

风暴潮引起的地形诱导波的理论 与数值对比研究

汪景庸

(山东海洋学院)

近年来,在有关风暴潮的预报方法及其动力机制的研究中,各种波的传播日益受到重视。本文用数值模型和一个简化的理论模型,对于地形诱导波的特性及其传播作了比较研究。结果表明,在我们的数值模拟结果所观察到的波中,包括着地形诱导波,而且它对风暴潮的动力过程有显著影响。

一、参 考 理 论

考虑沿直海岸传播的波,坐标系的选取及海底地形如图1所示。

用 ξ 表示自由海面对平衡位置的位移,用 u 和 v 分别表示沿 x 和 y 方向的速度分量。忽略科氏力,浅水中自由振动的线性化方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0 \quad (3)$$

在(1), (2)与(3)式, g 是重力加速度, $h = h(x)$ 是海深。

若有波在海中传播, 设它的解 u 、 v 和 ξ 具有以下形式:

$$u = F_1(x)e^{ik(y-ct)} \quad (4)$$

$$v = F_2(x)e^{ik(y-ct)} \quad (5)$$

$$\xi = F_3(x)e^{ik(y-ct)} \quad (6)$$

把 u 、 v 和 ξ 代入(1)与(2)得:

$$F_1(x) = -\frac{gi}{kc} F_3'(x) \quad (7)$$

$$F_2(x) = -\frac{g}{c} F_3(x) \quad (8)$$

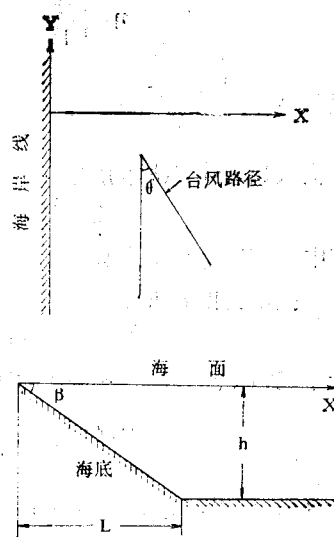


图1 海岸线及海底地形

把式(7)与(8)代入(4)与(5)后再把(4), (5)和(6)代入(3)式得:

$$\left[h F_3'(x) \right]' + \left[\frac{(kc)^2}{g} - k^2 h \right] F_3(x) = 0 \quad (9)$$

其中“'”表示微商。

当 $0 \leq x \leq L$ 时, $h = \frac{h_1}{L} x$, (9)式可化为:

$$\left[x F_3'(x) \right]' + L K^2 \left(\frac{c^2}{gh_1} - \frac{x}{L} \right) F_3(x) = 0 \quad (10)$$

令 $\xi = \frac{x}{L}$, $\frac{d}{dx} = \frac{1}{L} \frac{d}{d\xi}$, 由(10)可得:

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi \frac{dF_3(L\xi)}{d\xi} \right] + (KL)^2 \left(\frac{c^2}{gh_1} - \xi \right) F_3(L\xi) = 0, \text{ 当 } 0 \leq \xi \leq 1 \text{ 时。} \quad (11)$$

把 $F_3(x)$ 表为:

$$F_3(x) = F_3(L\xi) = A F(\xi) e^{-(KL)\xi} \quad (12)$$

并且记 $m = KL$, (11)式可化简为:

$$\xi F'' + (1 - 2m\xi) F' + \left(\frac{m^2 c^2}{gh_1} - m \right) F = 0 \quad (13)$$

最后令 $2m\xi = \eta$, $\frac{d}{d\xi} = 2m \frac{d}{d\eta}$,

(13)式变为:

$$\eta \frac{d^2 F}{d\eta^2} + (1 - \eta) \frac{dF}{d\eta} + \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{gh_1} - 1 \right) F = 0 \quad (14)$$

$$\text{记 } \nu = \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{gh_1} - 1 \right) \quad (15)$$

方程(14)中 $F(\xi)$ 的解为:

$$F(\xi) = L_\nu(\eta) = L_\nu(2m\xi) \quad (16)$$

其中 $L_\nu(\eta)$ 是拉盖尔函数。

把求得的 $F(\xi)$ 代入(12)式中可得:

$$F_3(x) = A L_\nu(2kx) e^{-kx}, \text{ 当 } 0 \leq x \leq L \text{ 时。} \quad (17)$$

