

基于伴随同化方法的 Ekman 模型垂向涡动黏性系数时间变化研究

易家成¹, 高艳秋², 张继才¹

(1. 浙江大学 海洋学院 物理海洋研究所, 浙江 舟山 316021; 2. 国家海洋局第二海洋研究所 卫星海洋环境动力学国家重点实验室, 浙江 杭州 310012)

摘要: 为了得到一种有效的计算海水涡动黏性的途径, 本文基于伴随同化方法, 研究了 Ekman 模型中垂向涡动黏性系数(vertical eddy viscosity coefficient, VEVC)的时间变化。本文推导了时间变化 VEVC 的优化关系式, 并利用理想实验对三个影响因素进行了探究, 包括优化算法、初始猜测、观测深度, 其主要结论是: (1) 梯度下降法的优化效果优于共轭梯度法和有限记忆 BFGS(limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)法; (2) 初始猜测值与实际值接近时, 收敛速度更快, 反演误差更小; (3) 反演结果对表层和次表层的流速更为敏感。本文从百慕大试验站锚泊系统(Bermuda Testbed Mooring, BTM)的数据中提取了 Ekman 流速, 并反演了 VEVC 的时间变化, 实际实验结果表明: (1) 对于实测数据而言, 仍是梯度下降法优化效果最好; (2) 将 VEVC 设置为时间变化型的反演策略, 反演效果优于常数型和深度变化型; (3) 该地区 VEVC 在 0.01 m²/s 左右。该研究为 Ekman 流的数值模拟提供了一种确定 VEVC 时间变化的有效方法, 对于其他动力机制的研究具有一定的参考价值。

关键词: 参数反演; Ekman 模型; 伴随同化; 涡动黏性

中图分类号: P731.2 文献标识码: A 文章编号: 1000-3096(2018)12-0071-12
DOI: 10.11759/hyxx20180408002

海水涡动黏性与湍流结构密切相关, 在上层海洋运动中起重要作用^[1]。在海水混合、海洋环流、中尺度涡等动力过程的数值模型研究中, 垂向涡动黏性系数(vertical eddy viscosity coefficient, VEVC)的参数化具有重要意义^[2-4]。但 VEVC 难以被直接测量, 通常需要根据湍流模型计算, 比如依赖于 Richardson 数的模型、 $k-\varepsilon$ 模型, M-Y 模型, Prandtl 混合长模型、KPP 模型等^[5-9]。由于海洋环境往往会随空间和时间发生变化, 再加上观测数据的不足, 各个湍流模型的应用容易因普适性问题而受到限制。不同模型计算出的垂向涡动黏性系数差别较大, 没有某一个模型能精准适用于全球所有海域。

本文基于数学物理反问题的思想, 采用数据同化方法, 由观测资料反演 VEVC。数据同化方法是在严格的数学理论上发展起来的, 比如反问题理论和最优控制理论^[10]。基于最优控制方法和摄动理论的四维变分同化是海洋数据同化未来的发展方向之一^[11]。伴随同化方法作为四维变分同化方法的一种, 具有提取不同种观测数据有效信息, 同时与模型保持动力学和物理一致性的优势, 是参数反演的

有力工具^[12-13]。

Ekman 理论在物理海洋学的研究中有悠久的历史, 奠定了风生海流的理论基础。Ekman 模型具有不少优点, 例如: (1) 不需要显式地表达浮力强迫和层化效应, 而是通过黏性和边界层参数的取值反应其影响; (2) 容易求解, 便于探究具体参数的影响^[14]。Ekman 层的 VEVC 垂向结构对 Ekman 螺旋结构和 Ekman 输运都有重要影响^[15-17]。近年来, 伴随同化方法被广泛应用于 VEVC 的估计^[18-22]。在过去的研究

收稿日期: 2018-04-08; 修回日期: 2018-05-20

基金项目: 国家重点研发计划“全球变化及应对”重点专项(2017YFA0604100); 国家重点研发计划“海洋环境安全保障”重点专项(2017YFC1404000); 国家自然科学基金(41876086); 中央高校基本科研业务费专项资金

[Foundation: The National Key Research and Development Program of China, No. 2017YFA0604100; The National Key Research and Development Program of China, No. 2017YFC1404000; The Natural Science Foundation of China, No. 41876086; The Fundamental Research Funds for the Central Universities]

作者简介: 易家成(1994-), 男, 湖南长沙人, 硕士研究生, 主要研究方向为数据同化, E-mail: jcyiocean@163.com; 张继才, 通信作者, 博士, 副教授, 主要研究方向为海洋动力过程、数据同化及海洋数值建模, E-mail: jicai_zhang@163.com

中, VECV 往往被设为常数或随深度变化的量, 而和时间无关。然而海洋是一个时变系统, 海洋动力学参数也应该是随时间变化的。例如, 在不同风况下, 海面拖曳系数会随时间和风速变化^[23-24]。底摩擦系数等其他参数在时间域上也会发生变化^[25-27]。海表与海底摩擦、升降流、大小潮等因素导致的热量传递过程和垂向混合过程, 都与海水垂向涡动黏性密切相关^[28-30]。显然, 如果能在海洋模型中实现时变的 VECV, 模拟的准确性可以得到提高。因此, 本文旨在利用伴随法, 将观测资料同化到 Ekman 模型中, 对时变 VECV 的伴随同化反演进行研究。

1 模型描述

1.1 控制方程(正向模型)

在本文中, Ekman 模型的控制方程如公式(1)~公式(8)^[18]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{cases}, \quad (1)$$

相应的边界条件为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{C_D}{A} \frac{\rho_a}{\rho_w} \sqrt{u_a^2 + v_a^2} u_a, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{C_D}{A} \frac{\rho_a}{\rho_w} \sqrt{u_a^2 + v_a^2} v_a, \quad (2)$$

$$A \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=-H_0} = 0, \quad A \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=-H_0} = 0, \quad (3)$$

