

非传统近似下海洋内波的一类 WKB 近似解

刘永军^{1,2,3}, 宋金宝^{1,2}, 黄小峰^{1,2,3}

(1. 中国科学院 海洋研究所, 山东 青岛 266071; 2. 中国科学院 海洋环流与波动重点实验室, 山东 青岛 266071; 3. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

摘要: 在非传统近似(即, 包含地转水平分量在内的完整地转效应)条件下, 用 WKB(Wentzel-Kramers-Brillouin)方法得到了密度连续分层海洋内波的一类 WKB 近似解。为了检验所得到的 WKB 近似解的有效性, 对 WKB 解各垂向速度模态与基于三点中心差分格式及 QR 算法的数值计算结果进行了详细对比, 结果表明, 当浮频率 $N(z)$ 是关于深度 z 的慢变函数时, WKB 近似解与数值结果符合良好。另外, 还比较和分析了非传统近似与传统近似条件下内波解的差别, 结果表明: 地转水平分量一般是不能忽略的, 对海洋内波的生成、演变及消衰的研究有着非常重要的意义。

关键词: 柯氏力参量; 内波; WKB(Wentzel-Kramers-Brillouin)近似; 标准化; 非传统近似

中图分类号: P731.24 文献标识码: A 文章编号: 1000-3096(2011)01-0081-07

大量研究表明, 地转水平分量在海洋内波研究中是不可忽略的, 该参量对解释海洋内波传播规律、内波遥感信息提取以及海洋模式中内波参数化问题等具有重要的意义。许多作者在忽略地转水平分量的传统近似条件下得到了不同形式的内波近似解(如, Garrett 和 Munk^[1-2]; Levine^[3]; Blumenthal 和 Briscoe^[4]等)。近年来, 包含地转水平分量在内的完整地转效应(即, 非传统近似)对海洋内波的影响引起人们的广泛关注(如, Gerkema 和 Shrira^[5]; Kasahara 和 Gary^[6]; 范植松和方欣华^[7-8]等), 尽管他们用不同的方法探求内波方程组波动形式的渐近解, 但均只在浮频率 N 是深度 z 的特定函数模型情况下得出渐近解(如 Gerkema 和 Shrira^[5]用浮频率模型 $N^2(z) = N_0^2 + \gamma z$ 得到的 Airy 形式渐近解, 以及范植松和方欣华^[7-8]采用 GM72^[1-2]的 e 指数模型 $N(z) = N_0 e^{z/b^*}$, 选取地转水平分量 \tilde{f} 作为小参数用摄动展开方法得到的渐近解等), 作者在 Gerkema 和 Shrira^[5]及 Levine^[3]等人研究工作的基础上, 由线性内波控制方程出发, 对密度连续分层海洋, 用 WKB 近似方法和非传统近似下新的标准化条件, 得到了考虑完整地转效应的一类 WKB 近似解析解, 并对这一类近似解与相应的数值结果进行了详细的对比。

1 WKB 近似解

密度连续分层的海水, 在无旋、不可压、Boussinesq 和完全 f -平面近似(也称非传统近似)下,

线性内波控制方程组为(Gerkema 和 Shrira^[5]; Phillips^[9]):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v + \tilde{f} w = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \tilde{f} u = -\frac{\partial p}{\partial z} + b \quad (1.c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.d)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + N^2(z)w = 0 \quad (1.e)$$

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (1.f)$$

其中: 坐标系原点取在无扰动海面, 坐标轴 x , y 和 z 的方向分别向东, 向北和垂直向上, u , v 和 w 分别对应 x , y 和 z 轴三个方向的速度分量, b 是浮力, p 是压力扰动除以平均密度, ζ 为内波波面位移, $N(z)$ 是 Brunt-Väisälä 频率, $f = 2\Omega \sin \phi$ (ϕ 是地转角速度,

为纬度)是地转柯氏力垂向分量, $\tilde{f} = 2\Omega \cos \phi$ 是地转柯氏力水平分量。这里, 我们考虑浮频率 $N(z)$ 是关于深度 z 的函数(除非另外说明)。在传统近似下, 地

收稿日期: 2010-03-16; 修回日期: 2010-11-08

基金项目: 中国科学院知识创新工程重大项目(KZCX1-YW-12; 国家自然科学基金创新群体项目(40821004)

