三参数 Weibull 分布的参数估计

方 国 清
(浙江电视大学，杭州)

收稿日期　1990 年 4 月 2 日
关键词　Weibull 分布，重现期，优选法，Taylor 展开

提要　对于三参数 Weibull 分布 $y=\exp\{-[(x-c)/b]^a\}$ (其中 y 为某一物理量 X 取值超过 x 的概率)，本文给出了两种由观测序列 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 确定参数 a, b 和 c 的方法。这两种方法分别按 $\Sigma[x_i-b(-\ln y_i)^{1/a}-c]^2=$ 最小和 $\Sigma[y_i-\exp\{-[(x_i-c)/b]^a\}]=$ 最小的原则来确定。第一种方法采用优选法和线性回归来计算参数值；第二种方法将函数 y 在参数的近似值附近展开为三元 Taylor 级数后用逐步订正法求解。文章还给出了计算青岛不同重现期极值高、低气温的应用实例。

在陆地水文及海洋工程中常常要求知道某一物理量(例如水位、浪高、风速、温度等)的极值分布。以往，以 Gumbel 分布和 Pearson-III 型分布用得较多[1]。近年来，Weibull 分布使用得越来越广泛[2]，Weibull 分布具有函数形式：

$$F(x;a,b,c)=\begin{cases}1-\exp\left[-\left(\dfrac{x-c}{b}\right)^a\right], & \text{当 } x>c\\ 0, & \text{当 } x\leqslant c\end{cases}\tag{1}$$

a, b, c 为三个参数，分别称为形状参数、尺度参数和位置参数，其中 $a>0, b>0$。

设 X 为连续型随机变量，X 取值小于 x 的概率是

$$P(X<x)=F(x;a,b,c),$$

我们把 X 取值大于 x 的概率(称为超过概率)记作 y：

$$P(X>x)=y=1-F(x;a,b,c)=R(x;a,b,c),$$

即

$$y=R(x;a,b,c)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{x-c}{b}\right)^a\right], & \text{当 } x>c\\ 1, & \text{当 } x\leqslant c\end{cases}\tag{2}$$

y 的倒数称为重现期：

$$T=1/y=\exp\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\tag{3}$$

(2)式可以写成反函数的形式：

$$x=b\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{a}}+c\tag{4}$$

如果对某一物理量在一定时间间隔(例如 1 a)内取出其最大值，设由观测得到这样的最大值共有 n 个，然后把它们从大到小排列，记为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。按照 Thomas 标绘法[3]，认为这些值所对应的 y 值分别为 $y_1 = 1/(n+1)$, $y_2 = 2/(n+2)$, $\cdots$, $y_n = n/(n+1)$。我们的问题是如何选择参数 a, b, c，使函数(2)或(4)与观测得到的数据序列 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 拟合得最好。当 a, b, c 的值确定以后，利用函数(2)或(4)外推可以进行预测。

由于函数(2)或(4)的非线性，确定参数有一定的困难。通常的做法是首先假定 c 的值已知(一般取 $c=0$)，然后对(2)式取两次对数，化成 $\ln(-\ln y)$ 和 $\ln(x-c)$ 之间的线性关系，用线性回归确定参数 a 和 b。本文将给出估计参数 a, b, c 的两个一般方法，这两个方法分别用函数(2)和(4)拟合实测序列。

在水文分析的"多年一遇"问题中，是给定概率 y，预测 x。这类问题中，使用的函数形式应是(4)式。按照最小二乘原则，要求选取 a, b, c，使

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - b\left(\ln\frac{1}{y_i}\right)^{\frac{1}{a}} - c \right]^2 = \min \tag{5}$$

在另一些问题中，则是给定 x，预测 y。即估计某物理量在一定时间间隔内出现的最大值大于 x 的概率。在这一类问题中，应采用函数(2)。按照最小二乘原则，要求选取 a, b, c，使

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - \exp\left[-\left(\frac{x_i - c}{b}\right)^a \right] \right\}^2 = \min \tag{6}$$

据(5)或(6)，由

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a} = \frac{\partial \Delta}{\partial b} = \frac{\partial \Delta}{\partial c} = 0$$

或

$$\frac{\partial \delta}{\partial a} = \frac{\partial \delta}{\partial b} = \frac{\partial \delta}{\partial c} = 0$$

可得一函数方程组。但直接由这些方程组来求解 a, b, c 是困难的，即使是作近似计算也很费事.这里将从另外的角度来求(5)或(6)的近似解，所得结果是令人满意的。