相应的初始条件为

$$u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad (4)$$

其中, z 轴向上为正且海表面处 $z=0$, $u(z)$ (向东为正)和 $v(z)$ (向北为正)为各深度水平方向的流速分量; f 为科氏参数(常值), C_D 为风应力拖曳系数, A 为涡动黏性系数; ρ_a 和 ρ_w 分别为空气和水的密度, u_a 和 v_a 是风速的分量, H_0 为 Ekman 层的深度, u_0 和 v_0 是初始流速。

在本文中, 模型参数设置如下:

$f=10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (中纬度海域);

$u_0(j)=0.01 \cos[\pi/4-(j-0.5)\pi/20]e^{-(j-0.5)\pi/20} \text{ m/s}$, $v_0(j)=0.01 \sin[\pi/4-(j-0.5)\pi/20]e^{-(j-0.5)\pi/20} \text{ m/s}$ (生成厘米级初始流速, 其中 j 为层数);

$u_a=10 \sin(2\pi i \Delta t/T_0) \text{ m/s}$ (生成周期性变化风速, 其中 i 为时间步), $v_a=0$ (假设只有东西向风速);

$T_0=10 \text{ h}$ (风速变化周期), $T=10 \text{ d}$ (总积分时间),

$\Delta t=0.5 \text{ h}$ (时间步长);

$C_D=1.2 \times 10^{-3}$; $A(i)=0.02 \times [1.2+0.5 \sin(2\pi i \Delta t/24T_0)+0.5 \cos(2\pi i \Delta t/4T_0)] \text{ m}^2/\text{s}$, (其中 i 为时间步);

$\rho_a=1.2 \text{ kg/m}^3$, $\rho_w=1.025 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$;

$H_0=100 \text{ m}$, $\Delta z=5 \text{ m}$ 。

由于控制方程中变量具有不同的单位和量级, 为了使方程具有更好的通用性, 我们参考前人工作^[18], 进行了变量替换。由此得到方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - v = \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u = \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{cases}, \quad (5)$$

相应的边界条件为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = C_D \sqrt{u_a^2 + v_a^2} u_a, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = C_D \sqrt{u_a^2 + v_a^2} v_a, \quad (6)$$

$$A \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=-H_0} = 0, \quad A \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=-H_0} = 0, \quad (7)$$

相应的初始条件为

$$u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (8)$$

1.2 伴随方程(反向模型)

构造代价函数

$$J(u, v, A) = \frac{1}{2} K_m \int_t \int_z \left((u - \hat{u})^2 + (v - \hat{v})^2 \right) dz dt, \quad (9)$$

其中, \hat{u} 和 \hat{v} 为流速观测值; K_m 为权重矩阵, 在本文中设为单位矩阵^[31]。

构造拉格朗日函数

$$L(u, v, A, \lambda, \mu) = J +$$

$$\int_t \int_z \left[\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial t} - v - \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u - \left(A \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right) \right] dz dt, \quad (10)$$

其中, λ 和 μ 分别是 u 和 v 的拉格朗日乘子(又称为伴随变量), 代价函数在控制方程约束下的最小化问题, 变成寻找拉格朗日函数梯度消失时的 u , v , A , λ 和 μ 的驻点问题。由此得到以下方程:

$$\frac{\partial L(u, v, A, \lambda, \mu)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial L(u, v, A, \lambda, \mu)}{\partial \mu} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial L(u, v, A, \lambda, \mu)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial L(u, v, A, \lambda, \mu)}{\partial v} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial L(u, v, A, \lambda, \mu)}{\partial A} = 0. \quad (13)$$

方程组(11)对应原始的控制方程, 方程组(12)得到伴随方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial t} - \mu + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) = K_m (u - \hat{u}) \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} + \lambda + \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) = K_m (v - \hat{v}) \end{cases}, \quad (14)$$

相应的边界条件为

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mu}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right|_{z=-H_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mu}{\partial z} \right|_{z=-H_0} = 0, \quad (16)$$

相应的初始条件为

$$\lambda|_{t=T} = 0, \quad \mu|_{t=T} = 0. \quad (17)$$

对控制方程进行正向积分, 得到模拟流速值; 对伴随方程进行反向积分, 得到伴随变量值。一般来说, 反向积分时间等于正向积分时间^[32]。

涡动黏性系数 $A(t)$ 的值, 可由方程(13)结合优化算法进行反演得到。

1.3 优化算法

利用方程(13), 可求解代价函数关于涡动黏性系数的梯度。

若将 VECV 视为恒定值:

$$\frac{\partial J}{\partial A} = - \int_t \int_z \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz dt. \quad (18)$$

若考虑 VECV 的深度变化:

$$\frac{\partial J}{\partial A(z)} = - \int_t \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dt. \quad (19)$$

在本文中, 考虑 VECV 的时间变化:

$$\frac{\partial J}{\partial A(t)} = - \int_z \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz. \quad (20)$$

结合梯度与优化算法, 即可反演涡动黏性系数:

$$A_{n+1} = A_n + \alpha_n d_n, \quad (21)$$

其中, A_n 和 A_{n+1} 为第 n 次迭代中涡动黏性系数的当前值和调整值, α_n 和 d_n 分别代表迭代步长和搜索方向。经过反复调试^[33], 在本文中 α_n 设为 4.0×10^{-4} 。确定 d_n 有多种可行的优化算法^[34], 本文应用了其中三种, 分别是梯度下降法 (gradient descent, GD)、共轭梯度法 (quasi-Newton conjugate gradient, CG) 和有限记忆 BFGS (limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno, L-BFGS) 法。

在梯度下降法中, 搜索方向为:

$$d_n = -g_n = - \left(\frac{\partial J}{\partial A} \right)_n^0 = - \frac{(\partial J / \partial A)_n}{\|(\partial J / \partial A)_n\|}, \quad (22)$$