对于 $x \geq L$, $h = h_1$, 从(9)式可得:

$$F_3''(x) + k^2 \left(\frac{c^2}{gh_1} - 1 \right) F_3(x) = 0 \quad (18)$$

只有当 $c^2/gh_1 < 1$ 时, 才可能有地形诱导波, 并得:

$$F_3(x) = B e^{-\frac{\mu}{L} x} \quad (19)$$

$$\text{其中, } \mu = m \cdot (1 - c^2/gh_1)^{1/2} \quad (20)$$

$F_3(x)$ 与 $F_3'(x)$ 在 $x = L$ 处的连续性, 要求:

$$A L_\nu(2m) e^{-m} = B e^{-\mu}$$

以及 $A(2mL'(2m) - mL_\nu(2m)) e^{-m} = -B\mu e^{-\mu}$

从而得到 $(\mu - m)L_v(2m) + 2mL_v'(2m) = 0$

$$\text{记 } F^* = (\mu - m)L_v(2m) + 2mL_v'(2m) \quad (21)$$

地形诱导波存在的一个必要条件是 $F^* = 0$, 对于 v 有离散的解 (对于给定的 m)。从 (15) 和 (20) 可得:

$$\mu = \sqrt{m(m-1-2v)}$$

因而 $m(m-1-2v) \geq 0$ 。注意到 $m > 0$, 我们有

$$v \leq \frac{m-1}{2}$$

从 (15) 与 $c > 0$ 出发, 可得 $v > -0.5$ 。

计算结果表明, 当 $m > 3$ 时, 总存在离散解 v 满足 $F^* = 0$ 。当 $0 \leq m \leq 3$ 时, 有以下结果: 对于 $0 \leq m \leq 1.2$, v 的一个连续区间是 $F^* = 0$ 的解。因此波谱是连续的, 波不是只出现在一个狭窄的频带内。当有强风作用在海面上时, 就像在风暴潮的情况中, 这种连续波是不重要的。对于 $m > 1.2$, $F^* = 0$ 有离散的解, 其值为 $v \approx 0$ 。

由 (15) 式有:

$$v = \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{gh_1} - 1 \right) \approx 0$$

$$\text{因而 } c^2 = \frac{gh_1}{m} = \frac{gh_1}{KL}$$

$$\text{且有 } \omega^2 = k^2 c^2 = \frac{gh_1 k}{L} \approx gk \sin \beta \quad (22)$$

其中 β 是海底的坡度。

这与 Stokes (1846) 提出的边缘波是一致的。

二、用数值模型讨论波的性质

本文中所用的数值模型是一个沿深度平均的模型, 关于它的详细记述可在文献 (1) 中找到。计算时用图 1 中所示的理想化的沿直海岸及海底地形。除特别申明外, 在分析区的外边界上通常使用辐射边界条件。把以上理论结果与数值计算结果做一比较, 可得到以下几点。

1. 根据 (6) 式, 地形诱导波的相速度与 x 无关。因此水位峰值的等时线应当是彼此平行的。当我们用图 1 所示的海岸线与地形时, 确实得到了彼此平行的等时线。图 2 就是一例。

2. 边缘波的另一个特点是波被限制在近海岸带, 而不向离岸方向扩散。当计算台风风暴潮水位时, 因为局部地区上的风在各地都可能引起一定的水位变化, 因此这一特性不容易被观察到。

我们做了两个特别设计的数值实验来说明这一特性。在第一个实验中, 分析区的南部边界条件是:

$$\xi = F(x)e^{i\omega t}$$

其中, $F(x) = Ae^{-x/b}$

取 $A = 2.0$ 米和 $b = 120000$ 米。这就等于从南部边界传入分析区中的一个波。这个波在近岸处的幅度为 2.0 米, 而在离岸 $x = 600$ 公里处, 波幅为 0.13 米。用数值模型计算了 48 小时来观察波是怎样通过分析区的, 结果示于图 3 中。在图 3 中, D 是距分析区南部边界的距离, D 从 450 公里到 750 公里, 而没有向离岸方向扩散。在近海岸处, 幅度从 1.4 米降到 0.8 米, 即下降了 43%。而在外海

