

在不远离截止频率时均匀浅海中简正波的衰减系数

唐应吾

(中国科学院声学研究所)

一、前言

对于海水均匀、海底具有吸收的均匀液型介质的情况及水层中的简正波的衰减系数, Kornhauser and Rapey⁽²⁾(以下简称K-R)曾作过理论探讨,求得*l*号简正波的衰减系数 $I_m(h_l)$ 为

$$I_m(h_l) = \alpha F(l, \beta) \tag{1}$$

式中,

$$F(l, \beta) = \frac{c_1 \beta}{c_2 X_l} \left[\left(\frac{\beta}{X_l} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \left\{ \left(\frac{\beta}{X_l} \right)^2 \left(1 - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) + \frac{\rho_2}{\rho_1} X_l \left[\frac{\beta^2}{X_l^2} \left(1 - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) - 1 \right]^{1/2} \left[1 + \frac{\rho_1^2 \beta^2}{\rho_2^2 X_l^2} \left(1 - \frac{c_1^2}{c_2^2} \right) - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \right] \right\}^{-1}$$

h_l 为第*l*号简正波的水平波数; α 为海底的声吸收系数; $\beta = \omega H / c_1$; ω 为声波的角频率; H 为海深; X_l 是频散方程

$$X_l^2 (1 + (\rho_2 / \rho_1)^2 \cot^2 X_l) = \beta^2 (1 - c_1^2 / c_2^2) \tag{2}$$

的第1个根; c_1 和 ρ_1 各为海水的声速和密度; c_2 和 ρ_2 各为海底的声速和密度; I_m 为虚数符号。下面还要用到实数符号 Re 。

K-R在得出公式(1)时,其关键在于假设强不等式

$$a \gg b \tag{3}$$

这里

$$a + ib = Y_1 \tag{4}$$

$$Y_1^2 = k_1^2 - h_l^2 \tag{5}$$

$k_1 = \omega / c_1$, $i = \sqrt{-1}$ 。严格说来,在不等式(3)中应该使用绝对值,即 $|a| \gg |b|$,因为 a 与 b 是异号的。

在本文中,我们要指出K-R的假设(即强不等式(3))不是恒成立的,也有 $|a| \geq |b|$ 的情况出现,并且基于 $|a| \geq |b|$ 这一条件来求 $I_m(h_l)$ 的表达式,以资补充K-R理论。下面分三步来讨论。

二、强不等式(3)不恒成立的讨论

下面用Eby等人⁽³⁾的实验数据来说明(3)式不恒成立。令 $h_l = \text{Re}(h_l) + i\text{Im}(h_l)$,则由

(4) 与 (5) 两式可解得

$$a = \pm \frac{(\sqrt{P^2 + Q^2} + P)^{1/2}}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

$$b = \mp \frac{(\sqrt{P^2 + Q^2} - P)^{1/2}}{\sqrt{2}} \quad (7)$$

式中

$$P = k_1^2 - (\operatorname{Re}(h_l)^2 - \operatorname{Im}(h_l)^2) \quad (8)$$

$$Q = 2\operatorname{Re}(h_l)\operatorname{Im}(h_l) \quad (9)$$

$$\operatorname{Re}(h_l) = \omega/c_1 = \omega \cos(l\pi/k_1 H)/c_1$$

Eby的实验数据证明⁽³⁾, 当频率远离其截止值, 即当 $\beta \gg 1$ 时, $\operatorname{Im}(h_l)$ 反比于 ω^2 ; 由于 $\operatorname{Re}(h_l)$ 近似地正比于 ω , 故由(9)式可以推出 Q 反比于 ω 。这时, 虽然 c_l 接近于 c_1 ⁽¹⁾, 但 P 仍是随着 ω 的增大而变大; 这就是说, 当 $\beta \gg 1$ 时, 有 $P \gg Q$, 而强不等式(3)成立。同样, 实验也证明了, 当频率在不远离其截止值(即当 β 不甚大于1)时, $\operatorname{Im}(h_l)$ 近似地反比于 ω 。据此, 从(9)式中可推 Q 近似地与 ω 无关; 但由(8)式可知, P 随着 ω 的减小而迅速下降, 这样我们可以找出一个频率, 在此频率以下有关系式 $P < Q$ 。事实上, 这时 P 可近似地表为

$$P \approx \frac{\omega^2}{c_1^2} - \frac{\omega^2}{c_2^2} = \left(\frac{\omega}{c_1} + \frac{\omega}{c_2} \right) \omega \left(\frac{c_2 - c_1}{c_1 c_2} \right) \approx 2k_2 \omega \frac{c_2 - c_1}{c_1 c_2} \quad (10)$$