I. $\Delta=\min$ 的解法

引进

$$t = \left(\ln\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{a}}$$

则(4)式成为线性关系式：

$$x = bt + c \tag{7}$$

设取定某个 $a = a_0$ 以后，则

$$t_i = \left(\ln\frac{1}{y_i}\right)^{\frac{1}{a_0}} = \left(\ln\frac{n+1}{i}\right)^{\frac{1}{a_0}}, \quad i = 1, \cdots, n$$

记

$$\bar{t} = \Sigma t_i / n,$$
$$\bar{x} = \Sigma x_i / n,$$
$$l_{11} = \Sigma (t_i - \bar{t})^2,$$

$$l_{22}=\Sigma(x_i-\bar{x})^2,$$
$$l_{12}=\Sigma(t_i-\bar{t})(x_i-\bar{x}),$$
$$r=l_{12}/\sqrt{l_{11}l_{22}}$$

其中 r 是数组 $t_1,\cdots,t_n$ 与 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性相关系数。应注意到,l_{22} 是由原始观测数据 $x_1,\cdots,x_n$ 决定的一个常数,而 l_{11},l_{12},r 则与 a 有关。

取 $a=a_0$ 后,(5)式成为

$$\Delta=\Delta_0=\Sigma(x_i-bt_i-c)^2=\min \tag{8}$$

由 $\frac{\partial\Delta_0}{\partial b}=\frac{\partial\Delta_0}{\partial c}=0$，得正则方程组

$$\begin{cases}b\Sigma t_i^2+c\Sigma t_i=\Sigma t_ix_i\\ b\Sigma t_i+nc=\Sigma x_i\end{cases}$$

可以解出

$$\begin{cases}b=b_0=l_{12}/l_{11}\\ c=c_0=\bar{x}-b_0\bar{t}\end{cases} \tag{9}$$

在取定 $a=a_0$ 的条件下,将(9)式代入(7)式，可以得到最小的 Δ_0 是

$$\begin{aligned}&\Sigma(x_i-b_0t_i-c_0)^2\\ &=\Sigma(x_i-b_0t_i-\bar{x}+b_0\bar{t})^2\\ &=\Sigma[(x_i-\bar{x})-b_0(t_i-\bar{t})]^2\\ &=\Sigma(x_i-\bar{x})^2-2b_0\Sigma(x_i-\bar{x})(t_i-\bar{t})+b_0^2\Sigma(t_i-\bar{t})^2\\ &=l_{22}-2\cdot\frac{l_{12}}{l_{11}}\cdot l_{12}+\frac{l_{12}^2}{l_{11}^2}\cdot l_{11}\\ &=l_{22}-\frac{l_{12}^2}{l_{11}}=l_{22}\left(1-\frac{l_{12}^2}{l_{11}l_{22}}\right)\\ &=l_{22}(1-r^2)\end{aligned}$$

由于 l_{22} 是一个常数，若所取的 a_0 不同，r^2 将不同，最小的 Δ_0 也不同。为了使(5)式中的 Δ 达到最小,我们选取的 $a=a_0$ 应使

$$r^2=\max \tag{10}$$

(10)式的几何意义是,选取 $a=a_0$ 使得点列 $(t_1,x_1),\cdots,(t_n,x_n)$ 在 $t-x$ 平面上的位置尽量接近于某一条直线,从而使线性关系式(7)有可能与点列 $(t_1,x_1),\cdots,(t_n,x_n)$ 获得最好的拟合。

根据以上的讨论,我们的具体做法是：首先用 $r^2=\max$ 这个原则来决定 a，在做这一步时不会牵涉到 b 和 c，因为 r 只与 a 有关。当 a 决定以后,再由(9)式决定 b 和 c。

下面我们运用优选法,根据(10)式来选取 $a=a_0$，分两个步骤进行。

1.1. 确定 a_0 所在的区间 (p_0,q_0)

取 $a=1$ 及 $a=2$，计算 r^2 的值,分别为 r_1^2 及 r_2^2。若 $r_1^2\geqslant r_2^2$，则取 $p_0=0$，$q_0=2$，即 a_0 在区间(0,2)内。

若 $r_1^2<r_2^2$，再取 $a=3$，算得 $r^2=r_3^2$，若 $r_2^2\geqslant r_3^2$，则取 $p_0=1,q_0=3$，a_0 在区间(1,3)内。