其中, $(\partial J / \partial A)_n$ 是第 n 次迭代中代价函数关于涡动黏

性系数的梯度, 而 $\|(\partial J / \partial A)_n\|$ 是其 L_2 范数。

在共轭梯度法中, 搜索方向被定义为共轭方向:

$$d_n = -g_n + \frac{\|g_n\|^2}{\|g_{n-1}\|^2} d_{n-1}. \quad (23)$$

L_BFGS 法是有限记忆的 BFGS 法, 它要求搜索方向满足^[35]:

$$d_n = -H_n g_n, \quad (24)$$

其中,

$$\begin{aligned} H_n = & (V_{n-1}^T \cdots V_{n-m}^T) H_0 (V_{n-m} \cdots V_{n-1}) \\ & + \rho_{n-m} (V_{n-1}^T \cdots V_{n-m+1}^T) s_{n-m} s_{n-m}^T (V_{n-m+1} \cdots V_{n-1}) \\ & + \rho_{n-m+1} (V_{n-1}^T \cdots V_{n-m+2}^T) s_{n-m+1} s_{n-m+1}^T (V_{n-m+2} \cdots V_{n-1}) \\ & + \cdots \\ & + \rho_{n-1} s_{n-1} s_{n-1}^T. \end{aligned} \quad (25)$$

在方程(25)中, $\rho_n = 1/s_n y_n^T$, $V_n = 1 - \rho_n y_n s_n^T$, $s_n = A_{n+1} - A_n = \alpha_n d_n$, $y_n = g_{n+1} - g_n$; m 是校正对的数量, 通常取在 3~7, 本文中设为 5^[36]。

2 理想试验

为了验证模型的合理性和可行性, 设计若干组理想孪生实验, 分别探讨优化算法、初始猜测、观测深度等因素对实验结果的影响。具体步骤如下:

(1) 以涡动黏性系数的给定值运行正向模型, 将模拟流速视为观测值;

(2) 以涡动黏性系数的猜测值 (初始猜测值 $A_1 = 0.002 \text{ m}^2/\text{s}$) 运行正向模型, 得到流速模拟值;

(3) 以流速观测值和模拟值的差驱动反向模型, 对猜测值进行优化;

(4) 重复步骤(2)和(3), 直至结果满足收敛性判别标准, 得到涡动黏性系数的最终反演值。

2.1 优化算法的影响

GD、CG 和 L-BFGS 是三种常用的优化算法。一些研究表明, L-BFGS 法相对于其他算法具有明显优越性^[37-39]; 不过, 也有研究认为 GD 法反演的结果更好^[40-41]。为此, 我们设计了一组实验探讨三种算法的优劣。

在参数优化的过程中, 迭代了足够多步, 选取其中最好的结果进行展示分析。本组垂向涡动黏性系数的给定值和反演值如图 1a 所示, 代价函数下降情况如图 1b 所示。同化后的代价函数和均方根误差见表 1。

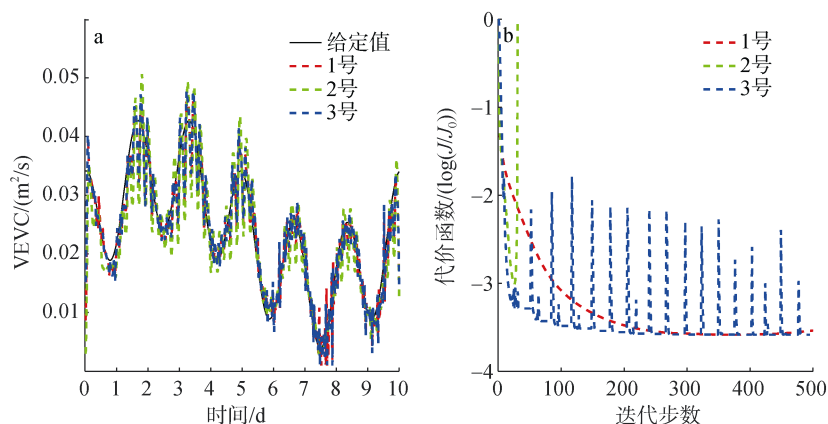


图 1 第 1 组的垂向涡动黏性系数给定值与反演值(a)和代价函数(b)

Fig. 1 Prescribed and inverted VEVs (a) and cost functions (b) in Group 1

注: VEV 表示垂向涡动黏性系数

Note: VEV is the abbreviations for vertical eddy viscosity coefficient

表 1 第 1 组同化后的代价函数和均方根误差

Tab. 1 Cost functions and RMSEs after assimilation in Group 1

编号	算法	代价函数		均方根误差	
		J	J/J_0	RMSE	RMSE/RMSE ₀
1	GD	6.7×10^{-5}	2.6×10^{-4}	3.4×10^{-3}	1.4×10^{-1}
2	CG	2.6×10^{-4}	9.8×10^{-4}	4.8×10^{-3}	2.0×10^{-1}
3	L-BFGS	6.9×10^{-5}	2.6×10^{-4}	3.3×10^{-3}	1.3×10^{-1}

在本组实验中, 三个算例的代价函数都下降了 4 个数量级, 均方根误差都下降了 1 个数量级, 均得到了不错的结果。其中 2 号和 3 号的收敛速度高于 1 号, 1 号和 3 号的反演结果明显好于 2 号。综合考虑, 和另外两种算法相比, GD 法处理本问题的效果更好。因此, 在以下的实验中, 我们选取 GD 法来进行反演。

2.2 初始猜测的影响

合理的初猜测值可以提高反演结果, 加快收敛速度^[42]。因此, 我们设计了本组实验以探究不同初始猜测值对本模型反演结果的影响。本组垂向涡动黏性系数的给定值和反演值如图 2a 所示, 代价函数下降情况如图 2b 所示。同化后的代价函数和均方根误差见表 2。

