地球流体中有限振幅波解的一般形式*

杨联贵　　谢　强　　侯一筠　　程明华

(中国科学院海洋研究所 青岛 266071)

提要　　从地球流体中非线性波动所满足的方程经行波变换所得的平面自治动力系统出发, 利用微分方程几何理论, 揭示了地球流体中几种非线性波动均具有周期解, 而不存在孤波解的普遍性质。采用在平面自治系统的平衡点附近作 Taylor 展开方法, 论证了分式简谐函数是有限振幅波解的一般形式的结论。

关键词　　地球流体, 有限振幅波, 分式简谐函数

*　长期以来, 对有限振幅波的研究一直是人们感兴趣的课题之一。这方面, 刘式达[3]利用 KdV 理论在有限振幅波的研究中作了一些有益的工作, 侯一筠[1,2]分别给出了有限振幅深水重力波, 有限振幅惯性波的分式简谐函数形式的解析解。本文利用相图分析方法于地球流体中非线性波动所满足的方程经行波变换所得的平面自治系统, 得到了几种非线性波解具有周期性和不存在孤波解的一般结论, 并对平面自治系统在平稳点处展开所得的二次自治系统直接求解, 得到了有限振幅波动具有简洁的分式简谐函数形式的解析解这一普遍规律。

1　非线性波动的控制方程及解的性质

仍采用文献[3]的符号。设 $u(x', y', z', t)$ 是描述地球流体中非线性波动的物理量, 将其设成行波形式, 即

$$u = U(\xi) \quad \xi = kx' + ly' + nz' - vt \tag{1}$$

其中 t 是时间, x', y', z' 是空间坐标, v 是圆频率, k, l, n 分别是 x', y', z' 方向上的波数。

这样, 将控制地球流体中非线性波动的偏微分方程组都化成了下列平面自治系统

$$\dot{x} = F(x, y)$$

$$\dot{y} = G(x, y) \tag{2}$$

其中 x, y 是两个物理量, F 和 G 是 x, y 的非线性函数, x, y 分别表示 x, y 对 ξ 的微商。

F, G 取不同的形式, 对应于地球流体中的不同波动, 其中[3],

惯性波:

$$\left|\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{f}{kx - v}x \\ F(x, y) &= -\frac{f}{kx - v}x \end{aligned}\right. \tag{3}$$

重力内波:

$$\left|\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{kng}{(k^2 + n^2)(kx - v)}y \\ G(x, y) &= -\frac{fN^2}{gn(kx - v)}x \end{aligned}\right. \tag{4}$$

惯性重力内波:

$$\left|\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{f^2n^2 + k^2\sigma}{n^2 f(kx - v)}y \\ G(x, y) &= -\frac{f}{kx - v}x \end{aligned}\right. \tag{5}$$

这里, f 是 Coriolis 参数, g 是重力加速

*　国家自然科学基金资助项目 49471276 号。
收稿日期: 1996 年 6 月 20 日

度, N^2 和 σ 是静力稳定度参数。

易见, 以上系统均只有(0, 0) 一个平衡点, 而且在平衡点处的导算子矩阵的特征值均为纯虚数。又 $F(x, -y) = -F(x, y)$, $G(x, -y) = G(x, y)$, 所以轨线关于 x 轴对称[4]。根据中心与焦点判定定理[5]可知, (0, 0) 是非线性系统的中心型平衡点, 说明非线性系统的相图是绕平衡点的闭轨线, 即非线性波具有周期解。又因为(0, 0) 是系统的唯一平衡点, 属于中心型的, 没有其他鞍点, 同时也就无同宿和异宿轨道, 故非线性系统不可能存在孤波解。文献[3]中出现孤波解, 是因为作 Taylor 展开后的二次系统与原非线性系统在远离(0, 0) 不等价所致。

2　有限振幅波解的一般形式

对于惯性波, 侯一筠在文献[2]中已作过讨论, 并求得了分式简谐函数形式的有限振幅惯性波的解析解。下面只对重力内波和惯性重力内波求有限振幅波的解析解。

为此, 将(4) 在平衡点(0, 0) 作 Taylor 展开到二阶:

$$\begin{cases} x = F(x, y) = \dfrac{kng}{v(k^2+n^2)}y - \dfrac{k^2ng}{v^2(k^2+n^2)}xy \\ y = G(x, y) = \dfrac{kN^2}{vgn}x + \dfrac{k^2N^2}{v^2gn}x^2 \end{cases} \tag{6}$$

