

均匀剪切流场中的强非线性波及其色散关系

杨联贵¹, 杨红丽^{2,3}, 宋金宝², 侯一筠²

(1. 内蒙古大学 数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010021; 2. 中国科学院 海洋研究所, 山东 青岛 266071; 3. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

摘要:考虑了剪切流场中强非线性波,唯一的假设是水深与特征波长之比是小量,建立了基于任意水深处速度而不是通常所用的平均速度为速度变量的模型。不仅改进了色散关系,使模型的水深适用范围更大,而且由于整个推导过程对波的振幅没有做任何假设,因而所获得的模型可以用于任何振幅的波。

关键词:剪切流;强非线性;色散关系

中图分类号: P731.24

文献标识码: A

文章编号: 1000-3096(2008)07-0033-05

长期以来,人们对表面波进行了大量的研究。例如,大家都很熟悉的浅水中描述二维波的 Boussinesq 方程^[1,2]、描述单向传播波的 KdV 方程^[2,3]、描述弱二维波的 KP 方程^[2,4]以及它们的孤立波解。Nwogu^[5]用任意水深处速度为速度变量表示的浅水中的 Boussinesq 型方程。但是,这些研究均忽略了背景流效应,而这些背景流在真实海洋中是很重要的。这种水流与波浪之间的相互作用,如 Doppler 效应导致顺流时波长变大,波高减小,而逆流时波长变小,波高增大,甚至出现波浪破碎。Unna^[6]最早从理论上研究了水流对波浪传播的影响。Longuet-Higgins^[7]给出了辐射应力概念及能量平衡方程,辐射应力的给出使得正确计算流对波的影响成为现实。假设流沿波传播方向是变化的,而在垂直方向是均匀的,Longuet-Higgins^[8]从能量平衡方程导出深水中线性波与流相互作用前后振幅值的变化,其中流速的变化可以由上升流或侧向辐散加以平衡。在反向流中波变陡,波动的能量增加,这是因为辐射应力做功的缘故;同理,在顺向流中波变平,关于这种效应 Hughes^[9]已作过实验。Whitham^[10]和 Bretherton^[11]研究了波流共存时的守恒律,而且 Bretherton^[11]还提出了波作用量守恒的概念,可以确定水流引起的波高变化。Peregrine^[12]和 Jonsson^[13]对此也进行了深入研究。Benjamin^[14]推导了孤立波的弱非线性理论后,Freeman^[15]建立了描述剪切流中弱非线性波的时间演化的 KdV 方程。但是当浅水中存在强的剪切流时,应该考虑作用在表面重力波上的强非线性效应^[16]。Choi^[17]利用渐近展开的方法建

立了浅水中具有有限振幅的表面波模型,但是这种用平均速度表示的模型的色散关系和精确的比较不是很好。作者采用类似于 Nwogu^[5]的方法,即以任意水深处的速度为速度变量,研究了均匀剪切流场中强非线性波,分析了所得模型的色散关系,使其适用范围更大些。

1 基本方程和边界条件

在密度为 ρ , 水深为常数 h 的流体中,假设流体是无粘、不可压缩的,坐标系取在底部,水平向右为 x 正方向,垂直向上为 y 正方向,这样速度分量 (U, V) 和压力 P 分别满足连续方程和欧拉(Euler)方程:

$$U_x + V_y = 0 \quad (1)$$

$$U_t + UU_x + VU_y = -P_x/\rho \quad (2)$$

$$V_t + UV_x + VV_y = -P_y/\rho - g \quad (3)$$

其中 g 是重力加速度,对空间和时间的下标表示求偏导数。

自由面处的运动学和动力学边界条件为:

$$V = U_x, P = 0 \quad (y = h) \quad (4)$$

底部条件为:

$$V = 0 \quad (y = 0) \quad (5)$$

收稿日期:2008-04-17;修回日期:2008-05-07

基金项目:中国科学院创新项目(KZCX2-YW-201);教育部留学回国人员科研启动基金和内蒙古自然科学基金资助项目

作者简介:杨联贵(1961-),男,内蒙古人,教授,博士,从事物理海洋学研究;杨红丽,通讯作者,电话:0471-4991253, E-mail: hongliyang3@sohu.com