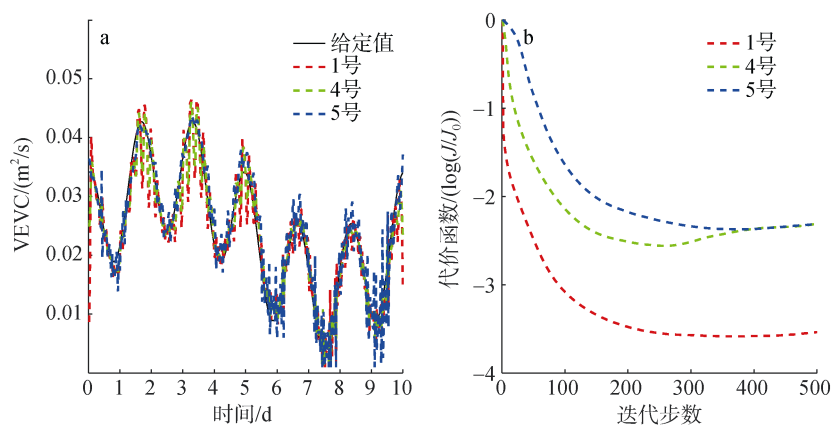


图 2 第 2 组的垂向涡动黏性系数给定值与反演值(a)和代价函数(b)

Fig. 2 Prescribed and inverted VEVs (a) and cost functions (b) in Group 2

表 2 第 2 组同化后的代价函数和均方根误差

Tab. 2 Cost functions and RMSEs after assimilation in Group 2

编号	初始猜测值	代价函数		均方根误差	
		J	J/J_0	RMSE	RMSE/RMSE ₀
1	0.002	6.7×10^{-5}	2.6×10^{-4}	3.4×10^{-3}	1.4×10^{-1}
4	0.02	3.6×10^{-5}	2.8×10^{-4}	2.2×10^{-3}	2.1×10^{-1}
5	0.04	1.0×10^{-4}	4.8×10^{-3}	2.7×10^{-3}	1.4×10^{-1}

本组实验中，三个算例的反演结果都接近一开始的给定值。在同化后，代价函数下降了 3~4 个数量级，均方根误差下降了 1 个数量级。1 号实验的初始猜测值最小，优化效果最显著。4 号实验的初始猜测值与给定分布的平均值最接近，所需迭代步数最少，反演误差也最小。实验表明，与实际值接近的初始猜测值能提高反演结果。处理实测数据时，可以参考其他文献中的涡动黏性估计结果^[29, 43-44]，给定合适的初始猜测值。

在以下的实验中，为了展示明显的同化前后结果对比，仍采用较小的初始猜测值。

2.3 观测深度的影响

在以上几组实验中，我们用到了所有层的流速数据。然而在实际操作中，由于观测仪器盲区等原因，在某些深度上很可能没有观测数据。吕咸青^[45]曾仅

凭对海洋表层和次表层的“观测”，反演出海洋涡动黏性剖面。在本组实验中，我们也进行了类似的尝试，即通过部分层的数据来进行反演，探究数据缺失对结果的影响。

本组垂向涡动黏性系数的给定值和反演值如图 3a 所示，代价函数下降情况如图 3b 所示。同化后的代价函数和均方根误差见表 3。

从代价函数下降情况来看，使用的数据越少，收敛速度越快。就反演结果而言，6 号优于 7 号，但与使用全部层的流速相比仍略逊一筹。这说明反演结果对表层和次表层的流速比较敏感，而较深层流速对反演结果的贡献较小，与 Ekman 理论相符合。不过整体而言，本组实验都成功地反演了 VEC 的时间变化，说明本模型能在一定程度上适应观测比较缺乏的海洋环境。

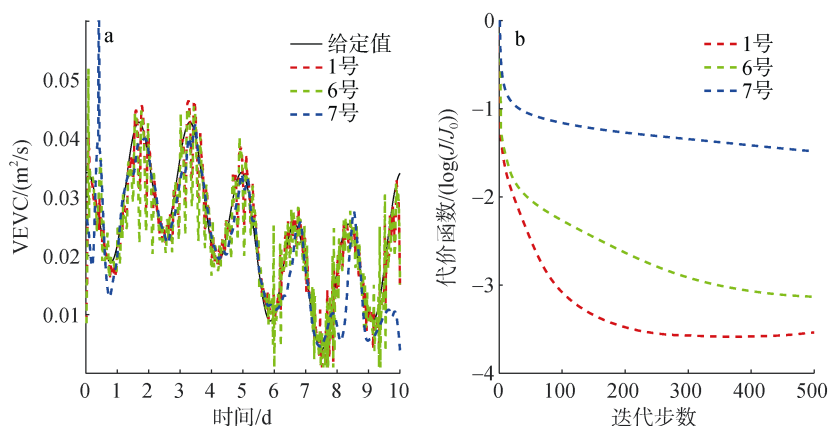


图 3 第 3 组的垂向涡动黏性系数给定值与反演值(a)和代价函数(b)

Fig. 3 Prescribed and inverted VECs (a) and cost functions (b) in Group 3

表 3 第 3 组同化后的代价函数和均方根误差

Tab. 3 Cost functions and RMSEs after assimilation in Group 3

编号	深度/m	代价函数		均方根误差	
		J	J/J_0	RMSE	RMSE/RMSE ₀
1	0~100	6.7×10^{-5}	2.6×10^{-4}	3.4×10^{-3}	1.4×10^{-1}
6	0~10	1.8×10^{-4}	6.7×10^{-4}	4.9×10^{-3}	2.0×10^{-1}
7	25~100	5.1×10^{-3}	1.9×10^{-2}	6.3×10^{-3}	2.6×10^{-1}

3 实际实验

3.1 数据描述

本文研究的区域为百慕大群岛邻近海域(如图 4a 所示)。这片区域极端事件频发, 1851~2005 年期间受到 188 次热带风暴和飓风袭击^[46], 是研究上层海洋响应风应力变化的理想区域。

本文的研究数据来自百慕大试验站锚泊系统(Bermuda testbed mooring, BTM)第 24 次部署(如图 4b 所示)。BTM 是位于百慕大东南 80 km 处的深水平台, 自 1994 年开始部署。它能在传统采样无法进行的恶劣天气保持观测, 收集高时间分辨率的长时间序列数据, 可用于开发测试新仪器、收集跨学科数据, 以及为卫星遥感传感器提供标定和验证数据^[47-48]。