若 $r_2^2<r_3^2$，再取 $a=4,\cdots$，等等，直至确定包含 a_0 的区间 (p_0,q_0) 为止,这样得到的区间

长度是 $q_0 - p_0 = 2$。

当然，也可以取 $a = 0.5, 1, 1.5, \cdots$，这样将会得到一个长度为 1 的包含 a_0 的区间，计算次数可能会多一些，但下面第二个步骤的计算量可以减少。不过，我们不提倡把 a 值的间隔取得更密，否则两个步骤的总计算量将要增加。

I.2. 用黄金分割法在 (p_0, q_0) 内寻找 a_0

在区间 (p_0, q_0) 内取两个点：

$$u_0 = p_0 + \lambda^2(q_0 - p_0) = p_0 + 2\lambda^2$$
$$v_0 = p_0 + \lambda(q_0 - p_0) = p_0 + 2\lambda$$

其中 $\lambda = (\sqrt{5} - 1)/2$。令 $a = u_0$ 及 v_0，算得 $r^2(u_0)$ 及 $r^2(v_0)$。

I.2.1. 若 $r^2(u_0) \geqslant r^2(v_0)$，去掉区间 $[v_0, q_0)$，令 $p_1 = p_0, q_1 = v_0$，并取 $u_1 = p_1 + q_1 - u_0$，$v_1 = u_0$。计算 $r^2(u_1)$，而 $r^2(v_1) = r^2(u_0)$。

I.2.2. 若 $r^2(u_0) < r^2(v_0)$，去掉区间 $(p_0, u_0]$，令 $p_1 = u_0, q_1 = q_0$，并取 $u_1 = v_0$，$v_1 = p_1 + q_1 - v_0$。这时 $r^2(u_1) = r^2(v_0)$，再计算 $r^2(v_1)$。

经过这样一次计算比较，包含 a_0 的区间由 (p_0, q_0) 缩短到 (p_1, q_1)，即缩短 λ 倍，将足标增加 1，重复上面的 1 和 2 中所述的过程，可得 p_2, q_2, u_2, v_2 及 $r^2(u_2), r^2(v_2)$，如此反复进行 m 次，得到 u_m, v_m 及 $r^2(u_m), r^2(v_m)$，最后取

$$a_0 = \begin{cases} u_m, & 若\ r^2(u_m) \geqslant r^2(v_m) \\ v_m, & 若\ r^2(u_m) < r^2(v_m) \end{cases} \tag{11}$$

因为 $q_0 - p_0 = 2$，所以 $q_m - p_m = \lambda^m(q_0 - p_0) = 2\lambda^m$，(11) 式取到的是 a_0 的近似值，它与满足(10)式的真值的绝对误差小于 $2\lambda^{m+1}$。所以，当 $m = 10$，误差可小于 0.01；当 $m = 15$，误差可小于 0.001；等等。

在上面的计算过程中，如果出现 $r^2_{\max} < 0.9$，应考虑到我们的观测数据 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ 用 Weibull 分布函数来拟合是否合适，这时可考虑用其他函数形式来拟合。这就是所谓 r 检验。我们的方法不但解决了参数的估计问题，还顺便对原始观测数据与 Weibull 分布函数的符合程度给予检验。$r^2_{\max} \geqslant 0.9$ 这个要求是较严的，根据实际情况，可以放宽要求。一般，观测数据个数 n 越大，对 $r^2_{\max}$ 的要求应越低，这方面的有关问题，我们不作深入的讨论。

II. $\delta = \min$ 的解法

通过本文第四部份的计算实例将会看到：分别根据(5)式和(6)式求得的参数是不同的，而且 $\varDelta$ 最小时 δ 不是最小，δ 最小时 $\varDelta$ 也不是最小。如果需要处理的问题是给定 x，预测 y，那末就需要去求得(6)式的解。

我们先取一组参数 a_0, b_0, c_0 作为初始值，再利用拟线性迭代法求(6)式的解 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$。这组初始值可以是(5)式的解，即利用本文第二部份的方法求得，也可以在 Weibull 概率纸上用作图法求得[4]。

将函数

$$y = R(x; a, b, c) = \exp\left[-\left(\frac{x - c}{b}\right)^a\right]$$

在点 (a_0, b_0, c_0) 用 Taylor 公式展开，取到一次项为止：

$$R(x;a,b,c) \approx R(x;a_0,b_0,c_0) + hR_a(x;a_0,b_0,c_0) + kR_b(x;a_0,b_0,c_0) + lR_c(x;a_0,b_0,c_0)。$$

