

浅海中声简正波的水平波数的分布区域

唐应吾

(中国科学院声学研究所)

提要 本文用较为简单的方法导出了 ν_l 是浅海中第 l 号简正波水平波数的必要条件, 将它与辐射条件相接合, 确定了 ν_l 的分布区域, 并阐明该区域的物理意义。

一、引言

假设海水的两个界面是平的; 海水为分层不均匀介质, 其中的波数 $k(z)$ 为沿直坐标 z (自海面
向下为正)的任意连续函数, 而其密度 ρ_1 为常数; 海底中的波数 k_2 和密度 ρ_2 皆为常数。若声源放
在 $(0, z_0)$ 处, 则海水中任一点 (r, z) 处的简正波声场的表式为:⁽¹⁾

$$\phi = 2\pi i \sum_l \left\{ \frac{[F_1(z_0, \nu) + D_s F_2(z_0, \nu)][F_1(z, \nu) + D_b F_2(z, \nu)]}{W(F_1, F_2) \frac{\partial}{\partial \nu} (D_s - D_b)} \right\}_{\nu_l} H_0^{(1)}(\nu_l r) \nu_l \quad (1)$$

这儿, $D_s = -F_1(0, \nu)/F_2(0, \nu)$,
 $D_b = -\frac{F_1(H, \nu) + im[k_2^2 - \nu^2]^{-1/2} F_1'(H, \nu)}{F_2(H, \nu) + im[k_2^2 - \nu^2]^{-1/2} F_2'(H, \nu)}$,

$F_1(z, \nu)$ 和 $F_2(z, \nu)$ 是一维波动方程

$$\frac{d^2}{dz^2} F(z, \nu) + [k^2(z) - \nu^2] F(z, \nu) = 0 \quad (2)$$

的两个线性独立解; ν_l 是第 l 号简正波的水平波数, 即 ν_l 有极点方程

$$D_s = D_b \quad (3)$$

的第 l 个根; $H_0^{(1)}(\nu_l r)$ 为零阶第一类汉开尔函数; $m = \rho_2/\rho_1$; $i = \sqrt{-1}$; H 为海深, $W(F_1, F_2)$ 为朗斯基行列式; $F'(z, \nu) = dF(z, \nu)/dz$ 。

由上述结果可以看出: 计算浅海中简正波声场的关键在于解一维波动方程(2)和极点方程(3)。但前者可借助于WKB近似法来解决问题, 因此, 计算简正波声场的关键最后归结为解极点方程(3)。

实践指出, 如果事先知道简正波的水平波数 ν_l 的分布情况, 不但对极点方程(3)的求解变得容易, 而且还能判断解得结果的正误和估计声场的性质。因此, 确定 ν_l 的分布区域是有实际意义的。

简正波的水平波数的分布区域, 已有文献作讨论¹⁾, 但其中没有考虑到辐射条件⁽²⁾, 使得所得分布区域变宽, 同时所用的方法也很繁复。在本文中我们考虑到辐射条件且用较为简便的方

¹⁾张仁和, 1961。声在海洋中的传播理论。

法来讨论这一问题。

二、简正波声场的表达式的一个“变着”

$$\text{令: } F(z, \nu) = F_2(0, \nu)F_1(z, \nu) - F_1(0, \nu)F_2(z, \nu) \quad (4)$$

$$\text{及 } G(\nu) = \rho_2 F'(H, \nu) - i\rho_1 \sqrt{k_2^2 - \nu^2} F(H, \nu),$$

并注意

$$G(\nu_l) = 0 \quad (5)$$

$$\text{则(1)式变为 } \phi = 2\pi i \rho \sum_l \frac{F(z_0, \nu_l) F(z, \nu_l)}{F(H, \nu) \frac{\partial}{\partial \nu} G(\nu)} \Big|_{\nu_l} H_0^{(1)}(\nu_l r) \nu_l \quad (6)$$

这就是表式(1)的一个“变着”，在国外的一些文献中经常用到^[3]。显然，(6)式中的 $F(z, \nu)$ 是满足边界条件 $F(0, \nu) = 0$ 的方程式(2)的解。

