第3期　　　　海洋科学　　　　No. 3
1988年5月　　　　MARINE SCIENCES　　　　May, 1988

波浪中浮体流体动力系数的数值计算*

李德筠　沈国光
（天津大学）

提要　本文提出了水鼓在波浪中运动的一个初步数学模型。该模型是基于源汇分布的有限边界元法和使用了 Green 函数的级数表达式。所得结果与文献的结论十分吻合。

随着海洋工程的蓬勃发展，提出了愈来愈多的各种形式浮体在波浪中的运动问题。作为流体力学的一个课题，当用有限边界元求解时，必须依据表达式相当复杂的振荡点源 Green 函数。本文是为解决水鼓在波浪中的动力响应问题而进行的研讨与计算，可为浮体设计提供参数。

一、问题的基本提法

在线化的微幅波假定下，对零航速自由浮体在波浪中受激运动的流场速度势作如下分解。

$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z, t) &= \Phi_w + \Phi_d + \Phi_r \\ &= R_e\{\phi(x, y, z)\cdot e^{-i\omega t}\} \\ &= R_e\left\{\sum_{j=1}^{6}\xi_j\phi_j + A(\phi_0+\phi_7)\cdot e^{-i\omega t}\right\}\end{aligned} \tag{1}$$

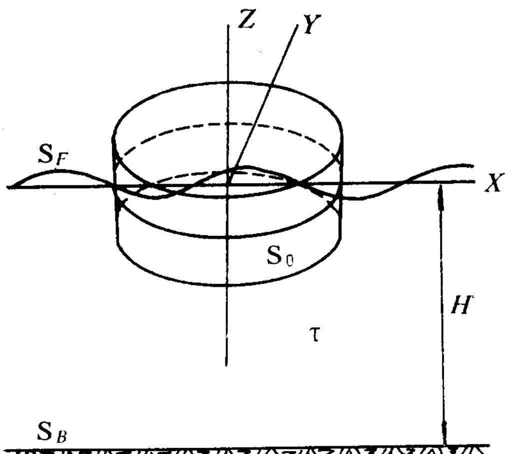

图1　坐标系
Fig. 1　Frame of reference

式中，Φ_w, Φ_d, Φ_r 分别为入射波势、绕射势、幅射势。A 为入射波幅；$\xi_j(j=1, 2, \cdots 6)$ 为对应自由度上的振荡幅值。

选用的坐标系如图1所示。

各组元成分的速度势应满足以下条件。

$$[L]\quad \nabla^2\phi_j = 0,\ j = 0, 1, 2, \cdots 7 \tag{2}$$

$$[F]\quad \phi_{jz} - \nu\phi_j = 0,\ j = 0, 1, 2, \cdots 7,\quad z = 0,\quad \nu = \frac{\omega^2}{g} \tag{3}$$

$$[B]\quad \left.\begin{aligned}&\left.\frac{\partial\phi_j}{\partial n}\right|_{S_0} = -i\omega n_j,\ j = 1, 2, \cdots 6, \\ &\left.\frac{\partial(\phi_0+\phi_7)}{\partial n}\right|_{S_0} = 0\end{aligned}\right\}\quad \text{物面 } S_0 \tag{4}$$

---

* 本文承陶建华教授的具体帮助和赵子丹教授的精心指点，在此一并致谢。

$$[H]\quad \left.\frac{\partial \phi_j}{\partial n}\right|_{Z=-H}=0,\quad j=0,1,2,\cdots 7,\quad H\text{ 为水深} \tag{5}$$

$$[R]\quad \lim_{R\to\infty}\sqrt{R}\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial R}-i\nu\phi_j\right)=0,\quad j=1,2,\cdots 7,\quad R=\sqrt{x^2+y^2} \tag{6}$$