这里 $a = a_0 + h, b = b_0 + k, c = c_0 + l$。$R_a, R_b, R_c$ 是 R 对 a,b,c 的一阶偏导数：

$$R_a = \ln\left(\frac{x-c}{b}\right)\cdot\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right]\cdot\exp\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right],$$

$$R_b = -\frac{a}{b}\cdot\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right]\cdot\exp\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right],$$

$$R_c = -\frac{a}{x-c}\cdot\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right]\cdot\exp\left[-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a\right]。$$

记

$$\begin{aligned} R_i &= R(x_i;a_0,b_0,c_0), \\ R_{ai} &= R_a(x_i;a_0,b_0,c_0), \\ R_{bi} &= R_b(x_i;a_0,b_0,c_0), \\ R_{ci} &= R_c(x_i;a_0,b_0,c_0) \quad i = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

将(6)式代之以

$$\delta' = \sum(y_i - R_i - hR_{ai} - kR_{bi} - lR_{ci})^2 = \min, \tag{12}$$

由 $\frac{\partial\delta'}{\partial h} = \frac{\partial\delta'}{\partial k} = \frac{\partial\delta'}{\partial l} = 0$，得正则方程组：

$$\begin{cases} h\sum R_{ai}^2 + k\sum R_{ai}R_{bi} + l\sum R_{ai}R_{ci} = \sum R_{ai}\varepsilon_i, \\ h\sum R_{bi}R_{ai} + k\sum_{bi}^2 + l\sum R_{bi}R_{ci} = \sum R_{bi}\varepsilon_i, \\ h\sum R_{ci}R_{ai} + k\sum R_{ci}R_{bi} + l\sum R_{ci}^2 = \sum R_{ci}\varepsilon_i。 \end{cases} \tag{13}$$

式中 ε_i 是残差：$\varepsilon_i = y_i - R_i$，$i = 1, \cdots, n$。

如果向量 $(R_{a1},\cdots,R_{an})^T$，$(R_{b1},\cdots,R_{bn})^T$，$(R_{c1},\cdots,R_{cn})^T$ 线性无关（这个条件通常总是满足），由方程组(13)可以求出唯一解：$h = h_1$，$k = k_1$，$l = l_1$。命

$$a_1 = a_0 + h_1,\ b_1 = b_0 + k_1,\ c_1 = c_0 + l_1$$

计算

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \sum[y_i - R(x_i;a_0,b_0,c_0)]^2 \\ \delta_1 &= \sum[y_i - R(x_i;a_1,b_1,c_1)]^2。 \end{aligned}$$

若 $\delta_1 < \delta_0$，再将函数 R 在点 (a_1,b_1,c_1) 展开，建立新的正则方程组，解得 $h = h_2$，$k = k_2$，$l = l_2$，从而得到 $a_2 = a_1 + h_2$，$b_2 = b_1 + k_2$，$c_2 = c_1 + l_2$。再计算

$$\delta_2 = \sum[y_i - R(x_i;a_2,b_2,c_2)]^2。$$

若 $\delta_2 < \delta_1$，继续进行迭代计算，直到 $\delta_{j+1} \geqslant \delta_j$，或者增量 $|h_{j+1}|$，$|k_{j+1}|$ 和 $|l_{j+1}|$ 都已足够小，则迭代结束，并取参数估计值为

$$\hat{a} = a_j,\ \hat{b} = b_j,\ \hat{c} = c_j。$$

如果 $|h_{j+1}|$，$|k_{j+1}|$ 和 $|l_{j+1}|$ 分别小于 $\frac{1}{2}\times 10^{-d_1}$，$\frac{1}{2}\times 10^{-d_2}$ 和 $\frac{1}{2}\times 10^{-d_3}$，则 $\hat{a},\hat{b}$ 和 $\hat{c}$ 的值分别准确到 10^{-d_1}，10^{-d_2} 和 10^{-d_3}。

由上面计算过程可知，初始值 c_0 及以后各次近似值 c_1，c_2，$\cdots$ 都必须小于所有的 x_i（即小于 x_n），否则会出现对负数求对数的运算，致使计算中断。如出现此情况，则表明所求的 $\hat{c}$ 可能是一个略小于 x_n 的数，因此我们可以先试取 $c_0^{(1)} = x_n - (x_1 - x_n)/(n-1)$；如仍出现计算中断，则