作者简介: 刘永军(1970-), 男, 河北沧州人, 博士研究生, 研究方向: 物理海洋学, E-mail: lyj00001@163.com

转水平分量 $\tilde{f}=0$ 。

海面边界条件采用“刚盖近似”，海底满足无渗透边界条件，即

$$w|_{z=0} = 0 \quad (2)$$

$$w|_{z=-H} = 0 \quad (3)$$

由于方程(1.a)~(1.e)中的系数均与时间 t ，水平位置 x 和 y 无关，可将方程(1.a)~(1.e)的解表示成以下形式(Blumenthal 和 Briscoe^[4]):

$$\begin{aligned} [u, v, w, p, \zeta]^T(x, y, z, t) = \\ \mathbf{R}(z, \omega, k, l) \times \psi(z) e^{i(kx+ly+\delta z-\omega t)} \end{aligned} \quad (4)$$

其中: $\mathbf{R}(z, \omega, k, l)$ 是 u, v, w, p, ζ 的待定系数矩阵, T 是矩阵转置符号, $\psi(z)$ 是待定函数, ζ 为内波波面位移, ω 内波频率, 水平波数向量 $(k, l) = \alpha(\cos \theta, \sin \theta)$ (α 是水平波数的模, θ 是水平波向量与 x 轴正向逆时针所成方位角), δ 为待定系常数, 将(4)代入(1.a)~(1.e)得到:

$$\mathbf{R}(z, \omega, k, l) = \begin{bmatrix} \frac{i\omega \cos \theta - f \sin \theta}{\omega \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\delta \right) + \frac{f_s}{i\omega} \sin \theta \\ \frac{i\omega \sin \theta + f \cos \theta}{\omega \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\delta \right) - \frac{f_s}{i\omega} \cos \theta \\ 1 \\ i \frac{(\omega^2 - f^2)}{\omega \alpha^2} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\delta \right) + \frac{i\omega \cos \theta + f \sin \theta}{\omega \alpha \sin \theta} f_s \\ -\frac{1}{i\omega} \end{bmatrix} \quad (5)$$

由(4)和(5), 可将垂向速度不依赖于时间的部分表示成

$$W(\chi, z) = \psi(z) \exp(i\alpha\chi + \delta z) \quad (6)$$

其中: $\chi = x \cos \theta + y \sin \theta$, 即 $\alpha\chi = kx + ly$, $w = W \exp(-i\omega t)$ 。将(3)和(4)代入控制方程(1.a)~(1.e), 令 $\delta = \frac{\alpha f f_s}{\omega^2 - f^2}$, $f_s = \tilde{f} \sin \theta$, 则可以得到关于 $\psi(z)$ 的方程:

$$\frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + \alpha^2 \left[\frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} + \left(\frac{\omega f_s}{\omega^2 - f^2} \right)^2 \right] \psi(z) = 0 \quad (7)$$

将(6)代入边界条件(2)和(3)得出 $\psi(z)$ 的边界条件:

$$\psi(0) = 0 \text{ (海面)}, \psi(-H) = 0 \text{ (海底)} \quad (8)$$

方程(7)所表述的 $\psi(z)$ 只是垂向流速 $W(\chi, z)$ 的

一个组成部分, 只有当 $f_s = 0$ 时, 方程(7)才是垂向流速 $W(z)$ 的方程。另外, 非传统近似项在垂向流速指数部分中的存在使流速的相位产生偏移。对于任意分布的浮频率 $N(z)$, 方程(7)和边界条件(8)构成了一个 Sturm-Liouville 本征值问题。对特定形式的浮频率分布 $N(z)$, 例如当 $N(z)$ 为常量时, 这类本征值问题的解析解可直接获得, 而当 $N(z)$ 是随 z 而变化的一般函数时, 得到方程组(7)和(8)的精确解非常困难, 人们通常采用一些近似方法。这里, 我们引入 WKB 近似方法对方程组(7)和(8)进行求解和讨论。

首先, 为表达简便, 令

$$q^2(z) = \frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} + \left(\frac{\omega f_s}{\omega^2 - f^2} \right)^2 \quad (9)$$

则方程(7)表示为:

$$\psi''(z) + \alpha^2 q^2(z) \psi(z) = 0 \quad (10)$$

参照 WKB 近似展开的基本公式, 将 $\psi(z)$ 进行以指数幂级数展开后形式为:

$$\psi(z) \propto \exp \left[\frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n S_n(z) \right]$$

即

$$\psi(z) \propto \exp \left\{ (S_0(z) + S_1(z)\sigma + S_2(z)\sigma^2 + \dots) / \sigma \right\} \quad (11)$$

其中, $S_n(z)$ 是函数 $\psi(z)$ 的 WKB 展开式的第 n 项, 当 WKB 解在 $n=1$ 处截断时 $\psi(z) \propto \exp \{ (S_0(z) + S_1(z)\sigma) \}$ 为 WKB 的一阶近似解; σ 为小尺度参数, 代表边界层厚度。