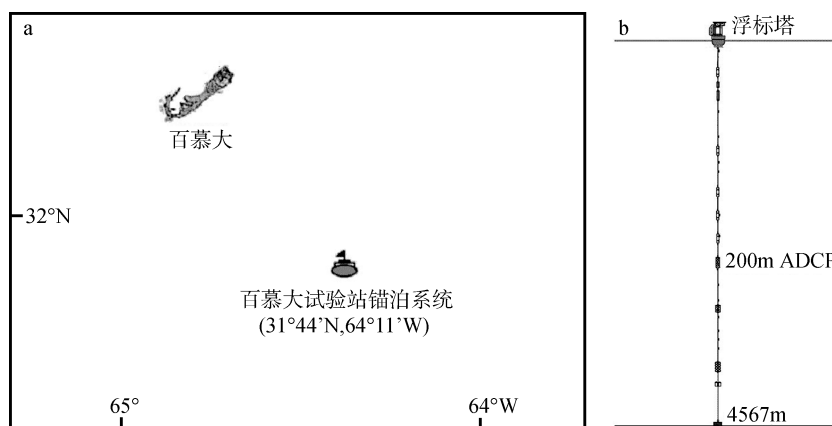


图 4 研究区域和 BTM 站位位置(a)以及观测仪器示意图(b)
Fig. 4 Study area and BTM position (a) and observation instruments diagram (b)

风速数据由海表面的浮标塔测量, 时间分辨率为 5 min。风速及风应力时间序列如图 5a 所示。流速数据由 200 m 深处的声学多普勒流速剖面仪(acoustic Doppler current profiler, ADCP)测量, 时间分辨率为 15 min, 垂向分辨率为 3 m, 采样深度为 26.52~191.52 m。26.52 m 处流速时间序列如图 5b 所示。

我们选取 2006 年 8 月 9 日 0 点~2006 年 8 月 19 日 0 点时段的数据, 拟从中提取 Ekman 流分量, 并将流速插值到 25~100 m 深度用于本文的同化模型。

所示), 近惯性频段与全日潮 P_1 、 K_1 两个分潮频率比较接近。对观测流速进行希尔伯特变换(Hilbert transform)带通滤波处理, 提取频段范围取为 $[0.96 \ 1.2]f_i$, 其中 f_i 为当地惯性频率。选择该范围既能够避免全日潮信号污染, 又能够最大限度提取近惯性流。过滤前后的流速对比如图 6b 所示。

3.2 数据处理

3.2.2 分离地转流

3.2.1 滤除潮流

利用带通滤波可以从观测流速中提取近惯性流分量^[22, 49]。对流速时间序列进行频谱分析(如图 6a

$$U_{ni} = U_{ek} + U_{geo}. \quad (26)$$

如公式(28)所示, 近惯性流速 U_{ni} 由 Ekman 流速(风生流速) U_{ek} 和地转流速 U_{geo} 两大组分构成。在以往的研究中, 常选取一个地转参考零面, 将该深度以下的流速(视为恒定值)作为地转参考速度^[50-51]。然而, 由于地转剪切的存

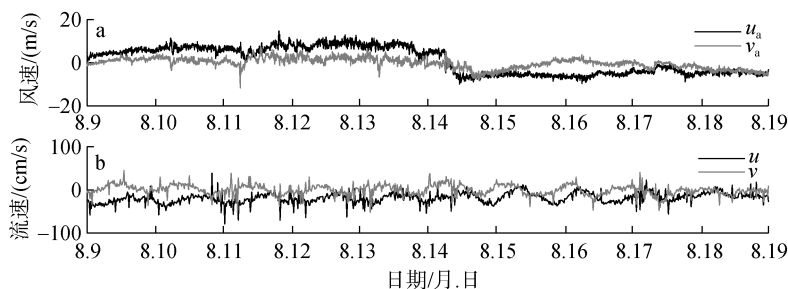


图 5 风速(a)和 26.52 m 处的流速时间序列(b)
Fig. 5 Wind velocity (a) and current velocity time series at 26.52 m (b)

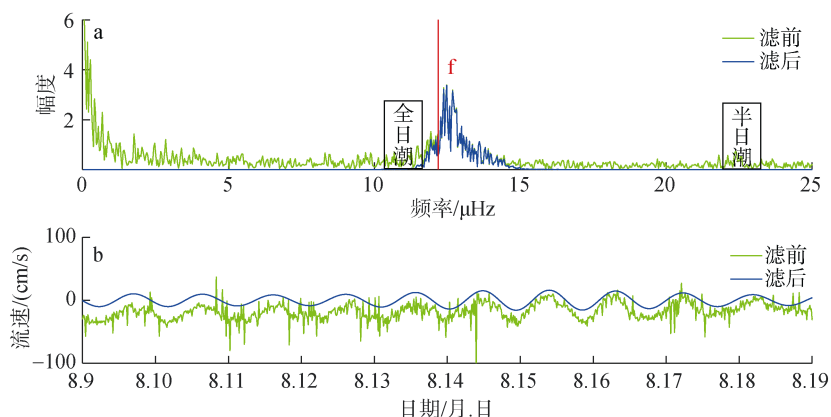


图 6 流速频谱(a)和滤波处理前后的流速(b)

Fig. 6 Frequency spectrum (a) and velocities before and after filtering (b)

可能导致对一部分地转流速与 Ekman 流速发生混叠,造成对 Ekman 流速的错误估计^[52-53]。为此,我们参考 Roach 等的做法,将地转剪切也考虑进来,把地转流速拆分为两部分^[54]:

$$U_{ni} = U_{ek} + U_{deep} + \frac{dU_{geo}}{dz} z, \quad (27)$$

其中, U_{deep} 是恒定的地转参考速度, dU_{geo}/dz 是恒定的地转剪切。

提取出的近惯性流的典型流速剖面如图 7a 所示, 140 m 以下流速变化很小, 因此 U_{deep} 取为 140 m 以下的近惯性流速平均值; 考虑到模型深度设为 100 m,

