

# 潮流数值计算 ADI 方法的研究\*

江 绍 刚

(交通部第一航务工程局科学研究所,天津)

**提要** 依靠数值试验的方法,作者研究了有关用 ADI 方法模拟潮流场变化过程时的稳定性、收敛性和计算精度的问题。针对糙率、科氏力、初始水位、时间步长和水深对稳定性的影响,进行了大量的计算。结果表明:由公式

$$\beta = \Delta T / \Delta S \sqrt{gh_{\max}}$$

求得的  $\beta$  作为计算结果的精度的判别参数是合理的,而  $\beta$  作为计算的稳定性的判别参数就不太适用了。

ADI (Alternating Direction Implicit Method) 方法是国内外对潮流进行数值模拟中应用较多的一种方法。本文的目的是探讨应用这种方法时所遇到的计算的稳定性、收敛性和精度的问题。最早用 ADI 方法计算海湾潮流的是 Leendertes<sup>[3]</sup>, 后来被其他人发展和补充。例如:考虑河流径流量和风的影响的情况,以及考虑潮涨潮落使潮汐滩地时隐时现,造成被计算区域经常发生变化的情况,即将定边界潮流数值模型扩展为动边界的潮流数值模型。为便于分析,本次数值试验中采用的是定边界模型,而且没有考虑河流径流量和风的影响。实际上这是 Leendertes<sup>[3]</sup> 采用的模式。

## 一、数学模式

数学模型的基本方程式如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - fv + g \frac{u(u^2 + v^2)^{1/2}}{c^2(h + \zeta)} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + fu + g \frac{v(u^2 + v^2)^{1/2}}{c^2(h + \zeta)} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial[(h + \zeta)u]}{\partial x} + \frac{\partial[(h + \zeta)v]}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

式中,  $x, y$  轴依反时针方向旋转,  $xoy$  平面取在未扰动的平均海平面上(图1)。其中,  $t$  是时间;  $g$  是重力加速度;  $f$  是科氏参量 ( $f = 2\omega \sin \varphi$ ,  $\omega$  是地球自转角速度,  $\varphi$  是地理纬度);  $c$  是谢才系数 ( $c = \frac{1}{n} \bar{h}^{1/6}$ ,  $\bar{h}$  是计算点周围的水深的平均值,  $n$  是满宁系数);  $h$  是平均

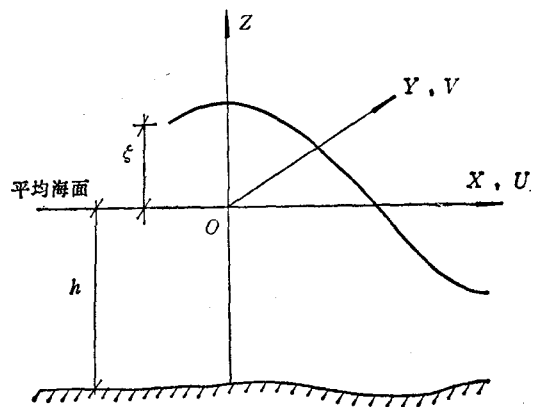


图1 计算坐标系

Fig. 1 Computational coordinates.

\* 本文承赵子丹教授热情帮助,特此致谢。

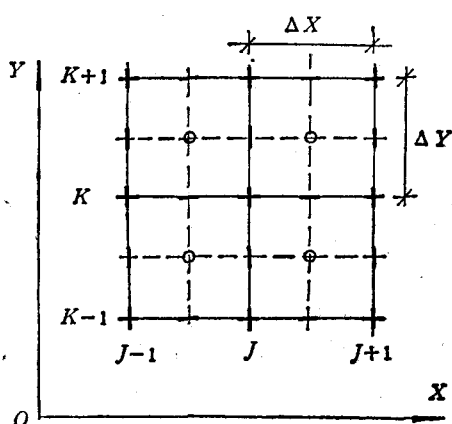


图2 空间交错网格

Fig. 2 Space-Staggered scheme

+:  $\zeta$  (水位);  $\circ$ :  $h$  (水深);  $-$ :  $u$  ( $x$  轴方向速度);  $|$ :  $v$  ( $y$  轴方向速度)

