

# 流场散度的误差估计

麻 娜

(华北电力大学 数理系, 北京 102206)

**摘要:**按照误差传递原理, 推导出流场散度的误差估计式, 并将其应用于赤道中东太平洋上升流区域水平散度误差的估计。应用结果表明: 赤道中东太平洋上升流区多年平均流场的散度稳定, 平均散度约为  $3.0 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ ; 和通常采用的误差估计公式相比, 该估计公式降低了散度误差, 从而提高了散度的可信度。

**关键词:** 散度; 误差; 上升流

中图分类号: O241.1; P731.27 文献标识码: A 文章编号: 1000-3096(2006)08-0012-04

散度常被作为诊断量, 用以研究大气、海洋中的辐合辐散现象(例如, McNoldy 等<sup>[1]</sup>)。通常认为, 由实测风速、流速计算所得的散度误差较大, 其可信度较差。为提高所得散度的可信度, 一般要对散度进行订正<sup>[2]</sup>。但散度本身是个小量, 其可信度更为重要, 因此对散度的误差估计是不可或缺的。很多对辐合辐散的研究都未涉及“散度的误差及其可信度”这一问题。作者将按照误差传递的原理, 推导出由实测风速、流速计算散度过程中散度的误差估计式, 并将其应用于赤道中东太平洋上升流区域辐散误差估计。

## 1 散度的误差估计

### 1.1 误差传递原理<sup>[3]</sup>

设指标  $W$  是由很多基本因素  $X_1, X_2, \dots, X_k$  决定的, 记作  $W = g(X_1, X_2, \dots, X_k)$ 。为了方便起见, 不妨设  $(X_1, X_2, \dots, X_k)$  服从  $k$  维正态分布, 且  $X_i \sim N(X_{i0} + \mu_{X_i}, \sigma_{X_i}^2)$ , 其中  $X_{i0}$  是  $X_i$  的标称值,  $\mu_{X_i}$  是  $X_i$  的系统误差或准确度,  $\sigma_{X_i}$  的  $X_i$  偶然误差或精确度 ( $i = 1, 2, \dots, k$ )。

以  $(X_{10}, X_{20}, \dots, X_{k0})$  为中心, 把  $W$  展成 Taylor 级数, 忽略二次以上的项, 可得线性化方程:

$$W \approx W_0 + \sum_{i=1}^k a_i Y_i \quad (1)$$

其中  $W_0 = g(X_{10}, X_{20}, \dots, X_{k0})$  是  $W$  的标称值,  $a_i = \left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{(X_{10}, X_{20}, \dots, X_{k0})}$ ,  $Y_i = X_i - X_{i0}$ , 且由  $X_i \sim N(X_{i0} + \mu_{X_i}, \sigma_{X_i}^2)$  可知  $Y_i \sim N(\mu_{X_i}, \sigma_{X_i}^2)$ 。

由概率论中多维正态分布的性质可知, 上面  $X_1, X_2, \dots, X_k$  的任意线性组合服从一维正态分布, 从而可记为  $W \sim N(W_0 + \mu_W, \sigma_W^2)$ 。

令  $U = W - W_0$ , 一方面由  $W \sim N(W_0 + \mu_W, \sigma_W^2)$  可知  $U \sim N(\mu_W, \sigma_W^2)$ ; 另一方面由 (1) 式可知

$U \approx \sum_{i=1}^k a_i Y_i$ , 又  $Y_i \sim N(\mu_{X_i}, \sigma_{X_i}^2)$ , 从而可得

$$\mu_W = \sum_{i=1}^k a_i \mu_{X_i} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_W^2 &= \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j \rho_{X_i X_j} \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_{X_i}^2 + 2 \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\rho_{X_i X_j}$  是  $X_i, X_j$  的相关系数,  $\text{Cov}(X_i, X_j)$  是  $X_i, X_j$  的协方差。显然当诸  $X_i$  间互不相关, 即  $\rho_{X_i X_j} = 0$  时, 有