因此 dU_{geo}/dz 取为 100~140 m 近惯性流速切变平均值。提取出的 Ekman 流的典型流速剖面如图 7b 所示。

3.3 优化算法

对抛物化 Navier-Stokes 方程模型的研究发现, 有无黏性可能对优化算法的反演结果产生影响^[3]。而基于内潮模型反演开边界条件的研究发现, 当同化的观测包括未知边界附近区域时, L-BFGS 法表现最好, 而当同化的观测仅包括远离未知边界的区域时, 只有 GD 法才能取得令人满意的结果^[55]。这说明理想实验和实际实验的结果可能略有不同。

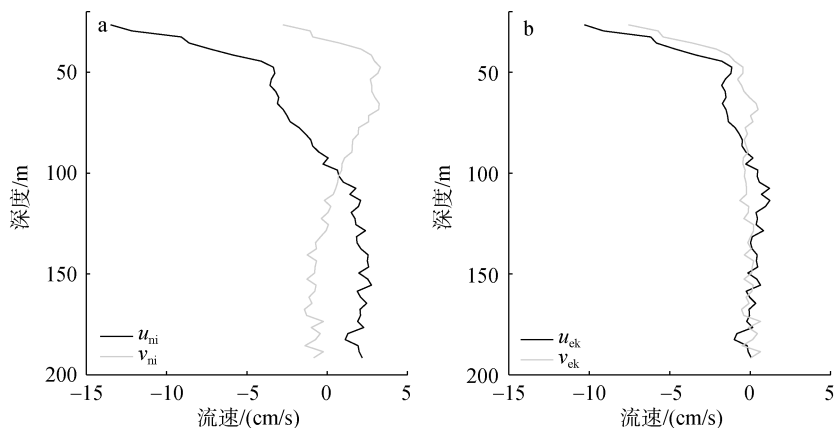


图 7 分离地转流之前(a)和之后(b)典型流速剖面

Fig. 7 Typical velocity profiles before (a) and after (b) isolating the geostrophic current

注: u_{ni} 和 v_{ni} 表示近惯性流速 U_{ni} 的分量, u_{ek} 和 v_{ek} 表示风生流速 U_{ek} 的分量

Note: u_{ni} and v_{ni} are velocities of approximate inertial manifold U_{ni} , u_{ek} and v_{ek} are velocities of Ekman flow U_{ek}

为了验证在实际实验中, 三种优化算法的表现是否跟理想实验一致, 我们设置了本组实验。本组 VEC 的反演值如图 8a 所示, 代价函数下降情况如图 8b 所示。同化后的代价函数和 VEC 平均值见表 4。

同化一开始, 三个算例的代价函数下降速度差不多。但 9 号和 10 号的下降很快陷入停滞, 只有 8 号代价函数下降最为显著, 为同化前的 67%。结果表明, GD 法在实际实验中的表现最好, 这与理想实验

结果一致。因此, GD 法虽然比较简单, 但因其可控且易于实施的特性, 在实际应用中仍具有强大竞争

力。在本文接下来的实际实验中, 我们同样采用了 GD 法。

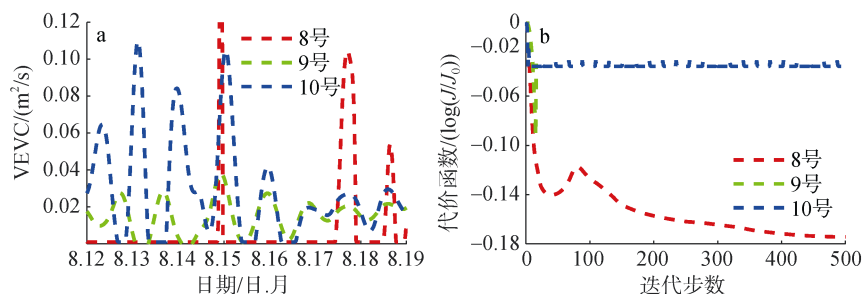


图 8 第 5 组的垂向涡动黏性系数反演值(a)和代价函数(b)

Fig. 8 Inverted VECs (a) and cost functions (b) in Group 5

表 4 第 4 组同化后的代价函数和 VEC 平均值
Tab. 4 Cost functions and RMSEs after assimilation in Group 4

编号	算法	代价函数		VEVC 平均值 /(m ² /s)
		J	J/J_0	
8	GD	7.4	67%	0.010
9	CG	8.8	80%	0.017
10	LBFGS	10.5	92%	0.027

3.4 反演策略

对风暴潮的数值模拟研究发现, 与将风应力拖曳系数设为常数的参数化方案相比, 将其设为随风速变化的方案模拟结果误差更小^[56]。二维潮波模型的底摩擦系数反演研究说明, 反演策略假定的参数分布情况与实际分布一致时, 取得的反演结果最好^[57]。以往反演 Ekman 模型 VEC 的研究, 一般把 VEC 设为随深度变化而忽视其时间变化^[18, 42, 46]。但大量研究表明, VEC 同样有很强的时间变化

特征^[28-30]。

为了对比不同方案的优劣, 我们在本组实验中采取了三种反演策略: (1)恒定; (2)深度变化; (3)时间变化。本组时间平均的流速剖面如图 9a 所示, 25 m 处 u 向流速时间序列如图 9b 所示。同化后的代价函数和 VEC 平均值见表 5。

由表 5 可知, 11 号同化后的代价函数为同化前的 95%, 下降很小, 说明恒定型 VEC 的反演策略优化效果很弱。12 号的这一数值为 78%, 比 11 号小, 但不及 8 号的 67%。这说明深度变化型的反演结果相比于恒定型有一定进步, 却还是比不上时间变化型。从图 9 可以看出, 采用时间变化型 VEC 反演策略的流速模拟结果, 最接近观测值。由此可以得出结论, 时间变化型反演策略相较于其他两种策略具备一定优越性。相对而言, 时间变化结合深度变化更为合理, 但独立变量的增加将会加剧反问题不适定性的影响, 如何克服这一限制, 将有待未来研究。