对(11)式进行二次微分可得:

$$\begin{aligned} \psi'(z) \propto \frac{[(S_0'(z) + S_1'(z)\sigma + S_2'(z)\sigma^2 + \dots)]}{\sigma} \times \\ \exp \{ (S_0(z) + S_1(z)\sigma + S_2(z)\sigma^2 + \dots) / \sigma \} \\ \psi''(z) \propto \left\{ [(S_0'(z) + S_1'(z)\sigma + S_2'(z)\sigma^2 + \dots)]^2 / \sigma^2 + \right. \\ \left. [(S_0''(z) + S_1''(z)\sigma + S_2''(z)\sigma^2 + \dots)] / \sigma \right\} \times \\ \exp \{ (S_0(z) + S_1(z)\sigma + S_2(z)\sigma^2 + \dots) / \sigma \} \quad (12) \end{aligned}$$

将(11)和(12)代入方程(10)并消去指数因子得:

$$\frac{1}{\sigma^2} S_0'^2(z) + \frac{2}{\sigma} S_0'(z) S_1'(z) + \frac{1}{\sigma} S_0''(z) + \dots = -\alpha^2 q^2(z) \quad (13)$$

方程(14)中数量级最大项是 $\frac{1}{\sigma^2} S_0'^2(z)$ 。根据主项平衡原理(Bender^[9]), 此项必须与方程右边的项同一量级(这里假设右边项不为 0), 由此可以导出

$$\frac{1}{\sigma^2} S_0'^2(z) = -\alpha^2 q^2(z) \quad (14)$$

再比较 σ 的幂级可以得到

$$2S_0'(z)S_1'(z) + S_0''(z) = 0 \quad (15)$$

$$2S_0'(z)S_n'(z) + S_{n-1}''(z) + \sum_{i=1}^{n-1} S_i'(z)S_{n-i}'(z) = 0, n \geq 2 \quad (16)$$

为简单起见取 $\sigma=1$, 与边界层理论一样, 小尺度参数 σ 由特异极限来决定, 此时由方程(14)易求得 $S_0(z)$ 的解为

$$S_0(z) = \pm i\alpha \int_0^z q(z') dz' \quad (17)$$

再将(17)代入(15)中, 得:

$$S_1'(z) = -\frac{1}{2} \frac{q'(z)}{q(z)} \quad (18)$$

从而得出:

$$S_1(z) = -\ln \sqrt{q(z)} \quad (19)$$

将(17)与(19)代入 $\psi(z)$ 的 WKB 展开式(11), 并在 S_1 项处进行截断, 得到方程(10)的两个 WKB 近似解, 每一个近似解对应 $S_0(z)$ 的一个符号, 即

$$\begin{aligned} \psi(z) &\propto \exp\left\{\pm i\alpha \int_0^z q(z') dz' - \ln \sqrt{q(z)}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{q(z)}} \exp\left\{\pm i\alpha \int_0^z q(z') dz'\right\} \end{aligned} \quad (20)$$

通解即为这两个解的线性组合:

$$\begin{aligned} \psi(z) &= C_1 \frac{1}{\sqrt{q(z)}} \exp\left\{i\alpha \int_0^z q(z') dz'\right\} \\ &+ C_2 \frac{1}{\sqrt{q(z)}} \exp\left\{-i\alpha \int_0^z q(z') dz'\right\} \end{aligned} \quad (21)$$

其中: C_1 和 C_2 为任意常数。

当 $N(z)$ 为常数时, 令 $q(z)=q$, 上面得出的 WKB 近似解在此情况下退化为

$$\psi(z) = C_1 \frac{1}{\sqrt{q}} \exp(i\alpha qz) + C_2 \frac{1}{\sqrt{q}} \exp(-i\alpha qz) \quad (22)$$

可以证明, (22)即为方程(10)的精确解(此时 N 为常量)。

在 WKB 近似求解过程中, WKB 近似展开式(11)对级数截断到 S_1 项要求 $N(z)$ 随 z 慢变。这是因为要使 WKB 近似有效, 必须满足条件:

$$\left| \frac{S_1(z)}{S_0(z)} \right| \ll 1 \quad (23)$$

由于 $S_1(z)$ 和 $S_0(z)$ 确定中的积分常数可以合并到

通解(11)中, 由(17)和(19)得:

$$\left| \frac{S_1(z)}{S_0(z)} \right| = \left| \frac{\ln \sqrt{q(z)}}{\alpha \int_0^z q(z') dz'} \right| \propto \left| \frac{\frac{1}{2} \int_0^z [\ln q(z)]' dz}{\alpha \int_0^z q(z) dz} \right| = \quad (24)$$

$$\left| \frac{\int_0^z [q'(z)/q(z)] dz}{\int_0^z q(z) dz} \right|$$

当 $q'(z)$ 很小, 即 $q(z)$ 是关于 z 的慢变函数时, 不等式(23)成立。由此可知, 浮频率 $N(z)$ 为深度 z 的慢变函数是 WKB 近似成立的必要条件。