其中 h 为静止水面高度, (x, t) 为相对于静止水面的扰动位移。

对于旋度为负常数 $\omega = V_x - U_y = -\omega_0$ 的情况, 如图 1, 关于波速 c 和波数 k 之间的精确线性色散关系^[16]为:

$$\frac{c^\pm}{\sqrt{gh}} = F \left[1 - \frac{\tanh kb}{2kh} \right] \pm \sqrt{\frac{\tanh kb}{kh} \left[1 + F^2 \frac{\tanh kb}{4kh} \right]} \quad (6)$$

其中 F 为 Froude 数, 定义为:

$$F = \frac{h}{\sqrt{gh}} \quad (7)$$

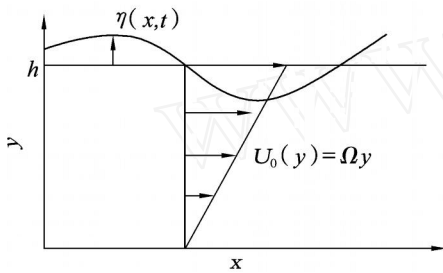


图 1 剪切流中的表面波示意图

Fig. 1 Schematic plot of surface wave with uniform shear flow

首先我们引入无量纲的物理变量, 用带星号来表示:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad t^* = \frac{\sqrt{gh}}{L} t, \quad \omega^* = \frac{\omega}{\omega_0} \\ U^* &= \frac{U}{\sqrt{gh}}, \quad V^* = \frac{V}{\mu \sqrt{gh}}, \quad P^* = \frac{P}{gh} \end{aligned} \quad (8)$$

其中 L 是水平方向上的特征波长, $\mu = h/L$ 是小量, 从而波动是浅水长波。注意在这里没有对振幅做任何假设。

把(8)式代入到上面的连续方程、欧拉方程和边界条件, 这样, 方程(1)~(5)可用无量纲的变量来表示, 在此省略星号:

$$U_x + V_y = 0 \quad (9)$$

$$U_t + UU_x + VU_y + P_x = 0 \quad (10)$$

$$\mu^2 (V_t + UV_x + VV_y) + P_y + 1 = 0 \quad (11)$$

$$V = \omega + U_x, \quad P = 0 \quad (y = 1) \quad (12)$$

$$V = 0 \quad (y = 0) \quad (13)$$

沿底部到自由面积分连续方程(9), 并利用自由面和底部的条件(12)和(13), 得:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 U dy + \omega = 0 \quad (14)$$

同样, 沿水深积分水平动量方程(10), 并利用连

续方程(9)和自由面、底部的边界条件(12)~(13), 有:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 U dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 U^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 P dy = 0 \quad (15)$$

从 y 到 $y = 1$ 积分垂直动量方程(11), 并且利用自由面上的条件(12)可以得到压力场:

$$P = 1 - y + \mu^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_y^1 V dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_y^1 UV dy - V^2 \right] = 0 \quad (16)$$

从底部 $y = 0$ 到 y 积分连续方程(9), 可以得到垂直速度场:

$$V = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y U dy \quad (17)$$

速度场可以分解为:

$$(U, V) = (U_0 + u, v), \quad U_0(y) = Fy \quad (18)$$

其中 U_0 是均匀剪切流, 而 (u, v) 是无旋的扰动速度分量, 且无旋条件为:

$$\mu^2 v_x - u_y = 0 \quad (19)$$

2 均匀剪切流中的强非线性波

我们采用类似于 Nwogu 的方法^[5]来推导剪切流中强非线性波满足的 Boussinesq 方程。首先把水平速度 $u(x, y, t)$ 在任意水深处 $y = y$ 做泰勒(Taylor)展开:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u(x, y, t) + (y - y) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y} + \\ &\quad \frac{(y - y)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=y} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

把(20)式代入到无旋方程(19)式, 截断到 $O(\mu^4)$, 有:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y} = - \mu^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=y} = - \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (22)$$

其中 $u = u(x, y, t)$ 。

把(21)式和(22)式代入到(20)式, 得到水平速度场:

$$u(x, y, t) = u - \frac{\mu^2}{2} (y^2 - y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(\mu^4) \quad (23)$$

把(23)式代入到(17)式, 得到垂直速度场:

$$v = -y \frac{\partial u}{\partial x} + \mu^2 \left[\frac{1}{6} y^3 - \frac{1}{2} y^2 y \right] \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\mu^4) \quad (24)$$

利用(16), (23)和(24)式,得到压力场:

$$P = 1 + \dots + \mu^2 \left\{ \frac{1}{2} [y^2 - (1 + \dots)^2] \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} F [y^3 - (1 + \dots)^3] u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} + O(\mu^4) \quad (25)$$

