

波浪作用下含沙浓度沿水深的分布规律*

天津大学水利系 王尚毅

本文主要是探索二元推进余波作用下，含沙浓度沿水深的分布规律问题。

通过试验研究导出，在平衡挟沙条件下，含沙浓度沿水深的分布公式。并由此解释了在实际中可能出现的三种分布情况：（1）表层较低，中层较高，底层更高；（2）表层较高，中层较低，底层更低；（3）表层较高，中层较低，底层较高。

文中最后引出，平衡挟沙含沙浓度沿水深分布的数值计算公式。

一、平衡挟沙模型

波浪系属一种非恒定运动，在其水体内部各空间点上的含沙浓度亦均因时而异。如图1所示，为任意两点（A、B）上含沙浓度随时间变化的情况。作为一个周期性波浪水体的平衡挟沙状态，各点上含沙浓度的变化亦具有相应的周期性。

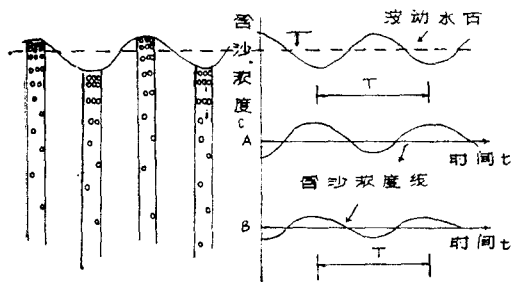


图1 周期性二元波浪水体内部各点上含沙浓度在平衡挟沙情况下的变化图。

为便于分析起见，我们把波浪要素在一个周期内进行平均，这是对于图1所示的波浪而言，则可得到图2所示的均化结果。不难看出，通过上述模化之后，可以将一个具有周期性的波浪水体，设想为一种特殊化的静水，在这种静水中，各点上均具有挟沙能力。作为此

种水体的平衡挟沙状态应是：水体内部任一点上的含沙浓度，均不随时间改变（图2）。

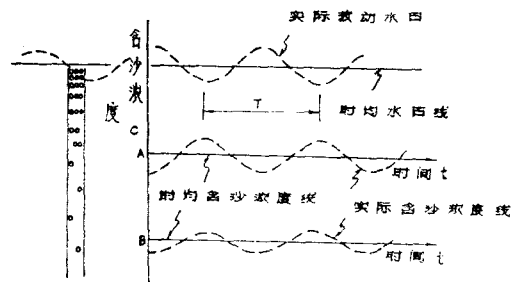


图2 周期性波浪水体（图1）的时均化结果

二、基本微分方程式的建立

在波浪水体模化的基础上，在分析时我们把悬浮的泥沙颗粒看成是一种连续介质，而且由于其周围水体的紊动扩散作用，该种介质亦具有相应的扩散现象。

在二元波浪水体中，任取一微分基体，其厚为1。如图3所示，在 Δt 时段内，悬沙的变化为：

$$\frac{\partial c}{\partial t} \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot \Delta t = \left[-\frac{\partial}{\partial x} (u_{mx} \cdot c) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_{mx} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_{mz} \frac{\partial c}{\partial z} - w_0 \frac{\partial c}{\partial z} \right) \right] \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot \Delta t \quad (1)$$

用 $\Delta x \cdot \Delta z \cdot \Delta t$ 除公式（1）的两边，得

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (u_{mx} \cdot c) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_{mx} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon_{mz} \cdot \frac{\partial c}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (w_0 c) \quad (2)$$

* 在工作过程中，顾元棧同志参加了讨论，并提出宝贵意见，特此致谢。

上式即为悬沙的基本微分方程式（普遍形式）。

式中， C ——点 z 上的含沙浓度（体积比）；
 u_{mx} ——悬沙沿 x 向的传质速度（周期 T 内的平均值）；
 $\epsilon_{mx}, \epsilon_{mz}$ ——分别为 z 点上悬沙扩散系数沿 x 向及 z 向的上分量；
 w_0 ——悬沙的组合静水沉速。