根据边界条件 $\psi(0)=0$, 可以得到 $C_2 = -C_1$, 则由式(21)得:

$$\psi(z) = 2C_1 \frac{1}{\sqrt{q(z)}} \sin\left\{\alpha \int_0^z q(z') dz'\right\} \quad (25)$$

再由海底边界条件 $\psi(-H)=0$, 可以得到水平模态波数:

$$\alpha_j = \frac{j\pi}{\int_0^{-H} q(z') dz'}, (j=1, 2, 3, \dots) \quad (26)$$

因此, $\delta_j = \frac{\alpha_j f f_s}{\omega^2 - f^2}$, 且有 $\psi(z)$ 模态解的形式为:

$$\psi_j(z) = 2C_1 \frac{1}{\sqrt{q(z)}} \sin\left\{j\pi \frac{\int_0^z q(z') dz'}{\int_0^{-H} q(z') dz'}\right\} \quad (27)$$

这里: $j=1, 2, \dots$ 定义为垂向模态数。

由表达式(6), 我们可以得出各个物理量模态解的表达式。其中垂向流速独立于时间的部分:

$$W_j(\chi, z) = \psi_j(z) \exp(i(\alpha_j \chi + \delta_j z)). \quad (28)$$

注意到当 $f_s=0$ 时, 解(27)退化为 Levine^[3] 中所得到的解。

2 $\psi_j(z)$ 的正交标准化条件

根据 Gerkema 和 Shrira^[5], 将第 j 个模态的垂向速度 w 表示为:

$$w_j(\chi, z, t) = \psi_j(z) \exp\left[i(\alpha_j \chi + \delta_j z - \omega t)\right] \quad (29)$$

再根据(4)和(5)可以得到方程(1.a)~(1.e)中其他物理量的模态解, 这些模态解可以用 $\psi_j(z)$ 表示为:

$$u_j(z) = \left[\frac{i\omega \cos \theta - f \sin \theta}{\omega \alpha_j} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial z} + i\delta_j \psi_j \right) + \frac{f_s}{i\omega} \sin \theta \psi_j \right] e^{i(\alpha_j \chi + \delta_j z - \omega t)} \quad (30)$$

$$v_j(z) = \left[\frac{i\omega \sin \theta + f \cos \theta}{\omega \alpha_j} \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial z} + i\delta \psi_j \right) - \frac{f_s}{i\omega} \cos \theta \psi_j \right] e^{i(\alpha_j x + \delta_j z - \omega t)} \quad (31)$$

$$\zeta_j(z) = \left[-\frac{1}{i\omega} \psi_j(z) \right] e^{i(\alpha_j x + \delta_j z - \omega t)} \quad (32)$$

这里: u_j , v_j 和 ζ_j 分别是 x , y 方向的水平速度及垂向位移的模式解。为确定(27)式中的系数 C_1 , 参照 Garret 和 Munk^[2] 标准化条件公式, 波函数的标准化条件是:

$$\int_{-H}^0 \left\{ \frac{1}{2} \left[\overline{u_j(z)u_j^*(z)} + \overline{v_j(z)v_j^*(z)} + \overline{w_j(z)w_j^*(z)} \right] + \frac{1}{2} N^2(z) \overline{\zeta_j(z)\zeta_j^*(z)} \right\} dz = 1 \quad (33)$$

则由(29)~(32), 可得:

$$\overline{U_j^2} = \overline{u_j(z)u_j^*(z)} + \overline{v_j(z)v_j^*(z)} = \frac{\omega^2 + f^2}{\omega^2} \left(\frac{\psi_j'(z)}{\alpha_j} \right)^2 + \frac{(\omega^2 + f^2)f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \psi_j^2(z) \quad (34)$$

$$\overline{W_j^2} = \overline{w_j(z)w_j^*(z)} = \psi_j^2(z) \quad (35)$$

$$\overline{Z_j^2} = \overline{\zeta_j(z)\zeta_j^*(z)} = \frac{1}{\omega^2} \psi_j^2(z) \quad (36)$$