最后把(23) ~ (25)式代入到关于深度积分的连续方程(14)和水平动量方程(15)中,得到一组新的 Boussinesq 型方程:

$$\dots + \left[\frac{1}{2} F(1 + \dots)^2 + (1 + \dots) u \right]_x - \mu^2 \left\{ \left[\frac{(1 + \dots)^3}{6} - \frac{y^2(1 + \dots)}{2} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}_x = O(\mu^4) \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \dots = \mu^2 \left\{ \frac{1}{3} F(1 + \dots)^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} y^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{2} (1 + \dots)^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}_x + O(\mu^4) \quad (27)$$

方程(26)和(27)的有量纲形式为:

$$\dots + (h + \dots)_x + (h + \dots) \frac{\partial u}{\partial x} + \dots u - \left\{ \left[\frac{1}{6} (h + \dots)^3 - \frac{1}{2} y^2 (h + \dots) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}_x = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \dots = \left\{ \frac{1}{3} (h + \dots)^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} y^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{2} (h + \dots)^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}_x \quad (29)$$

方程(28)和(29) (或(26)和(27))组成了均匀剪切流中的强非线性波模型。由于我们只是假设水深与特征波长之比是小量,即考虑的是长波,而对振幅没有做任何假设,所以此模型可以用于任何振幅的波,即振幅的量阶可以是1。

现定义平均速度:

$$\bar{u} = \frac{1}{h + \dots} \int_0^{h + \dots} u \, dy \quad (30)$$

由式(23)和(30),可以得到平均速度和任意水深速度的关系:

$$u = \bar{u} + \left[\frac{1}{6} (h + \dots)^2 - \frac{1}{2} y^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + O(\mu^4) \quad (31)$$

这样方程(28)和(29)可以用平均速度来表示:

$$\dots + (h + \dots)_x + (h + \dots) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dots \bar{u} = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \dots = \frac{1}{h + \dots} \left\{ \frac{(h + \dots)^3}{3} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial t} + \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \right] + (h + \dots) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \right\}_x \quad (33)$$

方程(32)和(33)正好为 Choi 的结果^[17]。

3 模型的色散关系

方程(28)和(29) (或(26)和(27))组成了均匀剪切流中的强非线性波模型,以速度变量 u 的位置高度 y 作为一个自由变量,由于速度变量 u 是任意选

择的,因而可以包括静止水面速度、底部速度、平均速度等,通过选择 y 的值来使所得模型的色散关系与精确的色散关系尽可能的在大水深范围内吻合。

考虑角频率为 ω 、波数为 k 的小振幅周期波:

$$\eta = a e^{i(kx - \omega t)}, u = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (34)$$

把(34)式代入到方程(28)和(29)的线性部分,得到模型的色散关系为:

$$\frac{c^\pm}{\sqrt{gh}} = F \left\{ 1 - \frac{1 + k^2 \left[\frac{1}{6} h^2 - \frac{1}{2} y^2 \right]}{2 \left[1 + k^2 \left[\frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} y^2 \right] \right]} \right\}^\pm$$

$$\frac{1 + k^2 \left[\frac{1}{6} h^2 - \frac{1}{2} y^2 \right]}{\sqrt{1 + k^2 \left[\frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} y^2 \right]}} \left[1 + \frac{1}{4} F^2 \frac{1 + k^2 \left[\frac{1}{6} h^2 - \frac{1}{2} y^2 \right]}{1 + k^2 \left[\frac{1}{2} h^2 - \frac{1}{2} y^2 \right]} \right] \quad (35)$$

由(35)式可见,色散关系依赖于参数 y 的值,即依赖于不同的深度,亦即模型依赖于不同水深处的速度。根据 y 的定义,如果 $y^2 = h^2$,则表示是静止水面处的速度; $y^2 = 0$,则表示是底部的速度; $y^2 = h^2/3$,则表示平均速度;而 $y^2 = h^2/5$ 则是根据精确线性色散关系中 $\tan kh$ 的 Pade 展开 $P[2, 2]$ 得到的。下面对于不同 y 的值,我们把所得模型的色散关系与精确的色散关系作比较,如图 2。这里只比较了 c^+ , c^- 也是类似的,且取定 Froude 数为 $F = 0.1$ 。从图中可以看出,选择 $y^2 = h^2/5$ 时,水深的适用范围是用别