而 Q 可近似地表为

$$Q \approx 2k_2 \operatorname{Im}(h_l) \approx 2k_2 \alpha \quad (11)$$

这里, 我们以 α 来代替 $\operatorname{Im}(h_l)$ 肯定是有误差的, 但在截止频率附近这个误差不会太大。对于大多数海底沉积物, 其吸收系数 α 可按公式⁽⁴⁾计算

$$\alpha = kf$$

式中 α 以dB/m为单位, 比例系数 k 以dB/m·kHz为单位, f 是以kHz为单位的频率(注意 $f > f_0 \equiv c_2/4H\sqrt{1 - c_1^2/c_2^2}$)。如选 $c_1 = 1.520 \times 10^3$ m/s, $c_2 = 1.525 \times 10^3$ m/s, $H = 50$ m, $f = 100$ Hz, $k = 0.25$ ⁽⁴⁾, 则由(10)和(11)两式可得

$$P \approx 2.71 \times 10^{-3} k_2, \quad Q \approx 5.76 \times 10^{-3} k_2$$

这就证明了 $P < Q$ 这一结论。这些结果表明, 当频率接近截止频率时, 强不等式(3)不再成立, 而代之为

$$|a| \geq |b| \quad (12)$$

上面的分析表明, K-R的理论只在频率远离其截止值的情况下才能应用。这一点也为Eby等人⁽³⁾的实验所证实。

三、简正波的衰减系数

基于略等式(12), 由(5)式就可获得

$$\operatorname{Im}(h_l) \approx -ab/k_1 \quad (13)$$

其中 a 和 b 满足极点方程

$$(a + i\alpha)^2 [1 + (\rho_2/\rho_1)^2 \cot^2(aH + ibH)] = k_1^2 - k_2^2 \quad (14)$$

这里 $k_2 = \omega/c_2 + i\alpha$, 因为 $\omega/c_2 \gg \alpha$, 故(14)式可简化为

$$(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(\rho_2/\rho_1)^2 R - 2ab(\rho_2/\rho_1)^2 I \approx k_1^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2} \quad (15)$$

和

$$2ab + (a^2 - b^2)(\rho_2/\rho_1)^2 I + 2ab(\rho_2/\rho_1)^2 R = -2\omega\alpha/c_2 \quad (16)$$

这里, $\cot^2(aH + ibH) \equiv R + iI$, 其中

$$R = \frac{\cos^2 aH \cdot \sin^2 aH - \operatorname{sh}^2 bH \cdot \operatorname{ch}^2 bH}{[(\sin aH \cdot \operatorname{ch} bH)^2 + (\cos aH \cdot \operatorname{sh} bH)^2]^2}$$

$$I = \frac{-2\cos aH \cdot \sin aH \cdot \operatorname{sh} bH \cdot \operatorname{ch} bH}{[(\sin aH \cdot \operatorname{ch} bH)^2 + (\cos aH \cdot \operatorname{sh} bH)^2]^2}$$

在本文的情况下, (12) 式成立, 即 $|aH| \geq |bH|$, 利用前面所选的数值, 可得 $|bH| > 1$, 故有 $|R| \gg |I|$, 又因为 $2|ab| = Q$, $(a^2 - b^2) = P$, 由于 Q 与 P 同数量级, 故在公式 (15) 和 (16) 的左边中不含 R 的项皆可略去, 如此可得

$$ab = -\frac{\omega\alpha X_{1l}^2}{c_2\beta^2(1 - c_1^2/c_2^2)} \quad (17)$$

这里, $X_{1l} = H(k_1^2 - \operatorname{Re}(h_l)^2)^{1/2}$ 是方程 (2) 的第 l 个根, 把 (17) 式代入 (13) 式中, 就得出计算第 l 号简正波的衰减系数的公式