再将(34)~(36)代入到标准化条件(33)得:

$$\int_{-H}^0 \left[\frac{\omega^2 + f^2}{2\omega^2} \frac{\psi_j'^2}{\alpha_j^2} + \frac{(\omega^2 + f^2)f_s^2}{2(\omega^2 - f^2)^2} \psi_j^2 + \frac{\omega^2 + N^2(z)}{2\omega^2} \psi_j^2 \right] dz = 1 \quad (37)$$

由方程(7)和(8), 标准化条件式(37)式变为

$$\int_{-H}^0 \left[\frac{N^2(z) - f^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{(\omega^2 + f^2)f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right] \psi_j^2 dz = 1 \quad (38)$$

当 $i \neq j$ 时, $\psi_i(z)$ 为第 i 个模式解, 易知 $\psi_i(z) + \psi_j(z)$ 与 $\psi_i(z) - \psi_j(z)$ 均满足垂向结构方程(7), 从而:

$$\int_{-H}^0 \left[\frac{N^2 - f^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{(\omega^2 + f^2)f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right] [\psi_i(z) + \psi_j(z)]^2 dz = 1 \quad (39.a)$$

$$\int_{-H}^0 \left[\frac{N^2 - f^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{(\omega^2 + f^2)f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right] [\psi_i(z) - \psi_j(z)]^2 dz = 1 \quad (39.b)$$

由(39.a)减(39.b), 得:

$$\int_{-H}^0 \left[\frac{N^2 - f^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{(\omega^2 + f^2)f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right] \psi_i(z)\psi_j(z) dz = 0 \quad (i \neq j) \quad (40)$$

由(38)和(40)可以看出, 当 $z \in [-H, 0]$ 时方程组(7)和(8)的模式解构成的函数系 $\{\psi_j(z)\} (j=1,2,3,\dots)$ 加权正交, 即:

$$\int_{-H}^0 \left[\frac{N^2(z) - f^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{(\omega^2 + f^2)f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right] \psi_i \psi_j dz = Q(\omega) \delta_{jk} \quad (41)$$

其中: δ_{jk} 是 Kronecker delta 函数, $Q(\omega)$ 定义为标准化函数(通常定义为 1)。注意到(41)中包含的非传统近似项 f_s , 当被积函数中方括号内第二项的比值与第一项相比不是小量时, 则第二项不能被忽略。因此, 波函数的正交标准化条件与以往在传统近似下所用到的标准化条件不同(参考 Levine^[3]等)。

将(27)代入(41)可得:

$$C_1 = i \left\{ \frac{1}{2} \int_{-H}^0 \left[\frac{N^2 - f^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{(\omega^2 + f^2)f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right] \times \left[\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{\omega^2 f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right]^{-1/2} dz \right\}^{-1/2} \quad (42)$$

则由标准化条件(41)确定的 WKB 近似解为

$$\psi_j(z) = \left\{ \frac{1}{2} \int_{-H}^0 \left[\frac{N^2(z) - f^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{(\omega^2 + f^2)f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right] \times \left[\frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{\omega^2 f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right]^{-1/2} dz' \right\}^{-1/4} \sin \left[j\pi \left[\int_0^z q(z') dz' - \int_0^{-H} q(z') dz' \right] \right] \quad (43)$$

当浮频率 $N(z) = N_0$ 为常量时, (43)退化为

$$\psi_j(z) = \left\{ \frac{H}{2} \left[\frac{N_0^2 - f^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{(\omega^2 + f^2)f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right] \times \left[\frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{\omega^2 f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right]^{-1/2} \right\}^{-1/2} \sin \left(\frac{j\pi}{H} z \right) \quad (44)$$

解(43)和(44)分别是方程(7)当 $N(z)$ 是关于 z 的函数时的 WKB 近似解和 $N(z) = N_0$ 为常量时的精确解。

3 WKB 近似解与数值计算结果的对比

为检验 WKB 近似解(43)的有效性, 我们将其与方程(7)的数值结果进行对比, 对比过程如下:

首先, 用三点中心差分的方法将函数 $\psi(z)$ 的方程(7)和边界条件(8)进行离散化, 令

$$\lambda = \alpha^2 \quad (45)$$

则方程(7)和(8)可简化成:

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + \lambda q^2(z)\psi(z) = 0 \quad (46)$$

$$\psi(0) = \psi(-H) = 0 \quad (47)$$

将深度离散为 M 个等距区间, 然后再定义

$$\psi_n(z) = \psi(n\Delta z) \quad (48)$$

$$q_n^2(z) = q^2(n\Delta z) \quad (49)$$

取 $n = 0, 1, 2, \dots, M$, 对方程(46)和(47)进行三点中心差分, 离散后的方程形式如下:

$$[-\psi_{n+1} + 2\psi_n - \psi_{n-1}] = \lambda \Delta z^2 q_n^2(z) \psi_n(z) \quad (n = 1, 2, 3, \dots, M) \quad (50)$$

