

Voigt 粘弹性流体上的线性重力波*

赵子丹 张庆河

(天津大学 300072)

摘要 研究了半无限不可压缩 Voigt 粘弹性体表面的线性重力波;通过引进无量纲粘弹性参数 Θ 、无量纲波数与无量纲表面张力解定解问题,导出了无量纲色散关系。由数值解给出了 Θ 的两个临界值 $\Theta_A=0.607$ 、 $\Theta_B=2.380$,并讨论了 Θ 对于色散关系的影响。

关键词 Voigt 粘弹体,线性重力波,色散关系

关于牛顿流体的表面重力波,线性理论已经比较完善,非线性理论还在进一步发展。而对于非牛顿流体,重力波理论的研究还很少见。Tchen^[1]曾考虑了重力对于两层半无限粘弹介质间界面波的影响,Nguyen 和 Yoo^[2]研究了振荡壁引起的非牛顿流体交界面重力波。Saasen 和 Tyvand^[3]首次推导了 Maxwell 粘弹性体线性表面重力的色散关系。在研究软泥床上的水波传播规律时,Hsiao 和 Shemdin^[4]、Macpherson^[5]均把底部泥床介质作为 Voigt 粘弹性体,上层水体作为理想流体,讨论了波浪衰减及界面波特性的。但纯 Voigt 粘弹流体表面线性重力波的色散关系尚未见讨论。为了更好地理解粘弹性软泥床上水波的衰减机理以及水波诱导的底部粘弹性介质的波动特性,有必要对 Voigt 粘弹性流体表面的重力波加以研究,探讨弹性、粘性对于重力波性质的影响。基于以上原因,本文研究了不可压缩 Voigt 粘弹体上的线性重力波。

1 基本方程

1.1 控制方程

Voigt 粘弹体的一维本构关系为:

$$\tau = G_e + \mu \dot{e} \quad (1)$$

其中, τ 为剪应力, G 为剪切弹性模量, μ 为动力粘度, e 为剪应变, \dot{e} 为剪应变率。对于不可压缩 Voigt 粘弹性介质中的小扰动,取坐标原点位于介质表面,其线性化运动方程可表示为^[4]:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + v \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \bar{x} + \frac{G}{\rho} \nabla^2 \bar{x} - \bar{f} \quad (2)$$

其中 \bar{x} 为质点位移, P 是总压力, $v = \frac{\mu}{\rho}$, ρ 为介质密度, \bar{f} 是重力加速度项。设 \bar{v} 为速度,可有 $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial t^2} =$

* 国家自然科学基金资助课题,基金编号:59079398 和 59379393。

收稿日期 1993 年 5 月 21 日

$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ 。假设运动随时间周期性变化,即 \vec{x}, \vec{V} 随时间因子 $\exp(-i\sigma t)$ 而变化 (σ 为周期性运动的角频率),则 $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \vec{x})$ 与 $\nabla^2 \vec{x}$ 可分别由 $\nabla^2 \vec{V}$ 与 $V^2 \vec{V}(-i\sigma)$ 代替。由此得到线性二维运动方程为:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v_e V^2 \mu \quad (3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} + v_e \nabla^2 v \quad (3b)$$

上式中, p 为动压力, $p = P + \rho g y$; 复粘性系数 v_e 是介质粘弹性特征的度量,由下式表示:

$$v_e = v + \frac{iG}{\rho\sigma} \quad (4)$$

另外,介质的运动满足连续性方程:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

1.2 边界条件

考虑表面波动的线性化边界条件,对于无限深介质,应有:

$$y \rightarrow -\infty \text{ 时, } u = v = 0$$

在自由表面 $y = \eta$ 上,运动条件为:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v \quad (7)$$

动力条件为:

$$\rho v_e \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (8)$$

$$P + 2\rho v_e \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{T}{R} \quad (9)$$

其中 T 为表面张力, R 为曲率半径。

2 色散方程的推导

为了解边界条件为式(6)~(9)的方程(3)和(5),引进势函数 φ 与流函数 ψ :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10)$$

设波动解的一般形式为:

$$\varphi = A e^{m y} e^{i k(x - ct)}, \psi = B e^{m y} e^{i k(x - ct)} \quad (11)$$