$$I_m(h_l) = \alpha F_1(l, \beta) \quad (18)$$

此处

$$F_1(l, \beta) = \frac{c_1 X_{1l}^2}{\beta^2 c_2 (1 - c_1^2/c_2^2)}$$

当然, 公式 (18) 只有在频率不远离截止值时才能应用。

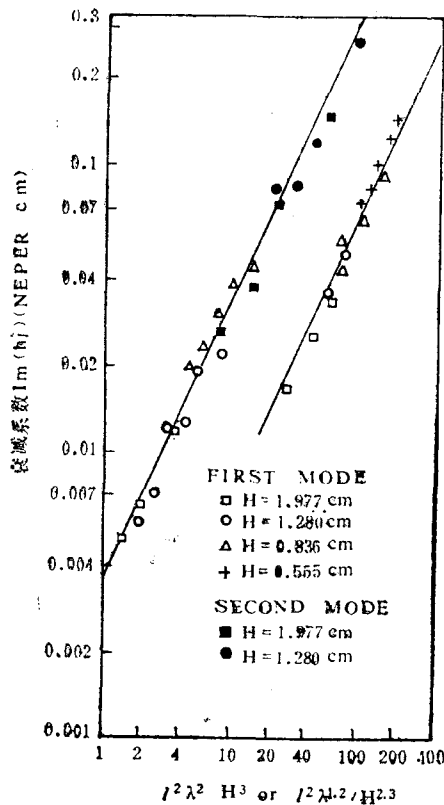


图 在远离截止频率时 $I_m(h_l)$ 按 $l^2\lambda^2H^3$ 变化; 在中间频率时 $I_m(h_l)$ 按 $l^2\lambda^{1.2}/H^{2.3}$ 变化示意图
Fig. The change of $I_m(h_l)$ by $l^2\lambda^2H^3$ when further away from the cut-off frequency. and that by $l^2\lambda^{1.2}H^{-2.3}$ at intermediate frequency.

容易看出，当 $\cot X_1 = 0$ 时，有 $X_1 = \beta(1 - c_1^2/c_2^2)^{1/2}$ ，这时，公式(18)简化为

$$I_m(h_{消}) = \alpha c_1/c_2 \quad (19)$$

这是消失波的衰减系数。因为这时简正波已激发不出来，声源只激发出一个消失波。(19)式表出，消失波的衰减系数不是 α ，而是 $\alpha c_1/c_2$ ，即比 α 多一个因子 c_1/c_2 （通常 $c_1/c_2 \approx 1$ ）。

四、与实验的比较

Eby等人^[3]的模拟实验指出：当频率在远离其截止值时，简正波的衰减系数按规律 $l^2 \lambda^2/H^3$ 变化（这里 λ 为水层中声波的波长）；在中间频率时简正波衰减系数按规律 $l^2 \lambda^{1.2}/H^{2.3}$ 而变化（图1）^[3]。

前者与K-R理论所预言的规律一致，后者与本文所预言的在不远离截止频率处的规律 $l^2 \lambda/H^2$ （将 $\beta = \omega H/c_1$ 和 $X_1 \approx l\pi$ 代入(18)式，并注意到(12)式就可得出）相接近。这说明本文结果与K-R的结果是相互补充的。

参 考 文 献

- [1] 布列霍夫斯基赫, Л.М.1957 (杨训仁译, 1960). 分层介质中的波. 科学出版社, 第292页, 310页。
- [2] Kornhauser, E. T. and W. P. Raney, 1955. Attenuation in shallow water propagation due to an absorbing bottom. *JASA* 27(4): 689—692.
- [3] Eby, R. K. et al., 1960. Study of Acoustic propagation in a two-layered model. *JASA* 32(1): 88—99.
- [4] Hamilton, E. L., 1972. compressional-wave attenuation in marine sediments. *Geophysics* 37(4): 620—646.

THE ATTENUATION COEFFICIENT OF NORMAL MODES IN HOMOGENEOUS SHALLOW-WATER NEAR THE CUT-OFF FREQUENCY

Tang Yingwu

(Institute of Acoustics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, we suggest that the strong inequality $|a| \gg |b|$ in Kornhauser-Raney's theory is true as the frequency is far from the cut-off, but not so if the frequency is near the cut-off value. In the latter case, the strong inequality shall be replaced by $|a| \gtrsim |b|$. By means of this new relation we establish the expressions of attenuation of normal modes in homogeneous shallow-water with a 'liquid' bottom. The calculated results are in agreement with that tested.