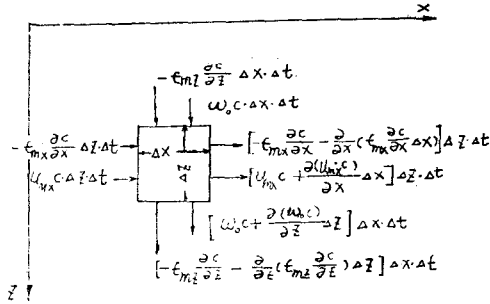


图3 在 Δt 时段内悬沙进出微分基体分析图

在平衡挟沙的情况下，考虑各有关参数沿 x 向的导数为零以及 w_0 沿水深不变的情况下，或写：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(u_{mx} \cdot C) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon_{mx} \cdot \frac{\partial C}{\partial x}) &= 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

将(3)式代入(2)式

$$\frac{\partial}{\partial z}(\epsilon_{mz} \cdot \frac{\partial C}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z}(w_0 C) = 0 \quad (4)$$

积分上式

$$\epsilon_{mz} \frac{dC}{dz} - w_0 C = A \quad (5)$$

式中， A 为一积分常数，该值在下述公式中为零

$$\epsilon_{mz} \cdot \frac{dC}{dz} - w_0 C = 0 \quad (6)$$

上式即为平衡挟沙情况下，悬沙的基本微分方程式。其中：

w ——任一点 z 上悬沙的组合沉速；
 $w_0 C$ ——通过 z 单位水平面积上的输沙率；
 $\epsilon_{mz} \frac{dC}{dz}$ ——通过上述同一水平面积上悬沙扩散输沙率，该值在平衡挟沙时与 $w_0 C$ 相等〔公式(3)〕。

三、基本微分方程式(6)的积分

(一) 单一颗粒泥沙在二元波浪水体中的沉降运动

为了研究泥沙颗粒在波浪水体中的受力性质，我们曾在二元波浪水槽中进行过单一颗粒泥沙的沉降试验。试验是在一个长7.5米，宽10厘米和高60厘米的玻璃水槽中进行的。槽首设置一套可调节的升波机，槽首尾装有斜坡消能栅，在观测段上贴有座标格，波浪要素用目测和照像机配合记录，用电影机（每秒8—16片）连续记录泥沙颗粒的沉降轨迹。为了校正电影机的视角误差，在试验之初先照下泥沙颗粒的静水沉降轨迹，以兹校对。

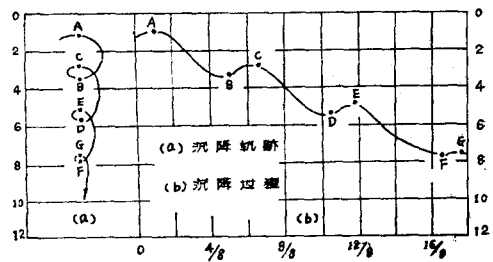


图4 单颗粒泥沙在波浪水体中的沉降运动

图4_a示出泥沙颗粒在波浪水体中的沉降轨迹。不难看出，在具有周期性波浪的作用下，泥沙颗粒在沉降过程中，亦具有相应的周期性振荡。同时表明，泥沙颗粒在相邻两次出现最高（如A、C），或最低（B、D）位置之间，所需要的时间与波浪周期基本一致。

最后根据泥沙颗粒的沉降过程线(图4b),以周期T为计算历时,可求得相应位置(两个相邻最高点或最低点位置的平均值)处的平均沉速值,兹将整理结果示于图5。

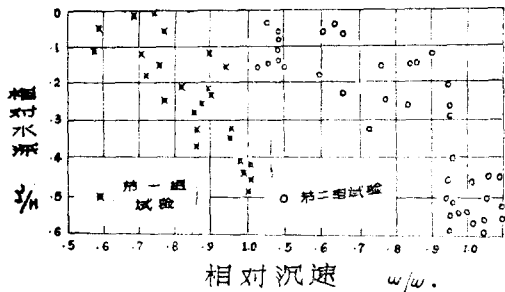


图5 在波浪水体中单一颗粒泥沙的动水沉降资料

图5所示之结果表明,在具有周期性二元波浪水体中,泥沙颗粒沉速一般均较其静水沉速 w_0 值为小,而且愈接近水面愈小。从而可以推论:在波浪作用下,沉降中的泥沙颗粒,除了受有向下的重力和向上的阻力之外,还受有一个向上的作用力(该力暂称为波浪力),这个力愈接近水面愈大。