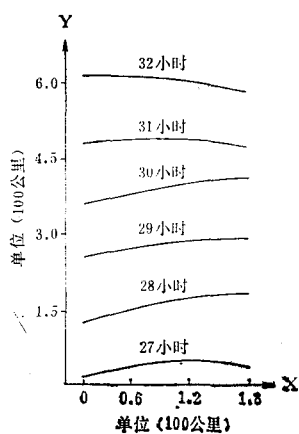


图2 峰值潮位出现时刻的等时线

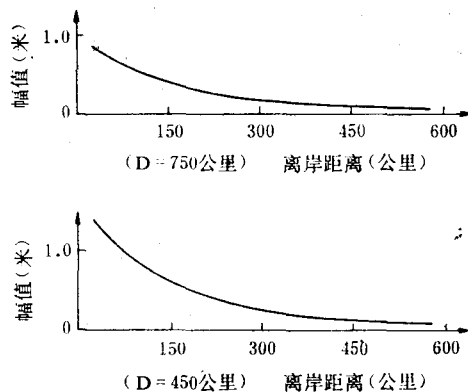


图3 幅值与离岸距离的关系

边界附近由0.12米降到0.08米，即下降了33%。这意味着波没有扩散。在近岸处的衰减比在外海处大些，这是合理的，因为底摩擦在浅水处比在深水处起更大的作用。以上结果表明数值模型可模拟地形诱导波。

在另一个计算中，分析区的南部边界没有传入的波。这里像通常那样，我们使用辐射边界条件。在近海岸线的分析区的中部，我们给定了一个初始水位，其高度为：

$$\xi(x, y) = A e^{-r/r_0}$$

其中， $r = [x^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}$

以及 $A = 4.0$ 米， $r_0 = 60000$ 米， $y_0 = 480000$ 米。

用数值模型计算了20小时，在大约两小时以后，过渡解基本上被摩擦力所耗散了，由初始位移所诱发的波向各个方向传播。在图4中，曲线C给出了在2—20小时内从初始位移中心点A向南的各点上的最高水位，而曲线B给出了离中心点向东的情况。对于向北的传播，可以得到一条与向南传播非常相似的曲线。可以看出波主要是沿海岸传播，而在离岸方向衰减很快。这是在所给出的理想化的沿岸地形里可能出现地形诱导波的进一步证实。

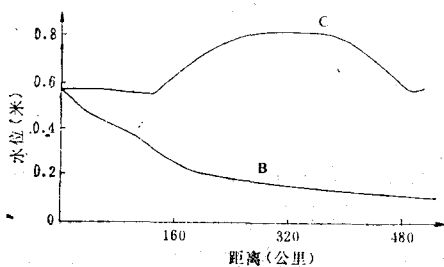


图4 最高水位与距离之关系

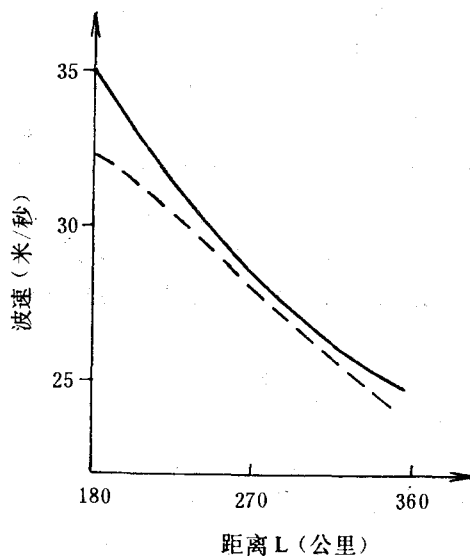


图5 理论与数值计算的波速

3. 从 F^* 的计算结果中可知, 当 $m = 1.2$ 时, $v = -0.05$, 当 $m > 1.8$ 时, $v = 0$. 因此 $v = 0$ 是一个好的近似值。故有:

$$\frac{mc^2}{gh_1} = 1 \quad (23)$$

$$\text{又知 } m = kL \quad (24)$$

$$\omega = kc \quad (25)$$

在选定了 ω 和 L 以后, m 、 k 和 c 的值可以由 (23)–(25) 式中计算出。我们做了一个数值实验来比较由上式得到的速度及从数值解的结果中推出的速度。结果示于图 5 中, 实线是由 (23)–(25) 中计算的, 而虚线是由数值模型给出的。它们彼此符合很好。

三、台风路径的影响

世界各地大陆架的平均倾斜度 h_1/L 为 $0(10^{-3})$ 。在东海 (上海附近) 此值为 $0(10^{-4})$ 。从以上的理论分析中可以看到, L 大时容易出现地形诱导波。事实上, 在我们模拟东海风暴潮时所做过的许多计算中, 总有各种波出现。在不同的条件下它们的区别在于: 在某些情况下地形诱导波占了统治地位, 这可以在整个分析区内观察到, 像在图 2 中那样。图 6 中给出了另一个类似的例子, 按东海 (上海附近) 的真实地形, 计算一强台风沿着与海岸成 30° 角接近海岸。