离散后边界条件(47)为:

$$\psi_0 = \psi_M = 0 \quad (51)$$

离散化后的方程(46)可以表示成矩阵的形式

$$\mathbf{A} \boldsymbol{\psi}_m = \lambda_m \boldsymbol{\psi}_m \quad (52)$$

当浮频率 $N(z)$ 是关于 z 的函数时, 矩阵 \mathbf{A} 是一个 $M \times M$ 的三对角矩阵, λ_m 是矩阵 \mathbf{A} 的第 m 个特征值, $\boldsymbol{\psi}_m$ 是 $M \times 1$ 矩阵。在三对角矩阵 \mathbf{A} 中, 相应的矩阵项元素为

$$A_{i,i} = 2/q_i^2(z) \Delta z^2, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (53)$$

$$A_{i,i+1} = -1/q_i^2(z) \Delta z^2, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (54)$$

$$A_{i,i-1} = -1/q_i^2(z) \Delta z^2, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (55)$$

采用 QR 方法来得出特征值和特征向量, 再将标准化条件(41)离散化, 离散化后标准化条件形式为:

$$\sum_{n=1}^M \left[\frac{N_0^2(n\Delta z) - f^2}{\omega^2 - f^2} + \frac{(\omega^2 + f^2) f_s^2}{(\omega^2 - f^2)^2} \right] \psi_n^2 \Delta z = 1 \quad (56)$$

因为(44)是浮频率 N 为常数时经标准化后的精确解, 所以我们选用它来验证算法的可靠性。作为例子, 我们这里采用如下参数对精确解和数值解进行比较: $N_0 = 8.33 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $\omega = 8.33 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $f = 6.14 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $f_s = 4.35 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $H = 4000 \text{ m}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ (内波的传播方向), $\phi = 25^\circ \text{ N}$, 坐标系原点位置的纬度,

$$\Omega = \frac{2\pi}{12 \times 60 \times 60} \text{ s}^{-1}, \text{ 地转角速度。}$$

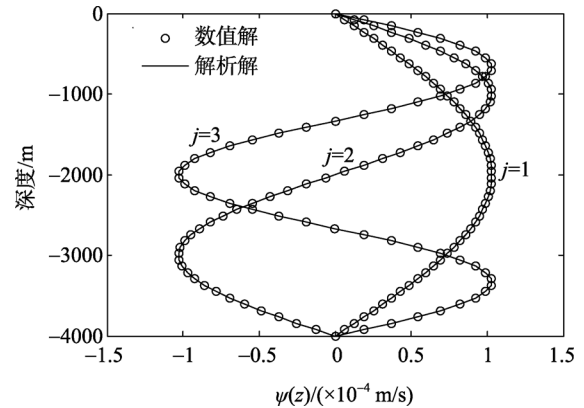


图 1 $\psi_j(z)$ 前三个模式的解析解与对应的数值解的对比
Fig. 1 Comparison of the analytical solutions and corresponding numerical results for the first three modes

从图 1 中可以看出解析解与其相对应的数值解很好地重合, 这表明本文所采用的三点差分格式是稳定的, 对特征值和特征向量的计算所采用的 QR 算法是可靠的, 得出的数值解与精确解符合良好。所以, 可以同样的方法对 WKB 近似解和数值解进行对比。

当浮频率 $N(z)$ 不是常数而是随着深度 z 变化时, 使用相同的方法, 我们对 WKB 近似解(43)和对应的数值解之间进行对比。作为例子, 这里我们引用 Garrett 和 Munk^[2] 的大洋密度连续分层浮频率模型:

$$N(z) = N_0 e^{z/b^*} \quad (57)$$

其中 b^* 是 $N(z)$ 的 e 折尺度, 在 Garrett 和 Munk^[2] 的论述中, 选择 $b^* = 1300 \text{ m}$, N_0 为常量, 是由海底到海面间的平均浮频率。 $N_0 = 3.3 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $\omega = 1.11 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $f = 6.14 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, $f_s = 4.35 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ 。

图 2 给出了 WKB 近似解(43)的前四个模式(用实线表示)和每个模式相对应的数值结果(用点线表示), 其中数值解已用离散化标准化条件(56)进行了标准化。由图 2 可以看出, 对于前两个模式, 偏差比较明显, 但随着模式数的增加, WKB 近似解越来越接近其对应的数值解, 与数值解吻合非常好, 也就是说, 模式数越高本文中所得到的 WKB 近似解越精确。