若取单位振幅的辐射势，则表达式为：

$$\phi_j(x,y,z)=-i\omega\phi^{(j)}(x,y,z),\quad j=1,2,\cdots 6 \tag{7}$$

$$\phi^{(j)}=\phi_1^{(j)}+i\phi_2^{(j)} \tag{8}$$

对某一辐射模式，当取振荡运动表达式为：

$$\begin{aligned}
x_j&=R_e\{\xi_j\cdot e^{-i\omega t}\}=\xi_j\cdot\cos\omega t;\\
\dot{x}_j&=R_e\{-i\omega\xi_j\cdot e^{-i\omega t}\}=-\omega\xi_j\cdot\sin\omega t\\
\Phi_r&=R_e\{\xi_j\phi_j e^{-i\omega t}\}\\
&=R_e\{-i\omega\xi_j(\phi_1^{(j)}+i\phi_2^{(j)})\cdot e^{-i\omega t}\}\\
&=R_e\{(\dot{x}_j-i\omega x_j)(\phi_1^{(j)}+i\phi_2^{(j)})\}\\
&=\dot{x}\phi_1^{(j)}+\omega x_j\phi_2^{(j)}
\end{aligned} \tag{9}$$

依据 Green 第二公式，当考虑 P 点在流场内部时，则：

$$\phi^{(j)}(P)=-4\pi\int_{S_0+S_F+S_R+S_B}\left(\phi^{(j)}(Q)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n}-G(P\cdot Q)\frac{\partial\phi^{(j)}(Q)}{\partial n}\right)ds \tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为流场外法向单位矢量；$\phi^{(j)}(P)$ 为流场中任意点的辐射势；$G(P,Q)$ 为单位强度振荡点源的 Green 函数，它满足 Laplace 方程和除物面以外的边界条件。

由问题的边界条件得知，其中对积分有贡献的唯有物面 S_0。

若在物体内部虚构一个流场，设 $\phi^{(j)}(P)$ 为内场解。

当选择在物面上 $\phi^{(j)}=\phi^{(j)}$，称 $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}-\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=\sigma(Q)$ 为点源强度的分布函数时，最后可得：

$$\phi^{(j)}(P)=\frac{1}{4\pi}\int_{s_0}\sigma(Q)\cdot G(P\cdot Q)\cdot ds \tag{11}$$

无论 P 点在流场内部还是外部或物面边界上，流场辐射势 $\phi^{(j)}(P)$ 则由替代物面存在的点源强度的分布函数 $\sigma(Q)$ 所决定。

二、Green 函数和面元诱速的计算

单位强度振荡点源 Green 函数的级数表达式为：

$$\begin{aligned}
G=&W\cdot chk\cdot(\zeta+H)\cdot chk\cdot(z+H)[Y_0(kr)-iJ_0(kr)]\\
&+4\sum_{m=2}^{M}W_k\cos(\mu_k(z+H))\cos(\mu_k(\zeta+H))k_0(\mu_k r)
\end{aligned} \tag{12}$$

式中，

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2};\quad W=\frac{2\pi(\nu^2-k^2)}{k^2H-\nu^2H+\nu};$$

$$W_k=\frac{\mu_k^2+\nu^2}{(\mu_k^2+\nu^2)H-\nu};\quad \nu=\frac{\omega^2}{g}=kth(kH)。$$

J_0, Y_0, K_0 分别为零阶第一类、第二类和修正的第二类 Bessel 函数。

μ_k 是方程 $\mu_k\mathrm{tg}(\mu_k H)+\nu=0$ 的根．注意到 μ_k 为多值且逐个单调递增，有：

$$\left(K-\frac{1}{2}\right)\pi < \mu_k H < K\pi$$

而 K_0 是单调递减函数，$K_0(5)=0.0038$。如果 $\mu_k H=\frac{5}{r}H<KH$，并以 $M=\left[1.5+\frac{5H}{\pi r}\right]$（[ ]表示取整），当 $K<M$ 后，$K_0(\mu_k r)<0.0038$ 无疑。现就以此 M 作为级数项数的截取标准。