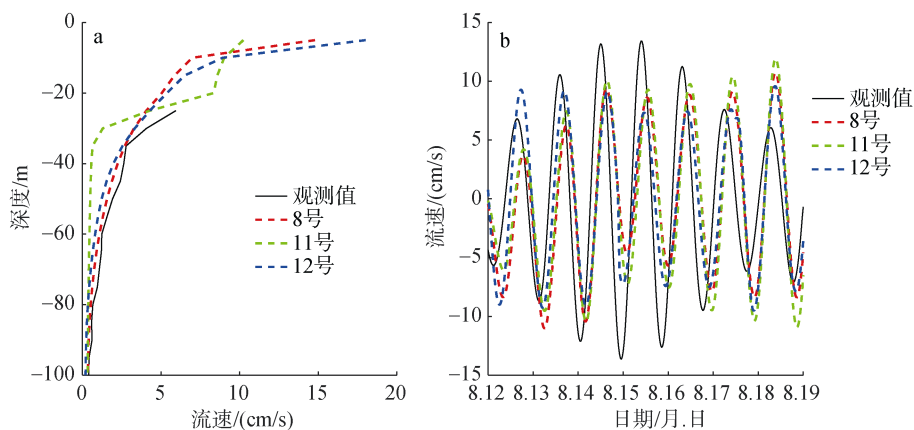


图 9 第 5 组的时间平均流速剖面(a)和 25 m 流速时间序列(b)

Fig. 9 Time-averaged velocity profiles (a) and U -velocity time series at 25m (b) in Group 5

表 5 第 5 组同化后的代价函数和 VEC 平均值
Tab. 5 Cost functions and RMSEs after assimilation in Group 5

编号	VEVC	代价函数		VEVC 平均值 (m ² /s)
		<i>J</i>	<i>J</i> / <i>J</i> ₀	
11	恒定	10.5	95%	0.0099
12	深度变化	8.6	78%	0.024
8	时间变化	7.4	67%	0.010

根据实验结果, 研究区域的 VEC 在 0.01 m²/s 左右, 且具有较大的波动。不同研究中得到的 VEC

表 6 不同研究中得到的 VEC 大小
Tab. 6 Amplitude of the VEC obtained by different studies

研究者	区域	VEVC/(m ² /s)
Price 等, 1987 ^[58]	西马尾藻海(35°N)	0.006(按大小)
		0.054(按相位)
Weller, 1991 ^[59]	加利福尼亚沿岸(32°N)	0.005(按大小)
		0.05(按相位)
Chereskin, 1995 ^[50]	加利福尼亚流(37°N)	0.0274(按大小)
		0.1011(按相位)
Lenn 等, 2009 ^[51]	德雷克海峡(54°~64°S)	0.0308(按大小)
		0.221(按相位)
Elipot 等, 2009 ^[14]	南大洋(30°~60°S)	0.04~0.118
Polton 等, 2013 ^[53]	德雷克海峡(54°~64°S)	0.08~0.12
Roach 等, 2015 ^[54]	凯尔盖朗群岛以北(40°~50°S)	0.05~0.25

4 结论

本文提出了基于伴随同化技术反演 Ekman 模型 VEC 时间变化的方法。通过一系列理想实验和实际实验中对优化算法、初始猜测值、观测深度、反演策略等因素进行了探究, 验证了方法的有效性。主要结论包括:

(1) L-BFGS 法和 CG 法代价函数下降速度快于 GD 法, L-BFGS 法和 GD 法的准确性高于 CG 法, 综合来看优化效果最好的是 GD 法; 而在实际应用中, 可控且易于实施的 GD 法相较于 L-BFGS 法和 CG 法仍然具有一定优势。(2) 合理的初始猜测值能改善实验结果。初始猜测值与实际值接近时, 反演所需的步数减少, 最终误差变小。(3) 使用不同观测深度的流速反演时, 结果有所不同。本模型对表层和次表层的流速更为敏感。(4) 将 VEC 设为时间变化型的反演策略, 比恒定型和深度变化型更具优越性。

此外, 本文利用从 BTM 数据中提取的 Ekman 流成功反演了该地区的 VEC, 并将其与南大洋等地

大小如表 6 所示, 量级一般为 $O(10^{-1} \sim 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s})$ 。对比可知, 本文得到的 VEC 量级与它们大体范围一致。不少研究发现, 按流速随深度的大小衰减和按流速随深度的相位变化计算得到的 VEC 相差 8~10 倍, 这被认为是层化现象导致的^[51-52, 58-59]。而在南大洋的研究证明, 两种方式计算结果的差异可以用地转剪切来解释^[53, 55]。本文在提取 Ekman 流时, 已经考虑了地转剪切的影响, 然而得到的 VEC 值与他们的结果相比仍偏小。可能的原因是本文使用的观测数据来自中低纬度的 Bermuda 试验站锚泊系统, 层化现象比南大洋要强。

区的数值进行了对比。总的来说, 本文提出的方法能适应各种不同的实验情况, 并且在百慕大地区得到了初步应用。这项工作增进了我们对 Ekman 模型的理解, 并提供了一种有效的方法来确定 VEC 的时间变化。

参考文献:

[1] Paskyabi M B, Fer I. Turbulence structure in the upper ocean: a comparative study of observations and modeling[J]. *Ocean Dynamics*, 2014, 64(4): 611-631.

[2] Davies A M, Xing J. The influence of eddy viscosity parameterization and turbulence energy closure scheme upon the coupling of tidal and wind induced currents[J]. *Estuarine Coastal and Shelf Science*, 2001, 53(4): 415-436.

[3] Chassignet E P, Garraffo Z D. Viscosity parameterization and the Gulf Stream separation [R]. Miami: Rosenstiel School of Marine and Atmospheric Science, University of Miami, 2001.