4 非传统近似与传统近似的差别分析

通过对 WKB 近似解与数值解的比较可知, WKB 近似解极其接近其对应的数值解, 因此, 可近似地

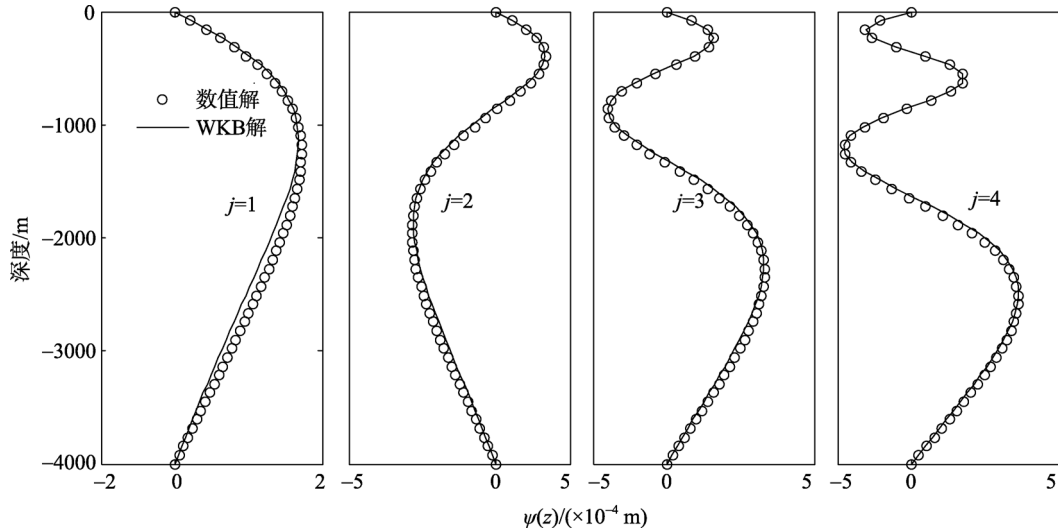


图2 $\psi_j(z)$ 前四个模态的WKB近似解与对应数值解的对比

Fig. 2 Comparison of the WKB approximate solutions and the corresponding numerical solutions for the first four modes

将(44)作为方程(7)的解析解,进而可以用来描述内波的一些物理性质和运动规律。

本文用近似解析解(44)对非传统近似和传统近似情况进行比较和分析。首先选取近似解(44)的前10个模态为例,每个模态从0~4 km深度区间选取

100个点对应的 $W_j(z)$ 值,分别计算出传统近似下和非传统近似下的 $W_j(z)$ 平均值,最后得出绝对平均偏差和相对平均偏差。所得出的结果在表1中列出。这些计算结果显示了相对偏差随着模态数的变化的情况。

表1 $W(z)$ 在传统近似情况下与非传统近似情况下的比较

Tab. 1 Comparison of the $W(z)$ under the non-traditional and traditional approximation

模态数	$W_j(z)$ 平均值 (非传统近似)	$W_j(z)$ 平均值 (传统近似)	$W_j(z)$ 绝对平均偏差	$W_j(z)$ 相对平均偏差 (%)
$j=1$	0.0004556	0.0004683	0.0000126	2.69
$j=2$	0.0009264	0.0009325	0.0000061	0.66
$j=3$	0.0010089	0.0010362	0.0000273	2.63
$j=4$	0.0011614	0.001236	0.0000747	6.04
$j=5$	0.0011454	0.001287	0.0001417	11.01
$j=6$	0.0011672	0.0014092	0.0002420	17.17
$j=7$	0.0010946	0.0014461	0.0003514	24.30
$j=8$	0.0010257	0.00151127	0.0004855	32.13
$j=9$	0.0009154	0.0015282	0.0006128	40.10
$j=10$	0.0000008	0.0000073	0.0000065	88.92

参数选取: $N_0 = 3.3 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$, $\omega = 1.1 \times 10^{-6} \text{s}^{-1}$, $\phi = 22.5^\circ \text{N}$ (即北纬 22.5°), $\theta = \pi/4$ (内波向东北方向传播)。图3共4个子图,分别对应第1模态,第3模态,第6模态和第10模态。从图3可清楚地看出,模态数越高,非传统近似 $W_j(z)$ 与传统近似下的 $W_j(z)$ 相比较的偏差越为明显。

5 结论

本文由非传统近似条件下的线性内波控制方程

出发,用WKB近似方法得到了一组WKB近似解的一般表达式,用导出的非传统近似条件下的标准化条件,得到了一类WKB近似解析解,并通过数值方法对其精确性进行了验证。结果表明,WKB近似解析解与数值结果符合良好。非传统近似与传统近似条件下内波解的差别比较和分析表明,地转水平分量对内波的影响一般是不应忽略的,在海洋内波的生成、演变及消衰的过程中有着非常重要的作用。