利用物面条件，可以得出确定点源强度 $\sigma(Q)$ 的积分方程：

$$\frac{\partial\phi^{(j)}(P)}{\partial n}=V_n=\frac{1}{4\pi}\int_{s_0}\sigma(Q)\cdot\frac{\partial G(P\cdot Q)}{\partial n}\cdot ds \tag{13}$$

现将在 S_0 上的积分分解为两部分：$S_0=\delta S+(S_0-\delta S)$，其中 dS 为包括过 P 点在 S_0 上的垂足 P_0 点的一小面积，当 P 点趋向于 P_0 点时，在 δS 上的源汇所诱导的法向速度为：

$$V_n=\frac{1}{2}\sigma(Q)=\frac{1}{4\pi}\int_{\delta S}\sigma(Q)\frac{\partial G}{\partial n}\cdot ds$$

于是得到确定 $\sigma(Q)$ 的积分方程为：

$$\frac{\partial\phi^{(j)}(P_0)}{\partial n}=n_j=\frac{1}{2}\sigma(Q)+\frac{1}{4\pi}\int_{S_0-\delta S}\sigma(Q)\cdot\frac{\partial G(P_0,Q)}{\partial n}\cdot ds \tag{14}$$

经离散化后，化为代数方程：

$$\sigma_i^{(j)}+\sum_{k=1}^{N}\alpha_{ik}\sigma_k^{(j)}=2n_{j,i}\quad i=1,2,\cdots N \tag{15}$$

$$\alpha_{ik}=\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta S_k}\frac{\partial G}{\partial n}ds=\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta S_k}\left(\frac{\partial G}{\partial x}n_1+\frac{\partial G}{\partial y}n_2+\frac{\partial G}{\partial z}n_3\right)ds$$

解得 $\sigma_i^{(j)}$ 代入（11）式，流场辐射势的离散形式为

$$\phi_i^{(j)}(P)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\sigma_k^{(j)}}{4\pi}\int_{\Delta S_k}G(P\cdot Q)\cdot ds \tag{16}$$

而

$$\bar{V}=\begin{Bmatrix}\phi_x\\ \phi_y\\ \phi_z\end{Bmatrix}=\frac{1}{4\pi}\int_{S_0}\sigma(Q)\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}G\cdot ds=\sum_{k=1}^{N}\frac{\sigma_k}{4\pi}\int_{\Delta S_k}\begin{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial z}\end{pmatrix}ds \tag{17}$$

在边界元计算中采用局部坐标系，它与总体坐标系的关系为：

$$\begin{pmatrix}xx\\ yy\\ zz\end{pmatrix}_{\text{局部}}=\begin{pmatrix}e_{11}&e_{12}&e_{13}\\ e_{21}&e_{22}&e_{23}\\ e_{31}&e_{32}&e_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}_{\text{总体}} \tag{18}$$

前述 G 的表达式是在总体坐标系中给出的，现要在局部坐标系中进行计算：

$$\frac{\partial G}{\partial xx}=W\,chk(\zeta+H)\{shk(z+H)ke_{13}[Y_0-iJ_0]$$

$$+chk(z+H)(\dot{Y}_0-iJ_0)\frac{k}{r}((x-\xi)e_{11}+(Y-\eta)e_{12})\}$$

$$+4\sum_{m=2}^{M}W_k\cos(\mu_k(\zeta+H))(-\sin(\mu_k(z+H))\mu_k e_{13}K_0$$

$$+\cos(\mu_k(z+H))\dot{K}\frac{\mu_k}{r}((x-\xi)e_{11}+(y-\eta)e_{12})) \tag{19}$$

至于$\frac{\partial G}{\partial yy}$及$\frac{\partial G}{\partial zz}$，其表达式只是在 e_{ij} 系数上有异，在程序中引用了 D_1, D_2, D_3，它们对应于$\frac{\partial G}{\partial xx}$，$\frac{\partial G}{\partial yy}$，$\frac{\partial G}{\partial zz}$中的 e_{ij}，如表中所示。