三、 ν_l 是方法(5)的第 l 个根的必要条件

ν_l 是方程(3)的第 l 个根，也应是方程式(5)的第 l 个根。当海底存在吸收时， ν_l 为复数，即

$$\nu_l = \mu_l + i\beta_l \quad (7)$$

因为方程(5)是函数 $F(z, \nu)$ 在 $z = H$ 的边界上所应满足的边界条件，所以求方程(5)的解的问题变为解下列本征问题¹⁾：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 F(z, \nu_l)}{dz^2} + [k^2(z) - \nu_l^2] F(z, \nu_l) &= 0 \\ F(0, \nu_l) &= 0 \\ F(H, \nu_l) &= F_+(H, \nu_l) \\ F'(H, \nu_l) &= \frac{i\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}}{m} F_+(H, \nu_l) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这儿 $F_+(H, \nu_l) = \exp(i\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2} H)$

用 $F(z, \nu_l)$ 的复数共轭函数 $F^*(z, \nu_l)$ 乘(8)式中的第一式，有

$$F^*(z, \nu_l) \frac{d^2 F(z, \nu_l)}{dz^2} = \left[\nu_l^2 - k^2(z) \right] \left| F(z, \nu_l) \right|^2 \quad (9)$$

将(9)式对 z 从0到 H 进行积分，并利用(8)中的后三式及其复数共轭((8)式的复数共轭也成立)，有

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left| F'(z, \nu_l) \right|^2 dz + \int_0^H \left[\nu_l^2 - R^2(z) \right] \left| F(z, \nu_l) \right|^2 dz \\ &= i\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2} \left| F(H, \nu_l) \right|^2 / m \end{aligned} \quad (10)$$

将上式中的实部与虚部分开，得

$$\left| F(H, \nu_l) \right|^2 \frac{1}{m} \operatorname{Re} \left(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2} \right) = \int_0^H I_m \left[\nu_l^2 - k^2(z) \right] \left| F(z, \nu_l) \right|^2 dz,$$

¹⁾ 同上页。

$$- \left| F(H, \nu_l) \right|^2 \frac{I_m(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2})}{m} = \int_0^H \operatorname{Re}[\nu_l^2 - k^2(z)] \left| F(z, \nu_l) \right|^2 dz + \int_0^H \left| F'(z, \nu_l) \right|^2 dz \quad (11)$$

(11) 式就是 ν_l 是第 l 号简正波的水平波数的必要条件, 其中 $\operatorname{Re}(\xi)$ 和 $I_m(\xi)$ 各表 ξ 的实部和虚部, 类似于 (11) 式的结果张仁和同志也得出过。

由 (11) 式中看出: ν_l 只可能分布在 $\operatorname{Re}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2})$ 与 $I_m(\nu_l^2 - k^2(z))$ 的同号区和 $I_m(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2})$ 与 $\operatorname{Re}(\nu_l^2 - k^2(z))$ 反号区, 但需注意, 由 (11) 式所确定的区域的某些部分为辐射条件所排斥, 例如, 当 $\operatorname{Re}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) < 0$ 与 $I_m(\nu_l^2 - k^2(z)) < 0$ 时, (11) 式中的第一式满足, 但 $\operatorname{Re}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) < 0$ 却不满足辐射条件。因此, 要想确定 ν_l 的分布区域, 必须使用 (11) 式和辐射条件, 如果时间因子选为 $\exp(-i\omega t)$, 则辐射条件要求

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}(\nu_l) &\geq 0 \\ I_m(\nu_l) &\geq 0 \\ \operatorname{Re}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) &\geq 0 \\ I_m(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

这些表明, ν_l 只可能分布在 $\operatorname{Re}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) \geq 0$, $I_m(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) \geq 0$, $I_m(\nu_l^2 - k^2(z)) \geq 0$, $\operatorname{Re}(\nu_l^2 - k^2(z)) \leq 0$ 以及 $\operatorname{Re}(\nu_l) \geq 0$ 和 $I_m(\nu_l) \geq 0$ 的区域。

四、 ν_l 的分布区域

由于海底中的波数有可能比海水中的波数大, 也有可能比海水中的波数小。因此, 下面分两种情况来讨论。

(一) $k_2 < k(z)$ 的情况

为了讨论的方便, 我们令 $k_2 = a + ib$ $k(z) = k(z) + ia$ (13)

由 $I_m(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) = 0$, 得 $\mu_l \beta_l = ab$, $\mu_l^2 - \beta_l^2 \leq a^2 - b^2$ (14)