海平面以下水深;  $\zeta$  是平均海面以上瞬时水位高度;  $u$ 、 $v$  分别是  $x$ 、 $y$  方向上的垂向平均流速。

基本方程用有限差分方法求解。被模拟海区用二维等距网格表示。即  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ 。采用空间交错网格系统,使得速度、水位和水深被描述在不同的网格点上(图2)。水位  $\zeta$  描述在  $j$  和  $k$  的整数值的网格点上,速度  $u$  描述在  $j$  的整数加  $1/2$  和  $k$  的整数值的网格点上,速度  $v$  描述在  $j$  的整数和  $k$  的整数加  $1/2$  的网格点上。水深  $h$  描述在  $j$  和  $k$  的整数加  $1/2$  的网格点上。

按照这种方式,采用双时间步长运算,使得含有空间导数的项和科氏力项交替地向前和向后取值。这样,这些项在时间间隔上或者居时间中心或者为时间的平均值。每一次独立地运算在一个时间步长上分两步完成。第一步从时间  $n$  到时间  $n + 1/2$ ,由  $\zeta^n$ 、 $u^n$  和  $v^n$  的值求得  $\zeta^{n+1/2}$ 、 $u^{n+1/2}$  和  $v^{n+1/2}$  的值。这一步运算是通过在  $x$  方向上隐式运算求得  $\zeta$  和  $u$ ,然后在  $y$  方向上显式运算求得  $v$  来完成的。第二步从时间  $n + 1/2$  到时间  $n + 1$ ,由  $\zeta^{n+1/2}$ 、 $u^{n+1/2}$  和  $v^{n+1/2}$  的值求得  $\zeta^{n+1}$ 、 $u^{n+1}$  和  $v^{n+1}$  的值。这一步运算是通过在  $y$  方向上隐式运算求得  $\zeta$  和  $v$ ,然后

在  $x$  方向上显式运算求得  $u$  来完成的。也就是说,在运算过程中隐式和显式在  $x$ 、 $y$  方向被反复交替地使用。这就使得这种算法具有节省机时、内存、稳定性和精度较高等优点。

关于差分方程的导出、非线性项和边界条件的处理方法见参考文献 [1] 或 [3]。

## 二、数值试验

用 ADI 方法去解差分方程时,了解这种方法的稳定性、收敛性和计算精度是非常重要的。了解了它的这些特性,在计算过程中才能以较少的计算次数得到精度较高的计算结果。根据 Leendertes<sup>[3]</sup> 的理论分析,这种方法具有二阶精度,而且是无条件稳定的。但这些分析都是基于简化了的线性微分方程。如果考虑了科氏力、底部摩擦力等非线性项的影响,目前只有靠数值试验的方法去分析它的稳定性和收敛性。ADI 方法具有的稳定性和收敛性是经过了国内外许多人的大量计算所验证了的。在应用这种方法时,更希望事先了解在给定的条件下,需要几个潮周期才能使计算结果基本稳定;给定了空间网格步长,选择多大的时间步长才能使近似解基本收敛于真解,使截断误差满足精度要求。或者说,希望有一个预先估计达到稳定状态所需时间及达到精度要求所需空间网格步长和时间步长的方法。本次研究有目的地设计了一系列计算数据进行潮流数值计算,随后分析这些计算结果,以求从这一系列的数值试验中寻求稳定性和计算精度的判别条件。

稳定性通常有两种解释:一种是由于微分方程初值的假定造成的稳定性问题;一种是由于数值计算过程中的截断误差和舍入误差造成的稳定性问题。前者决定于微分方程,后者决定于计算方法,也依赖于计算机。稳定性的数值试验是对上述两种意义的稳定性的综合试验。

本次试验所用的地形资料是大窑湾的地形资料。由于试验中为研究水深和科氏力等参量的影响,需变更这些参量的数值,这时就不完全

符合大窑湾的自然条件了。

### 三、试验结果及分析

#### 1. 糙率对稳定性的影响

在其它参量不变的条件下,仅改变糙率值。所用的糙率为 0.015、0.02、0.028、0.038、0.045。分析这 5 次计算结果得出:(1)糙率越大,流速越小;(2)糙率从 0.015 变到 0.045,流速值相差 20% 左右;(3)糙率越大,渐近稳定速度越快。糙率等于 0.045 时,只要计算两个潮周期就完全稳定了;糙率等于 0.015 时,计算到 4 个潮周期还没有完全稳定。即考虑底部摩擦损失有利于稳定性。