	D_1	D_2	D_3
$\frac{\partial G}{\partial xx}$	e_{13}	e_{11}	e_{12}
$\frac{\partial G}{\partial yy}$	e_{23}	e_{21}	e_{22}
$\frac{\partial G}{\partial zz}$	e_{33}	e_{31}	e_{32}

无论计算G还是计算诱速 G_{xx}，G_{yy}，G_{zz} 都需在每个面元上进行，通常采用高斯积分。

Bessel 函数是以表的形式先行输入计算机，利用 Lagrange 插值方法，可以同时给出其函数值与导数值。

当对面元自身 $I=J$ 计算时，Y_0，K_0 出现奇性，但它们在 $r=0$ 的奇性都是积分可去的，采用适当技巧，可以顺利克服。

三、附连质量系数及阻尼系数

流体动力为：

$$f_{ij}=-\rho\int_{s_0}\phi_j\frac{\partial\phi_i}{\partial n}ds=\omega^2a_{ij}+i\omega b_{ij} \tag{20}$$

现在 $\phi_i=-i\omega\phi^{(i)}$；$\left.\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial n}\right|_{s_0}=n_i$

则有

$$f_{ij}=-\rho\int_{s_0}(-i\omega)\cdot\phi^{(j)}\cdot(-i\omega)n_i\cdot ds$$
$$=\rho\int_{s_0}n_i\omega^2\phi^{(j)}\cdot ds$$

其中

$$\phi^{(j)}=\phi_1^{(j)}+i\phi_2^{(j)}$$

则附连质量系数：

$$a_{ij}=\rho\int_{s_0}n_iR_0\phi^{(j)}ds=\rho\sum_{k=1}^{N}n_i\int_{\Delta s_k}\phi_1^{(j)}ds \tag{21}$$

阻尼系数：

$$b_{ij}=\rho\int_{s_0}n_i\omega\cdot I_m\phi^{(j)}ds=\rho\omega\sum_{k=1}^{N}n_i\int_{\Delta s_k}\phi_2^{(j)}ds \tag{22}$$

无量纲化后：

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}_{ij}&=\frac{a_{ij}}{\rho a^k}\quad k=3;\ i,j=1,2,3\\ \bar{b}_{ij}&=\frac{b_{ij}}{\rho\omega a^k}\quad k=5;\ i,j=4,5,6\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

四、力和响应的计算

物面压强为：

$$p=-\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+gz\right)$$

$$= -\rho R_e\left\{\left(\sum_{j=1}^{6}\xi_j\phi_j + A(\phi_0+\phi_7)\right)\cdot(-i\omega)\cdot e^{-i\omega t}\right\} - \rho g z \tag{24}$$

流体静恢复力为:

$$F_i = (\rho V - m)g\delta_{i3} + (mY_G - \rho V Y_B)g\delta_{i,4} - (mX_G - \rho V X_B)g\delta_{i,5} - \sum_{j=1}^{6} C_{i,j}\xi_j \tag{25}$$

下标 B, G 分别表示浮心和重心; C_{ij} 为静恢复力系数; δ_{ij} 为 Kroenecker 函数。单纯纵荡时, $F_1 = -C_{11}\xi_1 = 0$; $C_{11} = 0$。单纯升沉时, $F_3 = (\rho\forall - m)g - C_{33}\xi_3$; $C_{33} = \rho g s$。

阻尼和附加惯性力:

$$F_i = -\sum_{j=1}^{6}(a_{ij}\dot{U}_j + b_{ij}U_j) \tag{26}$$

波浪力:

$$F_{exi} = R_e\{Ae^{-i\omega t}X_i\} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} X_i &= -\rho\int_{s_0}(\phi_0+\phi_7)\frac{\partial\phi_i}{\partial n}ds \\ &= -\rho\int_{s_0}\phi_0\frac{\partial\phi_i}{\partial n}ds - \rho\int_{s_0}\phi_7\frac{\partial\phi_i}{\partial n}ds \\ &= X_{iFk} + X_{iWR} \end{aligned} \tag{28}$$