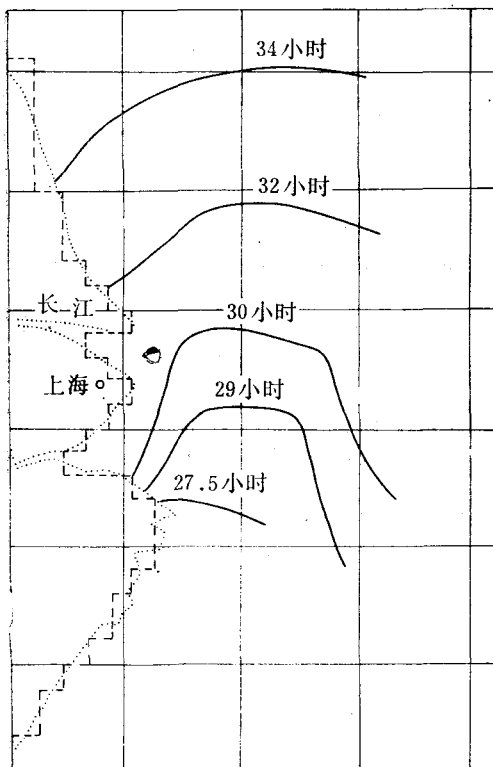


图 6 峰值水位出现时刻的等时线

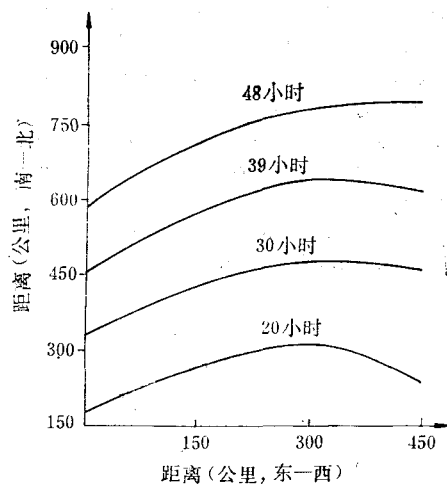


图 7 低速传播的波

图 7 中给出了局部风占统治地位的一个例子。这时控制着整个分析区的波以台风中心移动速度传播。这一速度比地形诱导波的传播速度小很多, 在上例中要小 10 倍以上。当台风中心垂直移

向海岸时, 地形诱导波也被局部风的作用所淹没。台风路径与海岸线成 20° 到 50° 角时, 在数值计算结果中容易找到边缘波。

我们做过三类数值实验以寻求可能的解释。采用的台风具有相同的参数, 而只有路径与海岸所成的角度不同, 它们分别与海岸平行、或垂直或成 30° 角。由数值实验的结果中可得到如下的可能的解释: 就早期平行于海岸的台风来说, 台风远离我们主要关心的地区, 这时在远方浅水中产生的波传到我们所关心的浅水区, 未经放大; 局部风的作用所产生的潮位也不高(由于风的方向), 但仍比地形诱导波的作用大; 对第二个路径, 局部风产生高水位, 其作用大于地形诱导波的作用, 只有当台风中心走第三个路径时, 在深水中产生的波传到浅水中得到放大, 可以被清楚地观察到。

参 考 文 献

- (1) Wang Jingyong, 1983. Numerical experiments on storm-surge simulation in the East China Sea. Ph. D. Thesis, University of Reading.

A COMPARATIVE STUDY OF THEORETICAL AND NUMERICAL SIMULATIONS OF TRAPPED WAVES INDUCED BY STORM SURGES

Wang Jingyong

(Shandong College of Oceanography)

Abstract

The following characteristics of this process have been determined.

- 1) Typhoon approaching the coastline at about 30° causes Waves With isochrones of peak surge elevations parallel to the coastline.
- 2) If waves with specific parameters enter the analysis area through the southern boundary, then they are propagated northwards with uniform phase speed, but not in the off-shore direction.
- 3) Initial disturbances in the middle of the analysis area near the coast lead to waves propagating in all directions. Maximum elevations decay much quicker to the east than to the south or the north.
- 4) The agreement between the phase speed deduced from an theoretical analysis and the numerical model is good.