$$\sigma_W^2 = \sum_{i=1}^k a_i^2 \sigma_{X_i}^2 \quad (4)$$

公式 (3), (4) 为误差传递公式, 误差估计通常使用此式。

### 1.2 散度误差

在图 1 所示的经纬度网格中, 散度  $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  的计算公式为:

$$D = \frac{u_1 - u_3}{L_x} + \frac{v_2 - v_4}{L_y} \quad (5)$$

其中,  $u_1, u_3$  是纬向速度;  $v_2, v_4$  是经向速度;  $L_x, L_y$  分别是纬向和经向上的网格差分格距。

收稿日期: 2005-03-06; 修回日期: 2006-03-10

基金项目: 国家重点基金资助项目(90411013)

作者简介: 麻娜(1975), 女, 山东烟台人, 讲师, 硕士, 主要从事计算数学方面研究, 电话: 010-81733394, E-mail: mana\_mn@souhu.com

由于测量误差近似服从正态分布,所以可以认为 $(u_1, u_3, v_2, v_4)$ 是一个4维正态变量,从而由(3)式可得出散度的误差估计公式为:

$$\begin{aligned} \sigma_b^2 = & \frac{1}{L_x^2}(\sigma_{u_1}^2 + \sigma_{u_3}^2) + \frac{1}{L_y^2}(\sigma_{v_2}^2 + \sigma_{v_4}^2) - \\ & \frac{2}{L_x^2}\text{Cov}(u_1, u_3) - \frac{2}{L_y^2}\text{Cov}(v_2, v_4) + \\ & \frac{2}{L_x L_y}[\text{Cov}(u_1, v_2) - \text{Cov}(u_1, v_4) - \\ & \text{Cov}(u_3, v_2) + \text{Cov}(u_3, v_4)] \end{aligned} \quad (6)$$

类似地,可推导出旋度垂向分量 $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ 的误差估计公式。

为分析(6)式右端各项对散度误差的不同贡献,令 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 满足:

$$\sigma_1 = \sigma_b \quad (7)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{L_x^2}(\sigma_{u_1}^2 + \sigma_{u_3}^2) + \frac{1}{L_y^2}(\sigma_{v_2}^2 + \sigma_{v_4}^2) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_3^2 = & \frac{1}{L_x^2}(\sigma_{u_1}^2 + \sigma_{u_3}^2) + \frac{1}{L_y^2}(\sigma_{v_2}^2 + \sigma_{v_4}^2) - \\ & \frac{2}{L_x^2}\text{Cov}(u_1, u_3) - \frac{2}{L_y^2}\text{Cov}(v_2, v_4) \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\sigma_2$ 即为陈瑞芬<sup>[4]</sup>采用的散度误差估计公式。下面将在赤道中东太平洋上升流区散度误差估计中分别计算 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ,并对三者进行比较,以期得到散度误差的既简洁又较为精确的计算公式。

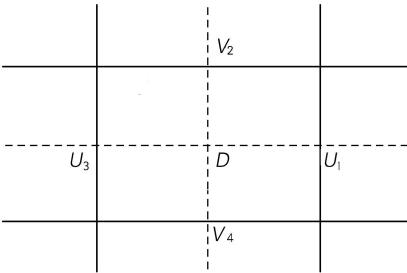


图1 计算网格示意图

Fig. 1 The grid

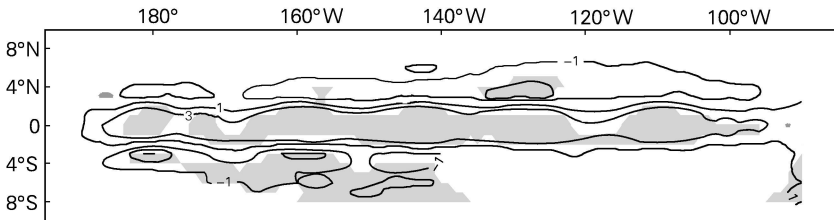


图2 赤道中东太平洋年平均近表层水平辐散

Fig. 2 The horizontal divergence of the annual mean near surface current in the equatorial center eastern Pacific