式(11)中 k 为波数, c 为相速度, k, c 与 σ 的关系为 $\sigma = kc$, m 为空间衰减因子, A, B 为系数。

由(10)(11)式得到的速度具有复形式,含有衰减率为 $-\text{Im}(c) \times k$ 的衰减因子 $e^{-k \text{Im}(c)t}$ 。从(3a), (3b)中消去 p 并将(10), (11), (5)代入可得:

$$m^2 = k^2 - \frac{i k c}{v_e} \quad (12)$$

由于 $y \rightarrow \infty$ 时 $u = v = 0$, m 的实部必须取正值。

另外,动压力 p 可只由势函数 φ 决定:

$$p = P - \rho g y = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho g y \quad (13)$$

把(13)式代入边界条件(9)并取线性表达式,有:

$$-\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho g \eta + 2\rho v_e \frac{\partial v}{\partial y} = -T \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, y = 0 \quad (14)$$

由(7)和(14)得:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + g\eta - 2v_e \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, y = 0 \quad (15)$$

由(8)式有:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, y = 0 \quad (16)$$

将(10),(11)代入(15),(16),有:

$$2ik^2 A - (m^2 + k^2)B = 0 \quad (17)$$

$$(-c^2 k^2 + gk - 2icv_e k^3 + \frac{Tk^3}{\rho})A + (igk + 2v_e cmk^2 + \frac{iTk^3}{\rho})B = 0 \quad (18)$$

欲使(17),(18)两式有非零解,必须有:

$$\left| \frac{2ik^2}{(-c^2 k^2 + gk - 2icv_e k^3 + \frac{Tk^3}{\rho})} \frac{-(m^2 + k^2)}{(igk + 2v_e cmk^2 + \frac{iTk^3}{\rho})} \right| = 0 \quad (19)$$

定义无量纲相速度 \hat{c} 与无量纲波数 \hat{k} :

$$c = \left[g \frac{\mu}{\rho} \right]^{\frac{1}{3}} \hat{c}, \quad k = \left[g \frac{\rho^2}{\mu^2} \right]^{\frac{1}{3}} \hat{k} \quad (20)$$

其他无量纲量:

$$v_e = 1 + \frac{i\Theta}{kc}, m^2 = k^2 - \frac{ik^2 c^2}{i\Theta + kc} \quad (21)$$

上式中 $v_e = \frac{\mu}{\rho} v_e, m^2 = \left[g \frac{\rho^2}{\mu^2} \right]^{\frac{2}{3}} m^2$ 。式(21)中出现的无量纲数 Θ 是表征材料粘弹特性的参数, $\Theta =$

$\left[\frac{G^3}{g^2 \mu^2 \rho} \right]^{\frac{1}{3}}$ 。无量纲张力 S 可定义为 $S = M^{-1/3}$, 其中 $M = \frac{g\mu^4}{\rho T^3}$ 为 Morton 数[3]。

把(19)式无量纲化,并经一系列运算可得:

$$A_m m = A_0 + A_1 c + A_2 c^2 + A_3 c^3 + A_4 c^4 \quad (22)$$

式中各系数为:

$$A_0 = 4i\Theta^2 k, \quad A_1 = 8\Theta k^2 A_2 = -i(4k^3 + 4\Theta k + 1 + Sk^2)$$

$$A_3 = -4k^2, \quad A_4 = ik, \quad A_m = -4i(kc + i\Theta)^2$$

从(21),(22)两式中消去 m ,就得到以下的色散方程:

$$B_0 + B_1 c + B_2 c^2 + B_3 c^3 + B^4 c^4 + B_5 c^5 + B_6 c^6 = 0 \quad (23)$$

(23)式中的系数为:

$$B_0 = 8\Theta^2 k(1 + Sk^2) + 16\Theta^3 k^2$$

$$B_1 = -16i\Theta k^2(1 + Sk^2) - 48i\Theta^2 k^3$$

$$B_2 = -(1 + 8k^3 + 2Sk^2 + S^2 k^4 + 8Sk^5) - 8\Theta k(1 + 6k^3) - 24\Theta^2 k^2$$