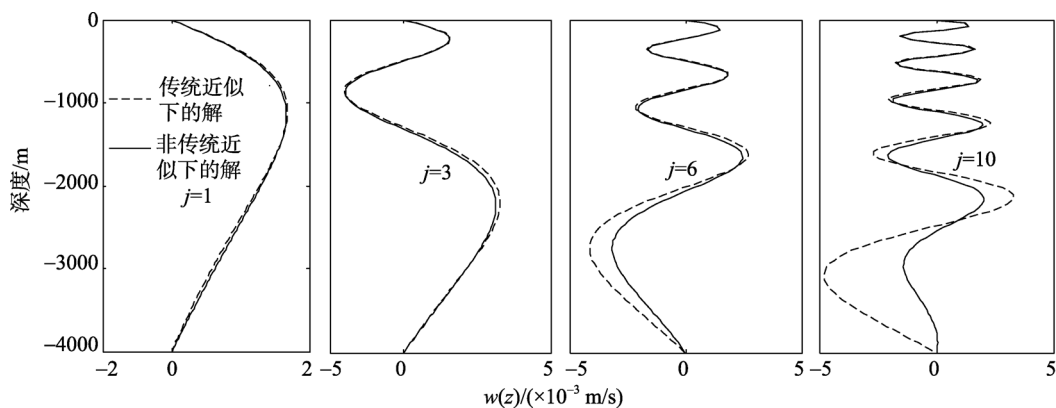


图3 非传统近似情况下 WKB 近似解与传统近似下的解之间的比较

Fig. 3 Comparison of the WKB approximate solutions under the non-traditional and traditional approximation

参考文献:

- [1] Garrett C, Munk W. Internal waves in the ocean [J]. *Annu Rev Fluid Mech*, 1979, 11: 339-369.
- [2] Garrett C, Munk W. Space-time scales of internal waves [J]. *Geophys Fluid Dyn*, 1972, 3: 225-264.
- [3] Levine M D. A modification of the Garrett-Munk internal wave spectrum [J]. *J Phys Oceanogr*, 2002, 32: 3166-3181.
- [4] Blumenthal M B, Briscoe M G. Distinguishing propagating waves and standing modes: an internal wave mode 1 [J]. *J Phys Oceanogr*, 1995, 25: 1 095-1 115.
- [5] Gerkema T, Shrira V I. Near-inertial waves in the ocean: beyond the ‘traditional approximation’ [J]. *J Fluid Mech*, 2005, 529: 195-219.
- [6] Kasahara A, Gary J M. Normal modes of an incompressible and stratified fluid model including the vertical and horizontal components of coriolis force[J]. *Tellus*, 2006, 58: 368-384.
- [7] 范植松, 方欣华. 考虑旋转向量水平分量的大洋内波方程的一个渐近解[J]. *海洋学报*, 1998, 4: 1-8.
- [8] 范植松, 方欣华. 旋转向量水平分量对大洋内波方程的影响[J]. *海洋学报*, 1998, 20(3): 129-133.
- [9] Phillips O M. 上层海洋动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1983: 250-253.

A type of WKB solutions for internal waves under the “non-traditional approximation”

LIU Yong-jun^{1,2,3}, SONG Jin-bao^{1,2}, HUANG Xiao-feng^{1,2,3}

(1. Institute of Oceanology, the Chinese Academy of Sciences, Qingdao 266071, China; 2. Key Laboratory of Ocean Circulation and Waves, the Chinese Academy of Sciences, Qingdao 266071, China; 3. Graduate University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Received: Mar., 16, 2010

Key words: coriolis parameter; internal waves; WKB(Wentzel-Kramers-Brillouin) approximation; normalization; non-traditional approximation

Abstract: In this paper, a type of WKB(Wentzel-Kramers-Brillouin)approximate analytic solutions was derived by applying the WKB method to the internal waves in continuous density-stratified ocean under the ‘non-traditional approximation’, the complete effect of the earth’ rotation being considered. The vertical velocity modes obtained from the WKB approximate solutions were compared with the numerical results to test the validity of WKB approximate solutions. The study shows that the WKB approximate solutions proposed are consistent with the numerical results, when the buoyancy frequency $N(z)$ varies gradually with the ocean depth z . In addition, by comparing the WKB solutions for non-traditional and traditional solutions of internal waves, it is found that the horizontal component of the earth’ rotation can not be ignored generally. Our results are important to the study of generation, evolution and dissipation of internal waves in the ocean.

(本文编辑: 刘珊珊)