(二) 有关参数的假定

1. w 的表达式:根据二元波浪水体中泥沙颗粒的动水沉降试验结果,可知悬沙在运动中亦受有波浪力的作用。假定该力产生是由于波浪水体的不均匀紊动扩散作用引起的,在平衡挟沙的情况下,则可写:

$$w = w_0 + \frac{d\epsilon_{mz}}{dz} \quad (7)$$

式中, $\frac{d\epsilon_{mz}}{dz}$ —悬沙扩散速度,其方向与 w_0 相反。

2. ϵ_{mz} 的表达式:由于悬沙的扩散运动是波浪水体紊动扩散作用引起的一种相应产生的现象,兹假定:

$$\int_{C_a}^C \frac{dc}{C} = \int_a^z \left(\frac{w_0}{\sigma_0 \epsilon_z} + \frac{1}{\epsilon_z} \frac{d\epsilon_z}{dz} \right) dz,$$

$$\ln \frac{C}{C_a} = \int_a^z \frac{w_0}{\sigma_0 \cdot b_* \cdot B_* \cdot ch K (H-Z)} dz - \int_a^z \frac{K Sh K (H-Z)}{ch K (H-Z)} dz,$$

$$\ln \frac{C}{C_a} = \int_a^z \frac{w_0}{\sigma_0 \cdot b_* \cdot B_* \cdot ch K (H-Z)} dz - \int_a^z K th K (H-Z) dz, \quad (13)$$

$$\epsilon_{mz} = \sigma_0 \epsilon_z \quad (8)$$

式中, ϵ_z —波浪水体垂向紊动扩散系数;

σ_0 —悬沙扩散校正系数,在分析中设为一常数。

3. ϵ_z 的表达式:这里采用Γ. C. 巴什金诺夫的研究成果(4),可写:

$$\epsilon_z = \frac{b_* g \cdot T \cdot h \cdot ch K (H-Z)}{4\pi ch KH} \quad (9)$$

式中, $b_* = 0.0025$; g —重力加速度;

T —波浪周期; $K = \frac{2\pi}{\lambda}$;

λ —波浪长度; h —波浪高度;

H —水深。

若写

$$B_* = \frac{g \cdot T \cdot h}{4\pi ch KH} \quad (10)$$

则公式(9)可有下列形式

$$\epsilon_z = b_* B_* ch K (H-Z) \quad (11)$$

4. 合并公式(8)及(11),进行微分得

$$\frac{d\epsilon_{mz}}{dz} = -K \cdot \sigma_0 \cdot b_* \cdot B_* \cdot sh K (H-Z) \quad (12)$$

(三) 微分方程式(6)的积分 将公式

(7)、(8)代入公式(6)可得

$$\epsilon_{mz} \frac{dc}{dz} - (w_0 + \frac{d\epsilon_{mz}}{dz}) c = 0$$

$$\text{或 } \sigma_0 \epsilon_z \frac{dc}{dz} - (w_0 + \frac{\sigma_0 d\epsilon_z}{dz}) c = 0$$

两边除以 $\sigma_0 \epsilon_z$ 并分离变数,有

$$\frac{dc}{c} - \left(\frac{w_0}{\sigma_0 \epsilon_z} + \frac{1}{\epsilon_z} \frac{d\epsilon_z}{dz} \right) dz = 0$$