$$B_3 = 8ik^2(1 + 2k^3 + Sk^2) + 48i\theta k^3$$

$$B_4 = 2k(1 + 12k^3 + Sk^2) + 8\theta k^2$$

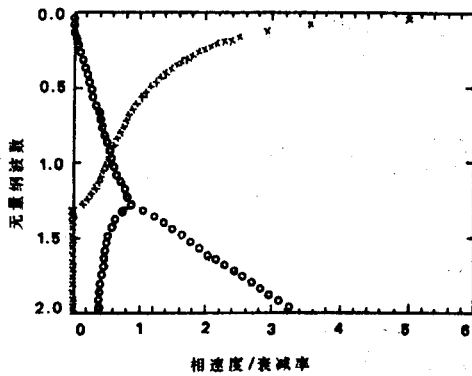


图1 牛顿流体的色散关系($\theta = 0, S = 0$)
Dispersion relation for Newtonian fluid ($\theta = 0, S = 0$)
* 无量纲相速度; O 衰减率

$$B_5 = -8ik^3, \quad B_6 = -k^2$$

上述方程是关于 c 的六次多项式, c 有 6 个根, 但由于速度应当具有衰减形式的解, 解方程 (23) 时, 应取所有满足以下条件的根:

$$\text{Re}(m) > 0, \quad \text{Im}(c) < 0 \quad (24)$$

若只考虑沿一个方向传播的波, 只取 c 的实部非负的解, 还应有 $\text{Re}(c) \geq 0$ 的限制。

3 结果和讨论

随着 θ 的增大, 传播波解只在小波数时表现出较强的色散性。相速度虽然连续, 但其导数出现不连续点, 极限情形见图 2c, 图中, 从分枝点到波数为 0.95 的区域内, 相速度曲线变得越来越垂直。在此区域内, 弹性作用的增强使得传播波越来越非色散, $k > 0.95$ 附近的解近于波数恒定的波。波数小于 0.95 区域, 粘性与重力占主导地位, 波动仍为强色散的。

随着 θ 的增大, 传播波解只在小波数时表现出较强的色散性。相速度虽然连续, 但其导数出现不连续点, 极限情形见图 2c, 图中, 从分枝点到波数为 0.95 的区域内, 相速度曲线变得越来越垂直。在此区域内, 弹性作用的增强使得传播波越来越非色散, $k > 0.95$ 附近的解近于波数恒定的波。波数小于 0.95 区域, 粘性与重力占主导地位, 波动仍为强色散的。

当 $\theta > \theta_c$ 时, 如图 2d ($\theta = 0.8$) 所示, 解出现了截断区域。在此区域内, 扰动不能够以 $\exp[ik(x - ct)]$ 的形式传播。在截断之上仍存在分枝点, 分枝点之上是蠕变与粘性型纯衰减解, 之下是具有弱色散性的波动解。在截断域之下的小波数域内, 解仍具有强色散性。

若 θ 进一步增大, 截断域两端截断点的波数逐渐减小, 截断区域不断下移, 强色散波动解域缩

利用数值方法求解式(23)的根, 计算了当表面张力 $S=0$, θ 取不同值时, 色散关系的变化情形。图 1~2 显示了计算结果。

无量纲参数 θ 的变化反映了介质流变特性的变化, θ 增大表明介质的弹性增强。当 $\theta=0$ 时, 剪切模量 $G=0$, Voigt 粘弹性体退化为纯粘性流体, 色散方程的解与 Chandrasekhar^[6] 得到的牛顿流体色散方程的解相同(图 1)。当波数小于 1.981 时, 解为衰减率随波数单调增加的传播波解。在波数等于 1.981 处, 存在分枝点。波数大于 1.981 时, 存在两个非传播型解。即衰减率随波数增大而减小的蠕变型解与衰减率随波数增大也迅速增大的粘性型解。粘性型运动更多地受惯性影响而蠕变型运动则几乎与惯性无关。蠕变型运动的动势能不相等, 其携带的动能相对较小, 粘性型运动则具有俘获任意初始扰动中所含动能的较大能力, 因此, 粘性型运动较快地耗散动能, 而余下的动能可以由蠕变型运动较慢消耗^[3]。

根据 Saasen^[3] 的结果, Maxwell 粘弹性流体色散关系中一般要出现第二分枝点。与 Maxwell 流体不同, 随着流体出现弹性, Voigt 流体的色散关系中并不出现第二分枝点。图 2a, b