#### 2. 科氏力对稳定性的影响

在其它参量不变的条件下,分别取地理纬度为  $-60^\circ$ 、 $-30^\circ$ 、 $0^\circ$ 、 $30^\circ$  和  $60^\circ$  计算科氏力参量,分析这 5 次计算结果得出:(1)科氏力参量对流速值以至流场状态影响很大,尤其是会造成某时刻湾内的流场的旋转趋势和局部地区水面倾斜方向的根本改变。(2)地理纬度等于零时,相当于不考虑科氏力的影响,将其与其它 4 次计算比较,发现考虑科氏力后渐近稳定速度降低。即考虑科氏力后不利于稳定性。

#### 3. 初始时刻水位对稳定性的影响

进行潮流数值计算时,要给定初始时刻的水位和流速值。一般习惯假设流速的初值均为零,水位可以选取一个全潮过程中某一时刻的水位值。试验共选用 5 个时刻的水位值作为初始水位。如图 3 所示,其中水位 1 是平均水位(零水位),水位 3 是最高水位,水位 5 是最低水

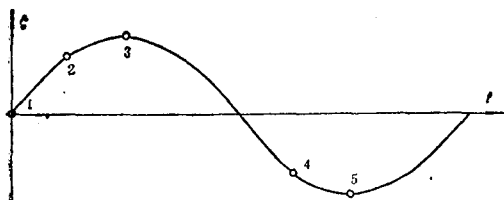


图 3 初始水位的选取

Fig. 3 Choice of initial water level

○ 为初始水位选取点

位。分析这 5 次计算结果得出:(1)不论初始水位选在哪一时刻,渐近稳定速度基本相同。所以初始水位可以选择任意时刻的水位。(2)不论初始水位如何选取,待几个周期后达到完全稳定时,一个全潮过程中的任一时刻的流场的计算值都与其一个周期前的对应时刻的流场的计算值相同。即计算的稳定性是对一个全潮的变化过程而言的。

#### 4. 时间步长和水深对稳定性的影响

参考文献 [1] 和 [2] 中都指出:

$$\beta \leq 2\alpha (\alpha = 1 \sim 3)$$

可作为稳定性的判别条件。

$$\beta = \frac{\Delta T}{\Delta S} \sqrt{gh_{\max}} \quad (4)$$

其中,  $\Delta T$  为时间步长;  $\Delta S$  为空间网格步长;  $h_{\max}$  为水域上最大水深;  $g$  为重力加速度。而 Leendertes<sup>[1]</sup> 虽然从理论上只证明了线性化后的差分方程是无条件稳定的。但仍认为从稳定性的角度来看,这种方法对时间步长没有上限要求;还指出  $\beta < 5$  时,计算结果具有较高的精度。

针对以上问题,这次作了 3 组数值试验。3 组试验的空间网格步长均为 450 m。第 1 组的水深来自大窑湾水深图,它的最大水深为 12.3 m。第 2 组的水深是第 1 组的水深乘以 0.7 得到的,它的最大水深为 8.61 m。第 3 组的水深为第 1 组的水深乘以 1.5 得到的,它的最大水深为 18.45 m。每组试验都在其它数据不变的情况下,分别取时间步长为 50s、100s、200s、400s、800s 和 1600s 进行计算。即每组有 6 次试验,每次试验的  $\beta$  值如表中表示。

试验的  $\beta$  值表

Tab. Values of  $\beta$  in experiments

组次	$\beta$	$\Delta T(s)$					
		50	100	200	400	800	1600
1	12.30	1.22	2.44	4.88	9.76	19.52	39.04
2	8.61	1.02	2.04	4.08	8.17	16.33	32.66
3	18.45	1.50	2.99	5.98	11.96	23.93	47.87

表中的  $\beta$  为 39.04、32.66 和 47.87 的 3 次试验, 经过一定的计算时间以后, 都能达到完全稳定。但是, 流场的计算结果误差很大。 $\beta$  为 1.22、1.02 和 1.50 的 3 次试验, 最后均出现不稳定现象。其中  $\beta$  为 1.02 时, 出现误差不断扩大以至溢出的现象,  $\beta$  为 1.22 和 1.50 时, 出现振荡不稳定现象。这 3 次试验计算到一定时间后都有一个基本稳定阶段, 由于继续计算才出现不稳定现象, 故认为造成不稳定的原因是计算中的截断误差或舍入误差的不断积累。以上结果证明, 稳定性对时间步长只有下限要求, 没有上限要求。