F_{Fk} 和 F_{WR} 分别为 Froude Krylov 力和绕射力。式中,

$$X_{iFk} = -\rho\sum_{k=1}^{N}\phi_0(P_k)\cdot(-i\omega)n_i(P_k)\cdot\Delta S_k \tag{29}$$

$$\begin{aligned} X_{iWR} &= -\rho\int_{s_0}\phi_7\frac{\partial\phi_i}{\partial n}ds = -\rho\int_{s_0}\phi_i\frac{\partial\phi_7}{\partial n}ds = \rho\int_{s_0}\phi_i\frac{\partial\phi_0}{\partial n}ds \\ &= \rho\sum_{k=1}^{N}(-i\omega)\phi_i^{(j)}\frac{\partial\phi_0}{\partial n}\cdot\Delta S_k \\ &= \rho\sum_{k=1}^{N}(-i\omega)(\phi_1^{(j)} + i\phi_2^{(j)})\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial x}n_x + \frac{\partial\phi_0}{\partial z}n_z\right)\Delta S_k \end{aligned} \tag{30}$$

由此当辐射势 $\phi^{(i)}$ 一经求出,波浪力 F_{exi} 即可求出。

已知入射波 $\phi_0 = -i\dfrac{g}{\omega}\dfrac{chk(H+z)}{chkH}\cdot e^{ikx}$, 则

$$\left\{\begin{aligned} F_{iFk} &= \frac{\rho g A}{chkH}\sum_{k=1}^{N}chk(H+z)n_i\cdot\Delta S_k\cdot\cos(kx-\omega t) \qquad (31)\\ F_{iWR} &= R_e\left\{-i\omega\rho\sum_{k=1}^{N}(\phi_1^{(i)} + i\phi_2^{(i)})\left[-i\frac{gA}{chkH}(ikchk(H+z)\cdot e^{ikx}\cdot n_x\right.\right. \\ &\quad \left.\left. + kshk(H+z)\cdot e^{ikx}\cdot n_z)\right]\cdot e^{-i\omega t}\cdot\Delta S_k\right\} \\ &= -k\frac{\rho g A}{chkH}\sum_{k=1}^{N}[\phi_1^{(i)}\cdot shk(H+z)n_z - \phi_2^{(i)}chk(H+z)n_x) \\ &\quad \cdot\cos(kx-\omega t) - (\phi_1^{(i)}\cdot chk(H+z)n_x + \phi_2^{(i)}shk(H+z)n_z) \\ &\quad \cdot\sin(kx-\omega t)]\cdot\Delta S_k \qquad (32) \end{aligned}\right.$$

从式中可见，Froude Krylov 力与人射波不发生相位差，而绕射力与人射波则会出现相位差。

定义无量纲波浪力系数

$$\begin{cases} C_j = \dfrac{F_{exi}}{\rho g a^2 A} \cdot e^{i\delta_j} \quad j = 1, 2, 3 & (33) \\ C_j = \dfrac{F_{exi}}{\rho g a^3 A} \cdot e^{i\delta_j} \quad j = 4, 5, 6 & (34) \end{cases}$$

式中，a 为物体尺度；δ_j 为力相对于入射波峰的飘角。

由运动方程

$$\sum_{j=1}^{6} \xi_j[-\omega^2(M_{ij} + a_{ij}) - i\omega b_{ij} + C_{ij}] = AX_i \tag{35}$$

