pm1, \pm2, \cdots$，这里$\Delta\tau$，$\Delta\varphi$，$\Delta\lambda$为时间和经纬度间隔。如果潮汐运动过程是线性的话，则$\hat{\zeta}(t)$可表为上述各处各时刻的引潮力的线性函数：

$$\hat{\zeta}(t)=\sum_{s,p,q} w'(p,q,s)F(t-s\Delta\tau, \varphi+p\Delta\varphi, \lambda+q\Delta\lambda)。\qquad (7)$$

这里权系数$w'(p,q,s)$代表地点$(\varphi+p\Delta\varphi, \lambda+q\Delta\lambda)$在时刻$t-s\Delta\tau$的引潮力的一个单位脉冲对地点$(\varphi, \lambda)$在时刻$t$的水位的影响；或者说是后者对前者的感应，所以这个方法就叫感应法。

但是$(\varphi+\Delta\varphi, \lambda+\Delta\lambda)$处的引潮力又可以用$(\varphi, \lambda)$处的引潮力对地点的各级导数来代替：

$$F(t-s\Delta\tau, \varphi+p\Delta\varphi, \lambda+q\Delta\lambda)=F(t-s\Delta\tau, \varphi, \lambda)+p\Delta\varphi F_{\varphi}(t-s\Delta\tau, \varphi, \lambda)+q\Delta\lambda F_{\lambda}(t-s\Delta\tau, \varphi, \lambda)+\cdots,$$

这里F_{φ}，F_{λ}分别表示F对φ和λ的偏导数。这样，式（7）便可用下式代替：

$$\hat{\zeta}(t)=\sum_{s}[w_0''(s)F(t-s\Delta\tau, \varphi, \lambda)+w_1''(s)F_{\varphi}(t-s\Delta\tau, \varphi, \lambda)+w_2''(s)F_{\lambda}(t-s\Delta\tau, \varphi, \lambda)+\cdots]。\qquad (8)$$

熟悉潮汐理论的读者都会注意到，当引潮力展开为长周期、全日周期和半日周期三项时，每一项都是两个因子的乘积，一个因子仅依赖于地点，另一个因子则仅依赖于时间。也就是说引潮力可表示为

$$F(t, \varphi, \lambda)=\sum_{m} P_m(\varphi, \lambda)C_m(t)。$$

这样，F对地点的各级偏导数，其时间因子$C_m(t)$都不改变。因此式（8）又进一步可用下式代替：

$$\hat{\zeta}(t)=\sum_{m}\left[\sum_{s} w_m(s)C_m(t-s\Delta\tau)\right]。\qquad (9)$$

这里C_m仅是时间的函数，可根据天体力学的公式计算；w则依地点而变，可由实测潮位确定。

权w有着一个重要的物理意义，实际上它的傅立叶变换代表着潮位的各种频率的振动对引潮力相应频率的振动的振幅比和位相差，叫做“导纳”。我们可以想象，在线性的情况下若两个振动的频率很接近，引潮力大多少倍，实际振幅也将差不多大这么多倍，对这两个振动，实际潮汐和引潮力位相差也将变化不大。所以导纳随频率的变化应当会是比较平滑的。基于这一信念，式（9）中s只要取少数几个数就可以了。关于这些问题，要涉及到谱的概念，我们不多介绍了。

式（9）对非天文的潮位也同样适用。实际上在水位中包含着一些气象因素引起的周期性振动。例如在非调和法中我们提到过的平均水位的季节变化主要就是气象因素引起的，这种变化在调和法中是用分潮S_a和S_{sa}代表的。大气压力变化中存在着一个相当明显的半日波动，在调和法中，它对水位的影响和天文潮S_2合在一起了。为了考虑气象影响，感应法中引入所谓“辐射潮”（意即气象效应是由太阳热辐射引起的），增加到式（9）之中。这里还可显示出感应法的一个优点，它能把不同来源的振动区分开来，而在调和法中，它们是混在一

起的。

上面谈的是潮汐运动为线性的情况。实际潮汐，特别在陆架上或江河口，非线性效应是重要的。在这种情况下还要增加如$w_{m,m'}(s,s')C_m(t-s\Delta\tau)C_{m'}(t-s'\Delta\tau)$这样的非线性项。

在实际工作中，C_m也可以不是引潮力和辐射函数，而是附近地点的由长期观测分析结果推算出来的潮位。当本地的观测时段较短时，这样做往往效果较好。

目前感应法还仅限于在理论分析研究中使用，实际潮汐预报中尚未见应用。一个原因是调和法沿用日久，已积累了大量分析结果，其预报效果又不比感应法差多少，很难改而采用感应法。另一个重要原因在于感应法还有一些不便之处。特别不同时刻的C_m之间相关关系太密切，如s或$\Delta\tau$取的不一样或增减几项，$w_m(s)$就完全不同了，且每一个w本身物理含义不确定。虽然$w(s)$序列的傅立叶变换比较稳定且意义明确，但这又增加了变换手续。此外，感应法分析和预报的计算量也比调和法大，程序也较复杂。但是应当看到，随着计算工具的改进，感应法本身的改善，在实际使用中是会逐渐多起来的。

第 1 期 堪 误 表：

页 数	位 置	误	正
编者的话	背面上 3 行	末	未
22页	左侧正文第 7 行	$>NcH_2N<$	$>NCH_2CH_2N<$
22页	表 1 盐度栏	盐度（%）	盐度（‰）
23页	左侧第 2 行	第三期	第二期
23页	左侧第 6 行	…盐度是26%，	…盐度是26‰
23页	右侧第14行上 3	M＋n	M^{+n}
23页	同上	$\begin{matrix}MOOCH_2C\\MOOCH_2C\end{matrix}>NCH_2CH_2N<\begin{matrix}CH_2COOM\\CH_2COOM\end{matrix}$	$\begin{matrix}MOOCH_2C\\MOOCH_2C\end{matrix}>NCH_2CH_2N<\begin{matrix}OH_2COOM\\CH_2COOM\end{matrix}$
61页	右下11行	亚	非