将同一水深条件(即同一试验组次)的 6 次试验相比较, 发现  $\beta$  为 4.88、4.08 和 5.98 的 3 次试验分别在本组的 6 次试验中以最短的计算时间达到完全稳定状态; 每组试验分别以这 3 次试验为转折点, 不论  $\beta$  值增大还是减小, 达到稳定所需时间都要增加。例如: 第 1 组试验中,  $\beta$  为 4.88 时渐近稳定速度最快, 随着  $\beta$  增加为 9.76、19.52、39.04, 或随着  $\beta$  减小为 2.44、1.22, 渐近稳定速度都越来越慢。如果将不同水深的 3 组试验的渐近稳定速度互相比, 发现第 2 组的渐近稳定速度普遍比第 1 组的快; 第 1 组的则普遍比第 3 组的快。例如: 第 2 组中  $\beta$  为 8.17 时的渐近稳定速度要比第 1 组中  $\beta$  为 4.88 时的和第 3 组中  $\beta$  为 5.98 时的渐近稳定速度快。据此可以说, 如果要用  $\beta$  判别渐近稳定速度, 则  $\beta$  的计算式中的水深也应是一个具有平均意义的水深, 而不是最大水深。虽然渐近稳定速度的快慢与最终能否达到完全稳定不能等同, 仍可说明  $\beta$  作为稳定性的判别条件是不太适用的。

#### 5. $\beta$ 与计算结果的精度的关系

计算精度的比较分析是在同一组试验中不同时间步长的试验之间进行的。从 3 组的计算

结果可以看出: 当时间步长逐渐减小时, 相邻两次试验的流速场的计算结果的截断误差越来越小。这表明计算精度在不断提高, 计算结果是收敛的。每组试验中, 时间步长为 100s 的那次试验的计算精度已经可以满足工程设计要求了。3 组试验中, 误差比较大的区域都是最大水深附近区域, 其它地方的流速值已基本吻合。注意到  $\beta$  的计算中采用了最大水深, 所以  $\beta$  用作精度估计是合理的。3 组试验表明: 精度分析应在  $\beta < 5$  的范围内进行。在稳定性能够保证的前提下,  $\beta$  越小精度越高。

## 四、讨 论

根据一系列的数值计算试验的分析结果, 使用 ADI 方法计算潮流时, 要保证计算的稳定性, 对时间步长没有上限要求, 但时间步长过小则会出现计算不稳定现象。由式(4)求得的  $\beta$  不太适于用作稳定性的判别参数, 却可以作为计算精度的判别参数。实际计算中, 在选定空间网格步长后, 应在  $\beta < 5$  的范围内选择一个能满足稳定性要求的最小的时间步长, 这时计算结果的精度最高。

本次试验中, 没有改变过空间网格步长, 今后可以进一步做有关补充试验。另外, 将这个定边界程序扩充为可以考虑沉船和潮汐滩地的动边界程序以后, 其稳定性、收敛性和计算精度的问题有待进一步研究。

## 参 考 文 献

- [1] 窦振兴、罗远途、黄克辛等, 1981。渤海潮流及潮余流的数值计算。海洋学报 3(3): 355—369。
- [2] 赵士清、张镜潮, 1981。连云港潮位的数值模拟。海洋学报 3(3): 500—515。
- [3] Leendertes, J. J., 1967. Aspects of a Computational Model for Long-Period Wave-Water Propagation. Memo. RM-5294-PR. The Rand Corp. pp. 1—160.

**STUDY ON ADI METHOD OF TIDAL NUMERICAL COMPUTATION**

Jiang Shaogang

*(Institute of the First Bureau of Navigation Engineering, Tianjin)***Abstract**

By means of numerical experiments, stability, convergence and accuracy of ADI method in the simulation process of the variation of tidal current field have been studied in this paper. A large number of computations have been made of effects of bottom roughness, coriolis force, initial water level, time step, and water depth on stability. Results indicated that  $\beta$  obtained from the equation  $\left(\beta = \frac{\Delta T}{\Delta S} \sqrt{gh_{\max}}\right)$  can be reasonable regarded as a parameter of accuracy, but not as a parameter of stability.