可得响应：

$$\xi_j = A \cdot \sum_{j=1}^{6} [C_{ij}]^{-1} X_i \tag{36}$$

传递系数为：

$$Z_j = \frac{\xi_i}{A} \tag{37}$$

对于升沉运动：

$$Z_3 = \frac{X_3}{C_{33}} = \frac{X_3}{-\omega^2(a_{33} + M) - j\omega b_{33} + C_{33}} \tag{38}$$

对于纵荡运动：

$$Z_1 = \frac{X_1}{C_{11}} = \frac{X_1}{-\omega^2(a_{11} + M) - i\omega b_{11}} \tag{39}$$

对于纵摇运动：

$$Z_5 = \frac{x_5}{C_{55}} = \frac{x_5}{-\omega^2(I_{55} + a_{55}) - i\omega b_{55} + C_{55}} \tag{40}$$

可见响应 ξ_j 与波浪力之间亦存在相位差 ε_j，如果以 β_j 表示响应 ξ_j 与入射波峰之相位差，则

$$\beta_j = \delta_j + \varepsilon_j \tag{41}$$

五、计算实例与讨论

首先，在不同波长和水深情况下，对半径为 $a = 3$m的半球体进行计算，然后对半径为 $a = 3$m 淹没高度为 1.5m 的柱形水鼓进行计算。

图 2、图 3 分别给出了 1/4 球表面、1/4 水鼓表面板块划分示意图。

图 4、图 5 分别绘出了半球和水面下水鼓部分的无量纲附连质量系数 $\bar{a}$ 或阻尼系数 $\bar{b}$ 与参数 $\varpi = \dfrac{\omega^2 a}{g}$ 的关系曲线。图上的标记点是文献 [4] 的对应值。结果表明，在所计算的参数范围内其结果与已有结果是吻合的。当波长 λ 变小，则参数 ϖ 变大时差异增大，这是由于板块个数相对小，波长已不足以精确描述流场特性所致。

一个有趣的结果是当水鼓纵摇时，$\bar{a}_{55}$ 是单位角速度 $\dot{X}_5 = \omega_y$ 所对应的量，它不随 ϖ 变化，$\bar{b}_{ij}$ 与兴波的能量向外辐射相关，当水鼓作升沉运动时，其兴波作用明显，故 $\bar{b}_{33}$ 较大，且随入变小而减小；但当水鼓纵摇时，在理想流体的假定下，水鼓的纵摇运动只影响近场，并且相对于波传播