表明所取 $c_0^{(1)}$ 值过小，可代之以 $c_0^{(2)} = c_0^{(1)} + (x_1 - x_n)/[2(n-1)]$；如计算又中断，则再取略大一些的 $c_0^{(3)}$；等等，其中 $c_0^{(k+1)} = c_0^{(k)} + (x_1 - x_n)/[2k(n-1)]$。

III. 实例

作为实例，我们来计算青岛气温的极值分布。表 1 列出了青岛团岛自 1960 年至 1979 年20年的年最高和最低气温，表 2 为计算所得 Weibull 分布的参数，其中方法(1)是取 $c=0$ 的二参数 Weibull 分布；方法(2)为本文第二部分所述的方法；方法(3)为本文第三部分所述的方法。表 3 是高温极值分布自报值与观测值对比，自报值由(2)式和(4)式算出，根据表 3 中数据算得 Δ 和 δ

表 1 青岛年最高和最低气温（℃）

Tab. 1 Annual highest and lowest air temperatures at Qingdao (℃)

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
最高气温	31.8	34.4	32.6	32.7	32.4	32.8	31.3	32.2	34.2	31.2
最低气温	−8.9	−8.8	−8.8	−12.1	−10.3	−8.7	−11.4	−12.5	−10.7	−10.8
年份	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
最高气温	29.7	30.2	30.9	33.6	31.2	32.2	30.6	32.1	33.9	33.5
最低气温	−16.0	−10.3	−9.4	−9.4	−10.0	−7.4	−9.2	−11.2	−8.3	−8.1

表 2 高温极值分布的有关参数

Tab. 2 Parameters associated with the extreme value distribution of high temperatures

方法 \ 参数	a	b	c	Δ	δ
(1)	25.91	32.81	0	1.441	0.0400
(2)	3.69	5.37	27.33	0.361	0.0164
(3)	3.13	4.74	27.95	0.400	0.0157

表 3 高温极值分布自报值与观测值对比

Tab. 3 Comparison between the observed high temperatures and the temperatures predicted from the extreme value distribution

观测值 x	34.40	34.20	33.90	33.60	33.50	32.80	32.70
自报值 $\hat{x}$ 方法(1)	34.25	33.91	33.66	33.45	33.27	33.09	32.92
自报值 $\hat{x}$ 方法(2)	34.59	34.10	33.76	33.49	33.25	33.04	32.84
自报值 $\hat{x}$ 方法(3)	34.72	34.18	33.82	33.52	33.27	33.05	32.84
超过概率 y(%)	4.76	9.52	14.29	19.05	23.81	28.57	33.33
自报值 $\hat{y}$ (%) 方法(1)	3.31	5.34	9.71	15.69	18.00	37.10	39.99
自报值 $\hat{y}$ (%) 方法(2)	6.34	8.36	12.19	17.01	18.84	34.29	36.79
自报值 $\hat{y}$ (%) 方法(3)	7.26	9.29	13.04	17.68	19.42	34.15	36.55

（续前表）

观测值 x	32.60	32.40	32.20	32.20	32.10	31.80	31.30
自报值 $\hat{x}$ 方法(1)	32.76	32.60	32.43	32.26	32.08	31.89	31.68
自报值 $\hat{x}$ 方法(2)	32.65	32.46	32.28	32.10	31.92	31.73	31.53
自报值 $\hat{x}$ 方法(3)	32.64	32.45	32.26	32.08	31.89	31.70	31.50
超过概率 y(%)	38.10	42.86	47.62	52.38	57.14	61.90	66.67
自报值 $\hat{y}$(%) 方法(1)	42.88	48.58	54.07	54.07	56.70	64.10	74.45
自报值 $\hat{y}$(%) 方法(2)	39.34	44.54	49.80	49.80	52.42	60.16	70.03
自报值 $\hat{y}$(%) 方法(3)	38.99	44.01	49.13	49.13	51.70	59.36	71.36
观测值 x	31.20	31.20	30.09	30.60	30.20	29.70	
自报值 $\hat{x}$ 方法(1)	31.45	31.20	30.89	30.52	30.02	29.20	
自报值 $\hat{x}$ 方法(2)	31.33	31.10	30.85	30.57	30.21	29.70	
自报值 $\hat{x}$ 方法(3)	31.30	31.08	30.84	30.56	30.22	29.76	
超过概率 y(%)	71.43	76.19	80.95	85.71	90.48	95.24	
自报值 $\hat{y}$(%) 方法(1)	76.22	76.22	80.95	84.86	88.98	92.70	
自报值 $\hat{y}$(%) 方法(2)	74.19	74.19	80.12	85.18	90.57	95.23	
自报值 $\hat{y}$(%) 方法(3)	73.57	73.57	79.72	85.04	90.75	95.68	