由 (13) 式可定出一条双曲线 Γ_1 (见图 1); 由 (14) 式确定 Γ_1 的上半段 (点线部分) 上有 $I_m(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) = 0$, 能够证明: Γ_1 的下半段 (波浪线部分) 上有 $\operatorname{Re}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) = 0$ 。换言之, 在点线上, 有 $\operatorname{Arg}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2})$ 取 0 或 π 为值; 在波浪线上 $\operatorname{Arg}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2})$ 取 $\pi/2$ 或 $-\pi/2$ 为值, 而 (12) 式要求 $\operatorname{Arg}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2})$ 在点线上取 0 为值, 在波浪线上取 $\pi/2$ 为值, 这样, 当 ν_l 绕分支点 k_2 从点线上反时针方向转动半圈至波浪线上时, $\operatorname{Arg}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2})$ 由 0 增至 $\pi/2$ 。即在实轴、虚轴及双曲线 Γ_1 所夹的区域 (图 1 中的斜线区) 为 $\operatorname{Re}(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) \geq 0$ 和 $I_m(\sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}) \geq 0$ 的区域, 该区域即为 ν_l 的可能分布区域。

表示式 (11) 确定 ν_l 应分布在

$$\mu_l \beta_l \geq k(z)\alpha \quad (15)$$

与

$$\mu_l^2 - \beta_l^2 \leq k^2(z) - \alpha^2 \quad (16)$$

之间, 显见, 当 $k(z)\alpha$ 取最小值 $(k(z)\alpha)_{\min}$ 而 $(k^2(z) - \alpha^2)$ 取最大值 $(k^2(z) - \alpha^2)_{\max}$ 时, 只能使 ν_l 的分布区域加宽, 而并不遗漏 ν_l 的分布区域, 于是可令

$$\Gamma_2: \mu_l \beta_l = (k(z)\alpha)_{\min} \quad (17)$$

$$\Gamma_3: \mu_l^2 - \beta_l^2 = (k^2(z) - \alpha^2)_{\max}$$

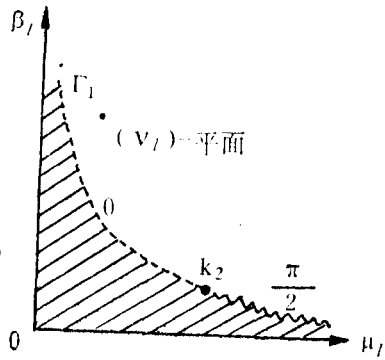


图1 Γ_1 为多值函数 $\sqrt{k_2^2 - v_1^2}$ 的分支线,

Γ_1 曲线上所标的数值为 $\text{Arg}\sqrt{k_2^2 - v_1^2}$ 的值

Fig.1 Γ_1 is the branchy line of many-valued

function $\sqrt{k_2^2 - v_1^2}$, the number on Γ_1

is the value of $\text{Arg}\sqrt{k_2^2 - v_1^2}$

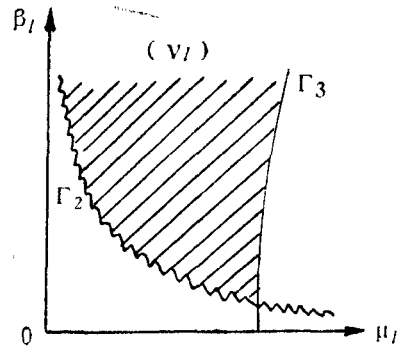


图2 图中的斜线区是 v_1 的可能分布区

Fig. 2 The oblique line range in figure is the probable distribution range of v_1

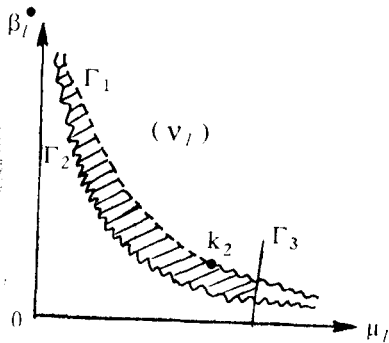


图3 图中的斜线区是 v_1 的分布区

Fig. 3 The oblique line range in figure is the distribution range of v_1

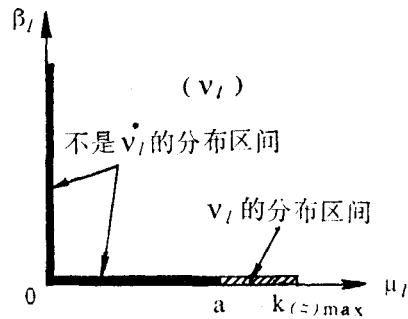


图4 图中的斜线区 $[a, k(z)_{max}]$ 是 v_1 的分布区

Fig. 4 The oblique line range $[a, k(z)_{max}]$ in figure is the distribution range of v_1