单位:  $10^{-7} \text{ s}^{-1}$ ; 阴影区表示信噪比大于1

Unit:  $10^{-7} \text{ s}^{-1}$ ; Shaded regions represent signal to noise ratio greater than one

## 2 赤道中东太平洋上升流区散度误差

赤道海洋的三维环流在全球大气海洋的动力及热力过程中有重要地位,它也是热带海洋生化过程的主要控制因素。因此,精确地描述赤道海洋环流,特别是通过观测和数值模拟研究赤道上升流具有重要的意义<sup>[5]</sup>。通常,间接估计赤道上升流的主要方法有:诊断计算、通过垂直积分连续方程计算以及利用环流模式结果计算。一般估计赤道中东太平洋上升流区域近表层水平散度约为  $3.0 \times 10^{-7} \sim 4.0 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ <sup>[5,6]</sup>。

### 2.1 资料

作者所用的海表流速资料来自 OSCAR (Ocean Surface Current Analyses—Real time) 月平均资料。该资料是利用卫星高度计、散射计、锚定浮标、漂流浮标及船舶等观测所得的多种数据再分析而得的近表层 15 m 深处流速<sup>[7]</sup>,时间范围为 1992 年 10 月至 2004 年 12 月,空间分辨率为  $1.0^\circ \times 1.0^\circ$ 。

### 2.2 赤道中东太平洋辐散及其误差

图 2 给出了赤道中东太平洋区域多年平均近表层水平辐散的分布,上升流区辐散为正,下沉流区辐散为负。可见赤道上升流区域呈东西分布,主要集中在日更线以东以赤道为中心 $\pm 2^\circ$ 的纬度带内。在该上升流区域中紧靠赤道的地方最大辐散值大于  $3.0 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ 。赤道南北两侧偏离赤道约  $2^\circ$  外各有一下沉流区域。北半球下沉流主要位于  $160^\circ \sim 100^\circ \text{ W}$ ,  $2^\circ \sim 4^\circ \text{ N}$  的区域,而南半球下沉流区域范围较小,主要位于  $180^\circ \sim 150^\circ \text{ W}$ ,  $3^\circ \sim 5^\circ \text{ S}$  的区域。

为考察散度的稳定性,可采用信噪比来表示辐散可信度。以赤道为中心±2°的纬度带内上升流比较稳定,大部分区域信噪比大于1。由统计学相关理论知,在68%的显著水平下,该区域内水平散度通过信度检验;赤道以南4°S附近区域信噪比稍大于1,而赤道以北4°N附近区域的下沉流并不稳定,信噪比小于1,不能通过信度检验。

对于式(7)、(8)、(9)所给出的3种误差,图3给出其各自量值或差值以进行比较。由图3a可见在赤道太平洋附近, $\sigma_1$ 约为 $2.0 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ 左右,这与流场的

的散度同一个量级。图3b显示赤道太平洋附近 $\sigma_2$ 高达 $30.0 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ 以上, $\sigma_2$ 约为 $\sigma_1$ 的10倍左右。若直接用 $\sigma_2$ 作为 $D$ 的误差,则高估了散度的误差,从而降低了所得散度的可信度(信噪比远小于1)。相反,用 $\sigma_1$ 来估计 $D$ 的误差则非常显著地提高了散度的可信度(信噪比稍大于1)。由图3c可知, $\sigma_3$ 和 $\sigma_1$ 的差值仅为 $0.2 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ 左右,因此在赤道中东太平洋附近 $\sigma_3$ 可作为 $\sigma_1$ 的一个非常好的近似,对 $D$ 的误差估计及信度检验影响不明显。