表 4　高温极值预测

Tab. 4　Prediction of extreme high temperatures

重现期(年)	1 000	500	200	100	50	20	10
预测值 $\hat{x}$ 方法(1)	35.35	35.21	34.99	34.80	34.58	34.22	33.88
预测值 $\hat{x}$ 方法(2)	36.39	36.14	35.77	35.45	35.10	34.56	34.06
预测值 $\hat{x}$ 方法(3)	36.74	36.45	36.02	35.67	35.28	34.68	34.14

表 5　低温极值分布参数

Tab. 5　Parameters associated with the extreme value distribution of low temperatures

方法 \ 参数	a	b	c
(1)	5.70	10.92	0
(2)	0.97	2.26	−8.00
(3)	1.60	3.13	−7.28

示于表 2 中，用 Weibull 分布预测各重现期的最高气温如表4。从理论上讲，应是方法(2)预测的结果为最可靠。

从表 3 及表 4 可知，在要求不很高的情况下，可用 $\Delta = \min$ 的解作为 $\delta = \min$ 的解。

用 Weibull 分布拟合极小值时，函数形式应写作

$$y = \begin{cases} \exp\left[-\left(\dfrac{c-x}{b}\right)^a\right], & \text{当 } x < c \\ 1, & \text{当 } x \geqslant c \end{cases} \tag{2'}$$

(2′)式是由(2)式将 x 和 c 换成 $-x$ 和 $-c$ 得到，这时观测数据 $x_1, \cdots, x_n$ 由小到大排列，对应的 $y_i = i/(n+1)$，$i = 1, \cdots, n$。y 的意义是

$$y = P(X < x)$$

对表 1 中青岛年最低气温用 Weibull 分布拟合，得到参数见表 5。注意，这个例子中方法(2)所得的 c 值比最高的观测值 (−7.4) 来得小。故用这个 c 值作为方法(3) c 值的第一次近似，计算会中断；用前面所述的 $c_0^{(1)}$ 作第一次近似也会出现计算中断现象。本实例中实际上是用 $c_0^{(2)}$ 作第一次近似，计算得以顺利进行。最后所得 c 值等于 −7.28，略高于最高的年最低气温。为了节省篇幅，关于低温极值分布的其他结果这里从略。

参考文献

[1] 陈敦隆，1982。海洋科学研究中的概率统计方法。海洋出版社，299—333。

[2] 杨景飞、杜栄华，1986。Weibull 分布在水位和海流资料中的应用。第一届潮汐与海平面学术讨论会论文集，81—88。

[3] 石原健二，1985。论气象极值的重现期(陆家矶、陈上及译)。海洋译丛6: 7—20。

[4] 刘璋温、戴树森、方开泰，1980。概率低浅说。科学出版社，第三章。

PARAMETER ESTIMATION OF THE WEIBULL DISTRIBUTION WITH THREE PARAMETERS

Fang Guoqing

(Zhejiang TV University, Hangzhou)

Received: Apri. 2, 1990

Key Words: Weibull distribution, Return period, Optimum seeking method, Taylor expansion

Abstract

In order to estimate the parameters of the Weibull distribution of the form $Y = \exp\{-[(x-c)/b]^a\}$ with Y representing the probability that a physical quantity X assumes a value exceeding x, two approaches are proposed for determining the parameters a, b and c from the observed sequences $\{x_i\}$ and $\{y_i\}$ The first approach is based on the requirement to minimize the sum $\sum[x_i - b(-\ln Y_i)^{1/a} - c]^2$ and employs the oprimum seeking method and the linear regression method. The second approach requires $\sum[Y_i - \exp\{-[(x_i - c)/b]^a\}]^2$ to be minimum. The function Y is expressed in the form of Taylor's expansion around the approximate values of the parameters and a succesive correction method is used to calculate the parameters. A practical application to estimating the extreme high and low temperatures corresponding to various return periods at Qingdao is given in the present paper.