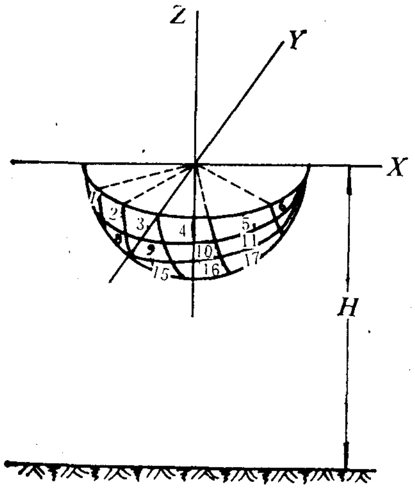

图 2 球 1/4 表面板块分割

Fig. 2 Division immersed surface of sphere into panels

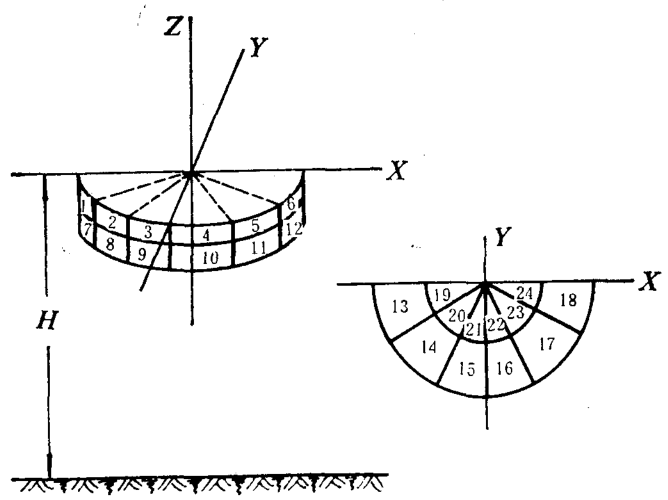

图 3 水鼓 1/4 表面板块分割

Fig. 3 Division immersed surface of buoyant drum into panels

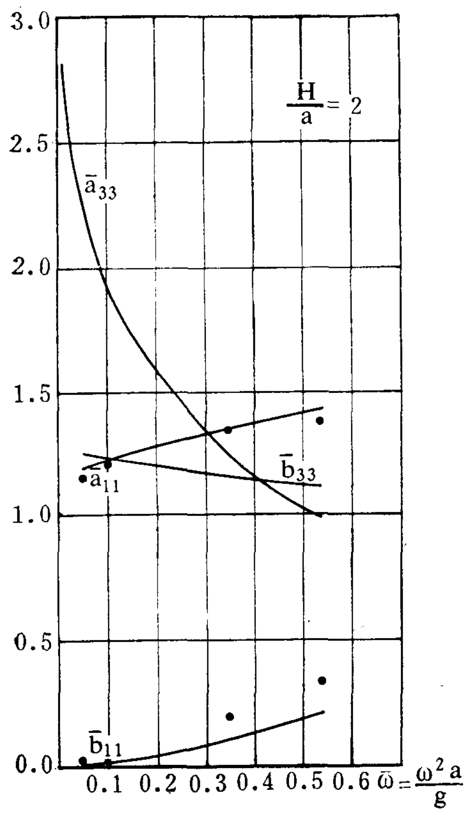

图 4 球 $\bar{\omega}-\bar{a}_{ij}$, $\bar{\omega}-\bar{b}_{ji}$ 曲线

Fig. 4 Relationships between $\bar{\omega}$ and $\bar{a}_{ij}$ or between $\bar{\omega}$ and $\bar{b}_{ij}$ for sphere

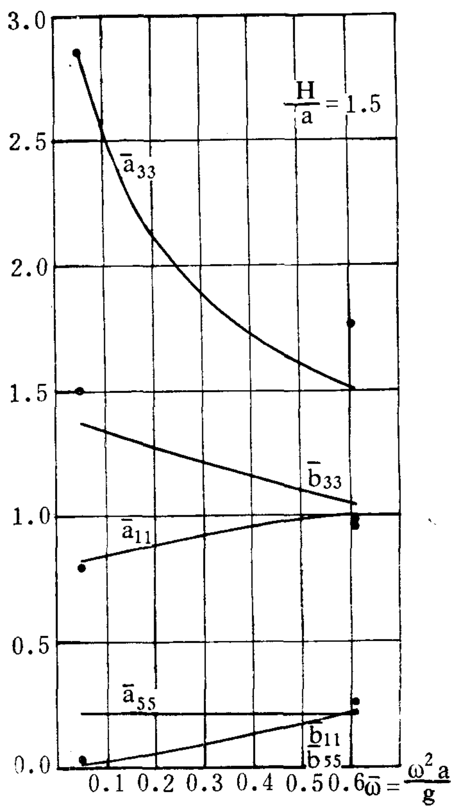

图 5 水鼓 $\bar{\omega}-\bar{a}_{ij}$, $\bar{\omega}-\bar{b}_{ij}$ 曲线

Fig. 5 Relationships between $\bar{\omega}$ and $\bar{a}_{ij}$ or between $\bar{\omega}$ and $\bar{b}_{ij}$ for buoyant drum