如此, 表式 (15)、(16) 与 (17) 所确定的区域如图 2 所示的斜线区, 该区域也是 v_1 的可能分布区域。这样, v_1 的实际分布区域应是图 1 与图 2 所示的斜线区的公共部分, 如图 3 所示。在通常的情况下, $ab > k(z)a$, 所以图 3 中的波浪线 Γ_2 在点线 Γ_1 的下面。

在 $a \rightarrow 0$ 时, 图 3 中的双曲线 Γ_2 退化到 μ 轴与 β 轴上来, 而 v_1 的分布区域变宽。

当 $b = a = 0$ 时, 图 3 中的斜线区全部退化到 μ 轴的一段 $[a, k(z)_{max}]$ 上来, 如图 4 所示。这个区域不包含 β 轴及 μ 轴上的 $[0-a]$ 段, 因为在它们上面表达式 (11) 不能成立, 所以 v_1 不能分布于其上。

在实际情况下, $a \rightarrow 0, b \neq 0$, 而 v_1 的分布区域有如图 5 所示的斜线区。

(二) $k_2 > k(z)$ 的情况

当 $k_2 > k(z)_{\max}$ 时, 有 $a^2 - b^2 \approx a^2$, 所以有 $a^2 - b^2 > k^2(z) - a^2$, 这表明曲线 Γ_3 将要移到 k_2 的左边, 如图 6 所示。图中的斜线区就是 v_l 的分布区域。图 6 显示出: 当 $k_2 > k(z)$ 时, 所有的 v_l 都是复数, 没有一个是取纯实数的。

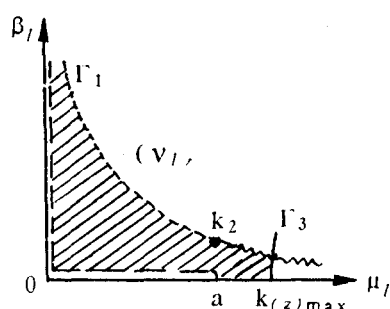


图 5 图中的斜线区是 v_l 的分布区
Fig. 5 The oblique line range in figure is the distribution range of v_l

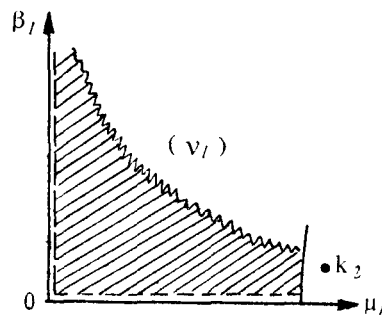


图 6 图中的斜线区是 v_l 的分布域
($k_2 > k(z)_{\max}$)
Fig. 6 The oblique line range in figure is the distribution range of v_l ($k_2 > k(z)_{\max}$)

五、 v_l 的分布区的物理意义

从图 5 和图 6 中看出: 第 l 号简正波的相移常数 μ_l 受限于上也受限于下, 即

$$0 < \mu_l \leq \operatorname{Re}[k(z)]_{\max}$$

这个不等式说明简正波的相速 c_l ($c_l = \omega/\mu_l$, ω 为声波的圆频率) 满足不等式

$$c_{\min} \leq c_l < \infty \quad (18)$$

其中 c_{\min} 表介质中最小的声速。

从图 3, 5, 6 中还可看出: 简正波的衰减系数 β_l 是受限于下的, 即

$$0 \leq \beta_l < \infty \quad (19)$$

同时, 具有较大相速的简正波就具有较大的衰减系数。

当 $b = a = 0$ 和 $k_2 < k(z)$ 时, 有 $\beta_l \equiv 0$, 且 $a \leq \mu_l \leq k(z)_{\max}$, 这表明在这种情况下, 简正波呈波导传播, 其传播相速不能小于海水中最小的声速, 也不能大于海底中的声速。

参 考 文 献

- [1] 尚尔昌, 1961. 物理学报 17 (4) 180—190.
- [2] A. H. 吉洪诺夫等, 1957. 数学物理方程, 下册. 高等教育出版社, 第 552—558 页.
- [3] Denham, R. N., 1969. JASA 45(2) 365—371.

THE DISTRIBUTION REGION OF HORIZONTAL WAVE NUMBER OF NORMAL MODES IN SHALLOW-WATER

Tang Yingwu

(Institute of Acoustics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, the distribution region of horizontal wave number of normal modes in shallow-water is discussed, and the physical meaning of this distributed region is also explained.