以 C_a 及 C 分别代表 $z=a$ 及 z 上的含沙浓度,结合公式(11)及(12),则可写上式的定积分式

令 $K(H-Z)=u$, 则 $dz = -\frac{1}{K} du$,

$$\begin{aligned} \text{则式中, } \int_a^z \frac{w_0}{\sigma_0 \cdot b_* \cdot B_* \cdot ch K(H-Z)} dz &= - \int_{K(H-a)}^{K(H-Z)} \frac{w_0}{K \sigma_0 \cdot b_* \cdot B_* \cdot chu} du \\ &= - \frac{w_0}{K \cdot \sigma_0 \cdot b_* \cdot B_*} \int_{K(H-a)}^{K(H-Z)} \frac{du}{chu} = \frac{-2w_0}{K \sigma_0 b_* B_*} \left\{ tg^{-1} e^{K(H-Z)} - tg^{-1} e^{K(H-a)} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{又式中, } \int_a^z K th K(H-Z) dz &= - \int_{K(H-a)}^{K(H-Z)} th u \cdot du \\ &= - \{ \ln ch K(H-Z) - \ln ch K(H-a) \} \\ &= -2.3 \lg_{10} \frac{ch K(H-Z)}{ch K(H-a)} \end{aligned} \quad (15)$$

将公式 (14) 及 (15) 代入 (13), 整理后得

$$\begin{aligned} \frac{C}{C_a} = exp. \left\{ \frac{-2w_0}{K \cdot \sigma_0 \cdot b_* \cdot B_*} [tg^{-1} e^{K(H-Z)} - tg^{-1} e^{K(H-a)}] + \right. \\ \left. 2.3 \lg_{10} \frac{ch K(H-Z)}{ch K(H-a)} \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

上式即为在平衡挟沙情况下, 含沙浓度沿水深分布规律的表达式。e 的指数中, 第一项 (中括号内) 为重力对悬沙的作用影响部分; 第二项为波浪水体垂向非均匀紊动扩散作用对悬沙的影响部分。二者作用方向不同, 前者垂直向下; 后者垂直向上。二者作用的综合结果, 决定悬沙含沙浓度沿水深的分布形式。

(1) 当波浪水体垂向不均匀紊动扩散作用占主导地位时, 含沙浓度表层较高, 中层较低, 底层更低;

(2) 当重力作用占主导地位时, 含沙浓度表层较低, 中层较高, 底层更高;

(3) 当上述二者作用均占有重要地位时, 含沙浓度表层较高, 中层较低, 底层较高, 即呈“双峰型”分布规律。

在其他因素相同, 但水深较大, 泥沙颗粒较细, w 较小的情况下, 可能出现第一种分布形态; 水深较小, 泥沙颗粒较粗, w 较大的情况下, 可能出现第二种分布形态; 若情况介于上述二者之间, 则呈第三种 (双峰型) 分布规律。此时在水深上存在 $w \left(= w_0 + \frac{dc}{dz} \right) = 0$

的点 (该点上 $\frac{dc}{dz} = 0$)。

含沙浓度的上述三种分布形态, 在实际中均有所发现。

四、波浪作用下含沙浓度沿水深分布的计算问题

在计算含沙浓度沿水深分布时, 需要事先确知公式 (16) 中的系数 b_* 和 σ_0 , 若取 $b_* = 0.0025$, 则只有 σ_0 一个系数需要确定。为此我们研究了马德山的试验成果, 并对存在问题进行了两组补充试验。

(一) 试验设备 试验是在长 14.0 米、宽 25 厘米和高 35 厘米水槽中进行的。波浪要素由一套可以调节的升波机产生, 槽子首尾设有碎石消浪斜坡。如图 6 所示, 在观测段设有两排 (每排六个) 内径为 3 毫米的取样管, 其距水槽底分别为 2、4、9、14、19 及 23 厘米。