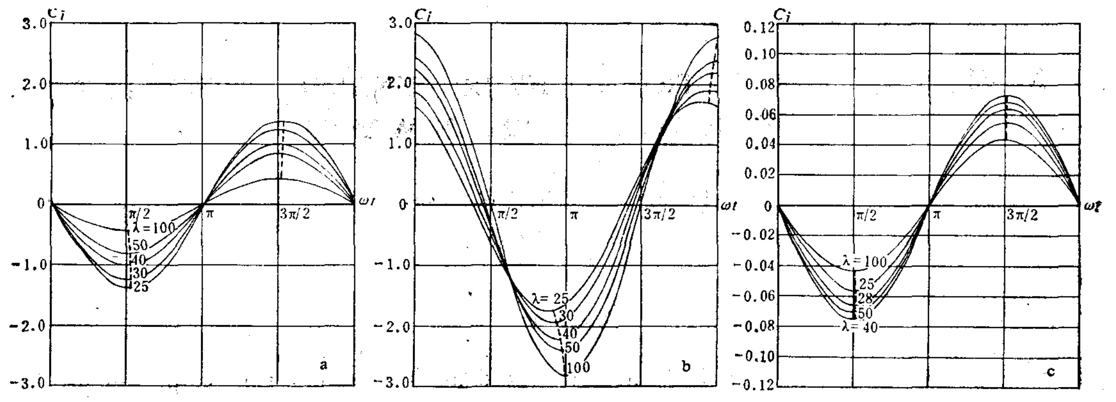

图 6 水鼓 C_i-ωt 曲线

a. 水鼓纵荡； b. 水鼓升沉； c. 水鼓纵摇

Fig. 6 Relationships between C_i and ωt

方向的前后两部分，对流场某一点的作用相反，对远场的影响则趋于消失，所以 $\bar{b}_{55}=0$。

图 6 中，a，b，c 分别给出水鼓在纵荡、升沉及纵摇时波浪力系数 C_i 在一个周期内的变化。每条振荡曲线的极值即为对应参数 ϖ 下的波浪力之幅值，而其极值点的水平位置，则标示出波浪力相对于人射波的相位差 δ_j。

应用 39—41 式，只要给定物体质量和惯性矩，就可以求出相应的传递系数 Z_j。

因为 $C_{11}=0$，纵荡传递函数无共振点，随 ϖ 的加大，Z_j 只能单调下降。

对于升沉，因为 $\bar{b}_{33}\neq 0$，其传递函数分母在一般情况下有虚根，在传递函数的曲线上将呈现有阻尼的共振极值。

对于纵摇，已知 $\bar{b}_{55}=0$，传递函数为实数，即 ξ_j 与波浪力 X_j 之间同位相，当分母取零时，$\omega=\sqrt{\dfrac{C_{55}}{I_{55}+a_{55}}}$ 发生共振，幅值 ξ_5 将取无穷。

为了在波长较短时获得较理想的结果，必须增加板块数目。

在以级数表达式进行 Creen 函数计算时，项数 M 与水深 H 成正比，而与计算点到奇点距离 r 成反比。故当 H 加大时，计算量线性增加，则可以取波浪的表面效应 $H=(0.5-1.0)\lambda$ 来控制水深的增加；当 $r\to 0$ 时，M 迅速增加，建议在近场改为依据积分形式的 Green 函数表达式进行计算，以获得改善。

参 考 文 献

[1] 孙伯起，1986。水动力学研究与进展 1:74—88。

[2] 杉浦正憲，1977。关西造船协会志，第 164 号，第 33—42 页。

[3] Kim, W. D., 1966. J. Ship RES. pp. 182—191.

[4] Garrison, C. J., 1978. Numerical Methods in Offshore Engineering. pp. 87—139.

NUMERICAL CALCULATION OF HYDRODYNAMIC COEFFICIENT FOR BUOYANT BODY IN WAVES

Li Dejun and Shen Guoguang
(Tianjin University)

Abstract

A preliminary numerical model of the buoyant drum by wave action is presented.

The model is based on the finite boundary elements method of the source distribution. A series of formulae of Green's function are used for the derivation of this model.

Our calculated results for a sphere and buoyant drum are consistent with that found in other literatures.