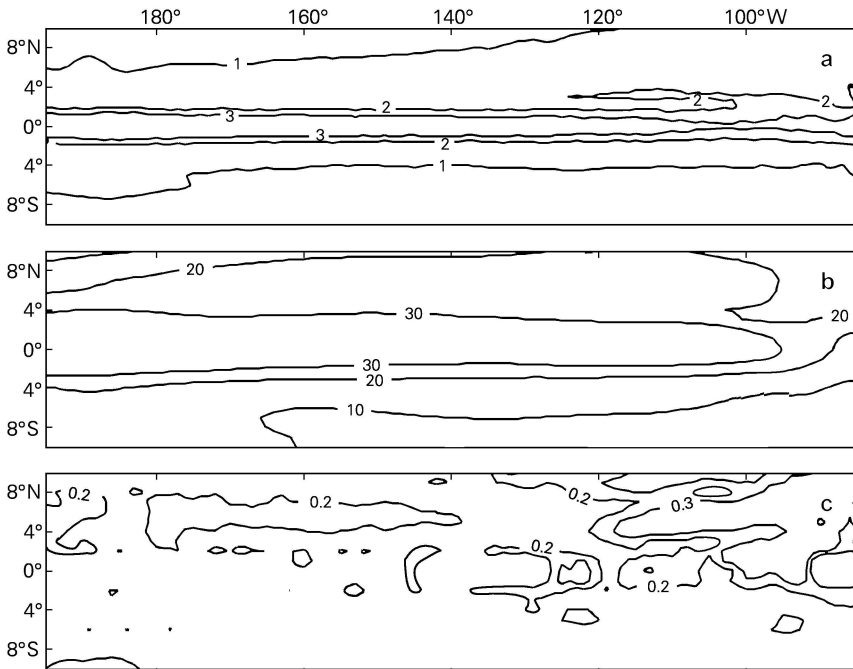


图3 近表层水平辐散误差

Fig. 3 Errors of horizontal divergence

a.  $\sigma_1$ ; b.  $\sigma_2$ ; c.  $\sigma_3 - \sigma_1$ ; 单位:  $10^{-7} \text{ s}^{-1}$

a.  $\sigma_1$ ; b.  $\sigma_2$ ; c.  $\sigma_3 - \sigma_1$ ; unit:  $10^{-7} \text{ s}^{-1}$

### 3 讨论

通过对赤道中东太平洋区域近表层流场水平辐散的误差分析表明:误差估计 $\sigma_2$ 与 $\sigma_1$ 相差很大, $\sigma_2$ 约为 $\sigma_1$ 的10倍。因此,若以 $\sigma_2$ 作为散度误差的估计值,则高估了散度的误差,使散度难以通过信度检验。事实上,接近纬向分布的赤道流系有着很好的空间相关性。作者所用的资料空间分辨率为 $1.0^\circ \times 1.0^\circ$ ,统计得到热带太平洋中纬向流在相邻两网格点

上相关系数为0.9以上;而经向流的相关系数在赤道以外约为0.9左右,在赤道附近则降至为0.5以下。在误差估计 $\sigma_1$ 表达式中,表征纬向流相关性的协方差项 $2\text{Cov}(u_1, u_3)$ 能抵消大部分纬向流方差项 $\sigma_{u_1} + \sigma_{u_3}$ 。同样,表征经向流相关性的协方差项 $2\text{Cov}(v_2, v_4)$ 也能抵消一部分经向流方差项 $\sigma_{v_2} + \sigma_{v_4}$ 。作者计算所得的水平散度误差 $\sigma_1$ 比 $\sigma_2$ 小的原因就在于,赤道太平洋流场结构有着良好的空间相关性。因此,在计算流场散度及旋度的误差时,必须考虑流场本身的空间相关性。