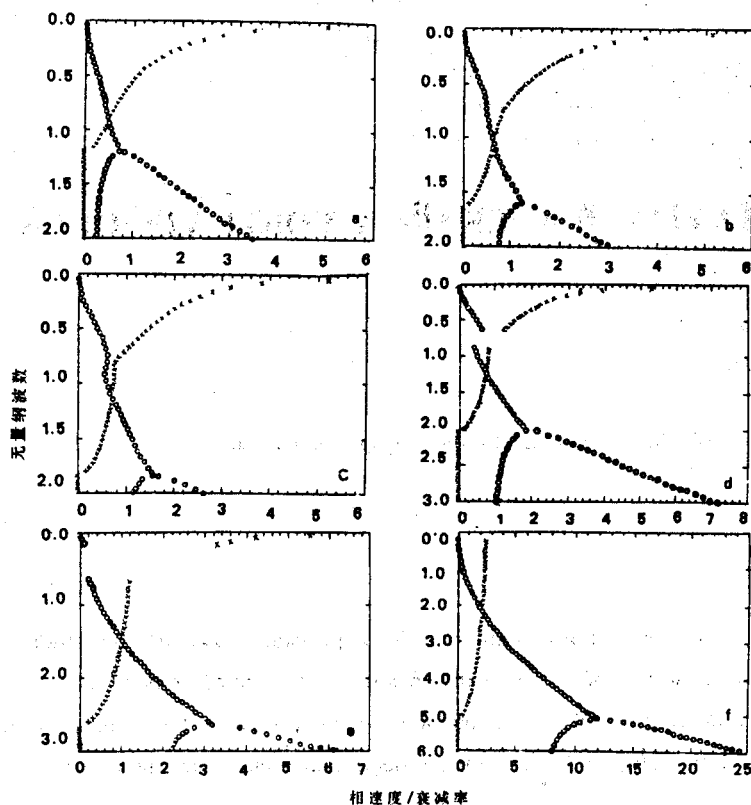


图2 Voigt流体的色散关系

Fig. 2 Dispersion relation for Voigt fluid

* 无量纲相速度; ○ 衰减率

a. $\theta=0.1, S=0$; b. $\theta=0.4, S=0$; c. $\theta=\theta_A=0.607, S=0$; d. $\theta=0.8, S=0$; e. $\theta=1.5, S=0$; f. $\theta=6.0, S=0$;

小,比较图 2d 和图 2e 可知。当 $\theta_b=2.380$ 时,下截断点从波数为 0 时开始,强色散解域消失。此后,截断区域随 θ 增大而不断减小,相速度在小波数时逐渐收敛于一常值,波动解趋向于衰减率为 0 的 Rayleigh 波(见图 2f)。当 θ 很大时,粘性与重力影响很小,波动解仅在分枝点附近的域内有一定的色散性。

4 结语

对于 Voigt 体,在小弹性时,弹性对色散关系的影响不如 Maxwell 体明显,Maxwell 体中弹性的出现使得解至少总是有一纯衰减型解。而 Voigt 体在 $\theta < \theta_A$ 时,其色散关系与纯粘性流体类似,弹性作用只是使传播波解域扩大。当 $\theta_A < \theta < \theta_b$ 时,传播波解存在截断域,相速度出现有限的跳跃。在截断域之下,解为强色散的;在截断域与分枝点之间,解则具有弱色散性。当 $\theta > \theta_b$ 时,强色散解域全部消失。 θ 很大时,整个波动域趋向于非色散非衰减的 Rayleigh 波。

参考文献

[1] Tchen, C., 1956. *J. App. Phys.* 27, 431-434.

1994 年第 5 期

- [2] Nguyen, K. and Yoo, J. Y. ,1985. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 17; 289-311.
- [3] Saasen, A. and Tyvand, P. A. , 1990. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 34;207-219.
- [4] Hsiao, S. V. and Shemdin, O. H. , 1980. *J. Phys. Oceanogr.* 10,605-610.
- [5] Macpherson, H. , 1980. *J. Fluid Mech.* , 97, Part 4, 721-742.
- [6] Chandrasekhar, S. , 1955. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 51;162-178.

LINEAR GRAVITY WAVES ON A VOIGT VISCOELASTIC FLUID

Zhao Zidan and Zhang Qinghe

(*Tianjia University 300072*)

Received: May. 21, 1993

Key Words: Voigt viscoelastic fluid, Linear gravity wave, Dispersion relation

Abstract

Linear surface gravity waves on a semi-finite incompressible Voigt fluid are studied in this paper. With a dimensionless viscoelastic number θ and a dimensionless wave number being introduced, a dimensionless dispersion equation is derived by solving the boundary-value problem. Two critical values of θ are found, $\theta_1 = 0.607$ and $\theta_2 = 2.380$. The effects of θ on the dispersion relation are discussed.