的速度表示的 2~3 倍,这样水深的适用范围大大增加了。

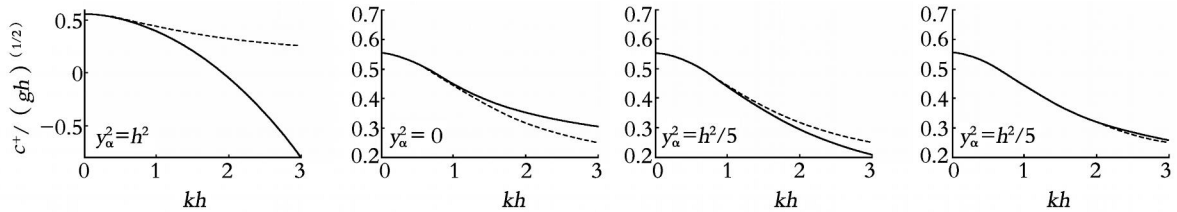


图 2 (29)式(实线)与(6)式(虚线)确定的色散关系比较

Fig. 2 Comparison of dispersion relations between formula (35) (real line) and formula (6) (point line)

4 结论

本文采用类似于 Nwogu^[5]的方法研究了均匀剪切流场中的强非线性波,在得到的模型中,存在自由变量 y ,通过选择此变量,可以用不同的速度来表示。该模型包括了用静止水面速度、底部速度、平均速度来表示的不同形式。比较发现,通过选择变量 y 可以使得到的色散关系与精确的线性色散关系更好地吻合,从而使模式的水深适用范围更大。

参考文献:

- [1] Boussinesq J. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire [J]. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1871, 72: 755-759.
- [2] Whitham G B. Linear and nonlinear waves [M]. New York: A Wiley-Interscience Publication, 1974.
- [3] Korteweg D J, de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves [J]. *Philosophical Magazine*, 1895, 39: 422-443.
- [4] Kadomtsev B B, Petviashvili V I. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media [J]. *Soviet Physics Doklady*, 1970, 15: 539-541.
- [5] Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation [J]. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 1993, 119 (6): 618-638.
- [6] Unna P J. Wave and tidal streams [J]. *Nature*, 1942, 149: 219-220.
- [7] Longuet-Higgins M S, Stewart R W. Changes in form of short gravity waves on long waves and tidal currents [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1960, 8: 565-583.
- [8] Longuet-Higgins M S, Stewart R W. The changes in amplitudes of short gravity waves on steady non-uniform currents [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1961, 10: 529-549.
- [9] Hughes B A, Stewart R W. Interaction between gravity waves and a shear flow [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1961, 10: 385-402.
- [10] Whitham G B. Mass, momentum and energy flux in water waves [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1962, 12: 135-147.
- [11] Bretherton F P, Garrett C J R. Wave trains in homogeneous moving media [J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 1968, 302: 529-554.
- [12] Peregrine D H. Interaction of water waves and currents [J]. *Advances of Applied Mechanics*, 1976, 16: 9-117.
- [13] Joseph R I. Solitary waves in finite depth fluid [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1977, 10: L225-L227.
- [14] Benjamin T B. The solitary wave on a stream with an arbitrary distribution of vorticity [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1962, 12: 97-116.
- [15] Freeman N C, Johnson R S. Shallow water waves on shear flows [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, 42: 401-409.
- [16] Teles da Silva A F, Peregrine D H. Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1988, 195: 281-302.
- [17] Choi W. Strongly nonlinear long gravity waves in uniform shear flows [J]. *Physical Review E*, 2003, 68: 299-305.

Strongly nonlinear long waves with uniform shear flows and their dispersion relationship

YANG Lian-Gui¹, YANG Hong-Li^{2,3}, SONG Jin-Bao², HOU Yi-jun²

(1. School of Mathematical sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China; 2. Institute of Oceanology, the Chinese Academy of Sciences, Qingdao 266071, China; 3. Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Received: Apr. 17, 2008

Key words: uniform shear flows; strongly nonlinear; dispersion relation

Abstract: Long surface waves of finite amplitude with uniform shear flows are considered under the only assumption that the aspect ratio between wavelength and water depth is small. A new model is derived using the velocity at an arbitrary distance from the still water level as the velocity variable instead of the commonly used depth-averaged velocity. This significantly improves the dispersion properties, making them applicable to a wider range of water depths. Since its derivation requires no assumption on wave amplitude, the model we got here can be used to describe arbitrary amplitude waves.

(本文编辑:刘珊珊)