(二) 试验用沙 试验中取用天津胶泥。图 7 所示为该种泥沙在不同制备方法和我们在补充试验中两种不同过程的分析结果。

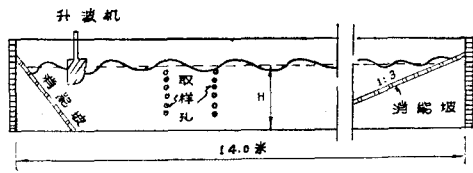


图6 波浪试验槽

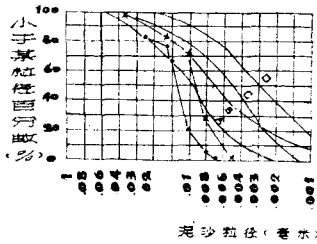


图7 天津胶泥在不同条件下颗粒级配曲线

A—未加搅拌原沙样 B—机械搅拌(45~60)分钟 C—人工搅拌三分钟 D—加氨煮沸(半分散法) \blacktriangle —沉淀平衡过程 \bullet —掀扬平衡过程

$$\frac{C}{C_a} = \exp \left\{ \frac{-800 \omega_0}{KB^*} \left[t_g^{-1} e^{k(H-Z)} - t_g^{-1} e^{k(H-a)} \right] + 2.31910 \frac{chk(H-Z)}{chk(H-a)} \right\} \quad (17)$$

上式即为二元推进余波作用下，含沙浓度沿水深分布的数值计算公式。

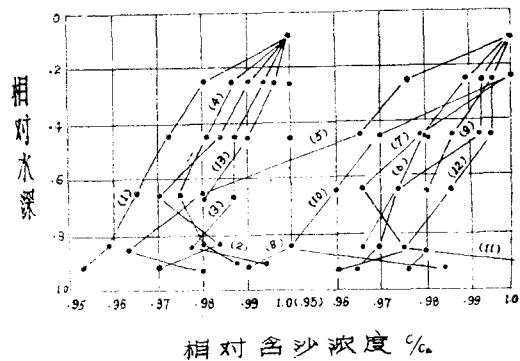


图8 天津胶泥在沉淀平衡过程中的试验结果

(三) 试验过程 试验之初将洗过盐的胶泥放入槽内，在自来水中充分搅拌，并造成含沙浓度呈超饱和状态，随后开动升波机，使这部分过量泥沙在一个恒定浪波要素作用下沉降。采用快速同步取样的方法，直至连续两次称样差在0.5%以内，认为挟沙处于平衡状态时为止，每次持续时间约需8~9小时。

(四) 试验结果 试验共进行13组(波浪要素参见表1)。整理结果绘入图8。图中所示之结果表明，试验资料基本上满足含沙浓度沿水深呈双峰型的分布规律。

(五) σ_0 的确定 按照公式(16)的关系，取 $b_* = 0.0025^{[4]}$ ，结合两组补充试验资料确定 σ_0 值。图9所示结果，当 $\sigma_0 = 1.00$ 时，计算结果比较接近实际情况。

将 $b_* = 0.0025$ 及 $\sigma_0 = 1.00$ 代入公式(16)，则有

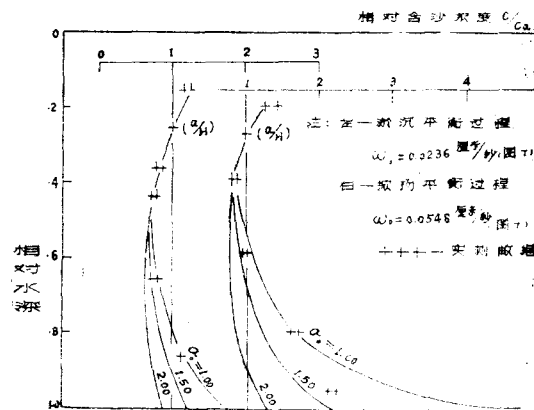


图9 σ_0 值的确定过程

试验波浪要素 表 1

组次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
T (秒)	.6	.6	.6	.7	.7	.7	.7	.8	.8	.8	.8	.98	.98
h (厘米)	4.5	4.8	5.0	3.7	4.7	6.5	6.7	3.4	4.6	6.6	8.2	2.3	4.1
λ (厘米)	56.5	56.0	56.5	68.0	68.0	72.0	72.0	90.0	90.0	93.4	93.4	109.0	112.0

(参考文献略)