(5) 的首次积分为:

$$\frac{(k^2+n^2)N^2}{g^2n^2}x^2 + y^2 = U_0^2 \tag{7}$$

这里, U_0 是积分常数。

令,

$$\begin{cases} x = \dfrac{gn}{N\sqrt{k^2+n^2}}U_0\cos X(\xi) \\ y = U_0\sin X(\xi) \end{cases} \tag{8}$$

将(7) 代入(5) 式其中之一得:

$$X(\xi) = \frac{kN}{v\sqrt{k^2+n^2}}\left(1 + \frac{kngU_0}{vN\sqrt{k^2+n^2}}\cos X\right)$$

即,

$$\frac{dx}{1 + \dfrac{kngU_0}{vN\sqrt{k^2+n^2}}\cos X} = \frac{kN}{v\sqrt{k^2+n^2}}d\xi \tag{9}$$

对(9) 式积分且取积分常数为零(假设初位相为零):

$$\frac{2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{kngU_0}{vN\sqrt{k^2+n^2}}\right)^2}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{kngU_0}{vN\sqrt{k^2+n^2}}\right)^2}\,\mathrm{tg}\dfrac{X}{2}}{1+\dfrac{kngU_0}{vN\sqrt{k^2+n^2}}} = \frac{kN}{v\sqrt{k^2+n^2}}\xi$$

即,
$$\operatorname{tg}\frac{X}{2} = \sqrt{\frac{1 + \dfrac{kngU_0}{vN\sqrt{k^2+n^2}}}{1 - \dfrac{kngU_0}{vN\sqrt{k^2+n^2}}}}\operatorname{tg}\frac{kN\sqrt{1-\left(\dfrac{kngU_0}{vN\sqrt{k^2+n^2}}\right)^2}}{2v\sqrt{k^2+n^2}}\xi \tag{10}$$

因
$$x = \frac{gnU_0}{N\sqrt{k^2+n^2}}\cos X = \frac{gnU_0}{N\sqrt{k^2+n^2}}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{X}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{X}{2}} \tag{11}$$

$$y = U_0\sin X = U_0\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{X}{2}}{1+\operatorname{tg}\dfrac{X}{2}} \tag{12}$$

所以将(10)代入(11),(12)即得(5)的解析解:

$$\begin{cases} x = \dfrac{gnU_0}{N\sqrt{k^2+x^2}}\cdot\dfrac{-\mu+\cos\theta}{1-\mu\cos\theta} \\ y = U_0\dfrac{\sqrt{1-\mu^2}\sin\theta}{1-\mu\cos\theta} \end{cases} \tag{13}$$

其中, $\mu = \dfrac{kngU_0}{vN\sqrt{k^2+n^2}}$, $\theta = \dfrac{kN\sqrt{1-\left(\dfrac{kngU_0}{vN\sqrt{k^2+n^2}}\right)^2}}{v\sqrt{k^2+n^2}}\xi$

由此可见,有限振幅重力内波的解的形式是分式简谐函数,和文献[2]中的形式一样。用同样的办法可求得有限振幅惯性重力内波的解析解,其形式也是分式简谐函数,这里不再赘述。

3 结语

采用微分方程几何理论与动力学相结合的方法为研究地球流体中的非线性波动的定性性质提供了一个重要途径。通过研究发现,不仅有限振幅重力波、有限振幅惯性波具有相当简洁的分式简谐函数形式的解析解,而且有限振幅重力内波、有限振幅惯性重力内波同样有此性质,这可用来研究质点运动轨迹、质量输送及能量形式等一系列特定问题。

参考文献

[1] 侯一筠,1994。中国科学 5:547~555。

[2] 侯一筠,1995。海洋学报 1:6~12。

[3] 刘式达、刘式适,1986。科学通报 7:528~531。

[4] 张锦炎,1981。常微分方程几何理论与分支问题。北京大学出版社,31~38。

[5] 秦元勋,1959。微分方程所定义的积分曲线。科学出版社,106~113。

THE GENERAL FORM OF FINITE AMPLITUDE WAVES IN GEOPHYSICAL FLUID

Yang Liangui, Xie Qiang, Hou Yijun and Cheng Minghua
(*Institute of Oceanology, Chinese Academy of Sciences, Qingdao* 266071)

Received: June. 20, 1996
Key Words: Geophysical fluid, Finite amplitude, Fractional harmonic function

Abstract

In this paper, we begin with the equations which govern nonlinear waves in geophysical fluid, and find by using the theory of differential equation that several nonlinear waves are of periodic solutions, not soliton solutions, and that fractional harmonic function is the general form of finite amplitude waves by using of Taylor expansion.