如第 2.2 节中所述,在赤道太平洋附近  $\sigma_3$  可作  $\sigma_1$  的一个非常好的近似。Hansen 和 Paul<sup>[8]</sup> 就是利用类似  $\sigma_3$  的公式来估计散度误差的。和  $\sigma_1$  相比,  $\sigma_3$  省略了代表  $u, v$  的协方差的 4 项,使计算量大为减少。而且这 4 项的值对  $\sigma_1$  的影响并不明显,约占 10% 左右,从而能保证  $\sigma_1$  的精确度。

必须指出,对第 2.2 节中所计算的散度的误差来源主要有 3 个:(1) 观测资料的误差;(2) 资料后处理过程的误差;(3) 变量场自身的变化。对于前两类误差,无法得到具体的估计。但一般认为,和变量自身的变化相比,前两类误差是小量。第 2.2 节计算所得到的散度的误差实际上是散度的年际变率,其中包括季节变化。这里给出的散度是气候平均(多年平均)的量值,不妨将其年际变率称之为误差。事实上,第 1.2 节给出的误差计算公式  $\sigma_1$  适合于研究各种时间尺度、空间尺度上散度的误差估计问题。针对要研究的问题,任意给定一组流场观测数据,总可以计算出各个网格上  $u, v$  的方差及不同网格  $u, v$  的协方差,将其带入  $\sigma_1$  的计算式即可得到相应的散度误差估计。

## 4 结论

作者通过误差传递原理推导出流场散度的误差估计公式。公式  $\sigma_1$  与通常采用的误差估计公式  $\sigma_2$  区别在于:前者考虑了空间分布的变量之间的相关性,即协方差。如果空间分布的变量互不相关,那么误差估计公式  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  是等价的。为方便计算,在赤道太平洋附近可用  $\sigma_3$  作为  $\sigma_1$  的近似。

赤道中东太平洋上升流区多年平均散度大约为  $3.0 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ ,并且通过信度检验。和通常采用的误

差估计方法相比,估计公式  $\sigma_1$  降低了散度误差,提高了散度的可信度。我们应注意,在估计流场散度、旋度的误差时,为提高其可信度,必须考虑流场本身的空间相关性。

## 参考文献:

- [1] McNoldy B D, Ciesielski P E, Schubert W H, *et al.* Surface winds, divergence, and vorticity in stratocumulus regions using QuikSCAT and reanalysis winds [J]. *Geophysical Research Letters*, 2004, **31** (8): 73-77.
- [2] 丁一汇. 天气动力学中的诊断分析方法[D]. 合肥: 中国科技大学研究生院, 1993.
- [3] 何国伟. 误差分析方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1978. 97-105.
- [4] 陈瑞芬. 不同方案下散度误差的讨论[J]. 广西气象, 1995, **16**(2): 27-31.
- [5] Poulain P M. Estimates of horizontal divergence and vertical velocity in the equatorial Pacific [J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1993, **23**(4): 60-607.
- [6] Weisberg R H, Qiao L. Equatorial upwelling in the Central Pacific estimated from moored velocity profilers [J]. *Journal of Physical Oceanography*, 2000, **30** (1): 105-124.
- [7] Bonjean F, Lagerloef G S E. Diagnostic model and analysis of the surface currents in the Tropical Pacific Ocean [J]. *Journal of Physical Oceanography*, 2002, **32**(10): 2 938-2 954.
- [8] Hansen D, Paul C A. Genesis and effects of long waves in the equatorial Pacific [J]. *Journal of Geophysical Research*, 1984, **89**(C6): 10 431-10 440.

# An error estimation of the divergence of current

MA Na

(Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Received: Mar., 6, 2005

Key words: divergence; error; upwelling

**Abstract:** According to the error translation rule, an error estimation of the divergence of current is given, and is applied to calculating the horizontal divergence of current in the equatorial center eastern Pacific. The results show that the horizontal divergence of annual mean current in the equatorial center eastern Pacific is steady, and the mean divergence is about  $3.0 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ . The error estimation is smaller than the usual error estimation, and hence the reliability is increased.

(本文编辑:刘珊珊)