[4] Zhao R, Vallis G K. Parameterizing mesoscale eddies with residual and Eulerian schemes, and a comparison with eddy-permitting models[J]. *Ocean Modelling*, 2008:

- 1-12.
- [5] Pacanowski R C, Philander S G. Parameterization of Vertical Mixing in Numerical Models of Tropical Oceans[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1981, 11(11): 1443-1451.
- [6] Ferreira V G, Mangiavacchi N, Tome M F, et al. Numerical simulation of turbulent free surface flow with two-equation $k-\epsilon$ eddy-viscosity models[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2004, 44(4): 347-375.
- [7] Mellor G L. User's guide for a three-dimensional, primitive equation, numerical ocean model[M]. Princeton: Princeton University, 2004: 56.
- [8] Odier P, Chen J, Rivera M K, et al. Fluid mixing in stratified gravity currents: the Prandtl mixing length[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(13): 134504.
- [9] Wang Y, Qiao F, Fang G, et al. Application of wave-induced vertical mixing to the K profile parameterization scheme[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2010, 115: C09014.
- [10] Thacker W C, Long R B. Fitting dynamics to data[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 1988, 93(C2): 1227-1240.
- [11] Kazantsev E. Sensitivity of a Shallow-Water Model to Parameters[J]. *Nonlinear Analysis-real World Applications*, 2012, 13(3): 1416-1428.
- [12] Navon I M. Practical and theoretical aspects of adjoint parameter estimation and identifiability in meteorology and oceanography[J]. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*, 1998, 27(1-4): 55-79.
- [13] Zhang J, Lu X. Parameter estimation for a three-dimensional numerical barotropic tidal model with adjoint method[J]. *International journal for numerical methods in fluids*, 2008, 57(1): 47-92.
- [14] Elipot S, Gille S T. Ekman layers in the Southern Ocean: spectral models and observations, vertical viscosity and boundary layer depth[J]. *Ocean Science*, 2009, 5(2): 115-139.
- [15] Lentz S J. Sensitivity of the Inner-Shelf Circulation to the Form of the Eddy Viscosity Profile[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1995, 25(1): 19-28.
- [16] McWilliams J C, Huckle E, Shchepetkin A F, et al. Buoyancy Effects in a Stratified Ekman Layer[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 2009, 39(10): 2581-2599.
- [17] Wirth A. On the Ekman Spiral with an Anisotropic Eddy Viscosity[J]. *Boundary-Layer Meteorology*, 2010, 137(2): 327-331.
- [18] Yu L, Obrien J J. Variational Estimation of the Wind Stress Drag Coefficient and the Oceanic Eddy Viscosity Profile[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1991, 21(5): 709-719.
- [19] Panchang V G, Richardson J E. Inverse Adjoint Estimation of Eddy Viscosity for Coastal Flow Models[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1993, 119(4): 506-524.
- [20] Lardner R W, Song Y. Optimal estimation of Eddy viscosity and friction coefficients for a Quasi-three-dimensional numerical tidal model[J]. *Atmosphere-ocean*, 1995, 33(3): 581-611.
- [21] Zhang J, Lu X. Parameter estimation for a three-dimensional numerical barotropic tidal model with adjoint method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2008, 57(1): 47-92.
- [22] Zhang Y, Tian J, Xie L. Estimation of eddy viscosity on the South China Sea shelf with adjoint assimilation method[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2009, 28(5): 9-16.
- [23] Jarosz E, Mitchell D A, Wang D W, et al. Bottom-up determination of air-sea momentum exchange under a major tropical cyclone[J]. *Science*, 2007, 315(5819): 1707-1709.
- [24] Maurer K D, Bohrer G, Kenny W T, et al. Large-eddy simulations of surface roughness parameter sensitivity to canopy-structure characteristics[J]. *Biogeosciences*, 2015, 12(8): 2533-2548.
- [25] Lacy J R, Sherwood C R, Wilson D J, et al. Estimating hydrodynamic roughness in a wave-dominated environment with a high-resolution acoustic Doppler profiler[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2005, 110: C06014.
- [26] Lozovatsky I, Liu Z, Wei H, et al. Tides and mixing in the northwestern East China Sea, Part II: Near-bottom turbulence[J]. *Continental Shelf Research*, 2008, 28(2): 338-350.
- [27] Gwyther D E, Galton-Fenzi B K, Dinniman M S, et al. The effect of basal friction on melting and freezing in ice shelf-ocean models[J]. *Ocean Modelling*, 2015, 95: 38-52.
- [28] Pohlmann T. Calculating the annual cycle of the vertical eddy viscosity in the North Sea with a three-dimensional baroclinic shelf sea circulation model[J]. *Continental Shelf Research*, 1996, 16(2): 147-161.
- [29] Kirincich A R, Barth J A. Time-varying across-shelf Ekman transport and vertical eddy viscosity on the inner shelf[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 2009, 39(3): 602-620.
- [30] Yoshikawa Y, Endoh T, Matsuno T, et al. Turbulent bottom Ekman boundary layer measured over a continental shelf[J]. *Geophysical Research Letters*, 2010, 37: L15065.
- [31] Yu L, O'Brien J J. On the initial condition in parameter estimation[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 1992, 22(11): 1361-1364.
- [32] Zhang J, Lu X. Inversion of three-dimensional tidal

- currents in marginal seas by assimilating satellite altimetry[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, 199(49-52): 3125-3136.
- [33] Hulsmann M, Koddermann T, Vrabec J, et al. GROW: A gradient-based optimization workflow for the automated development of molecular models[J]. *Computer Physics Communications*, 2010, 181(3): 499-513.
- [34] Zhu Y, Navon I M. Impact of parameter estimation on the performance of the FSU global spectral model using its full-physics adjoint[J]. *Monthly Weather Review*, 1999, 127(7): 1497-1517.
- [35] Liu D C, Nocedal J. On the limited memory BFGS method for large scale optimization[J]. *Mathematical Programming*, 1989, 45(3): 503-528.
- [36] Alekseev A K, Navon I M, Steward J L, et al. Comparison of advanced large-scale minimization algorithms for the solution of inverse ill-posed problems[J]. *Optimization Methods & Software*, 2009, 24(1): 63-87.
- [37] Jin G, Liu Q, Lv X, et al. Inversion study of vertical eddy viscosity coefficient based on an internal tidal model with the adjoint method[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015: 915793.
- [38] Zou X, Navon I M, Berger M, et al. Numerical experience with limited-memory quasi-Newton and truncated Newton methods[J]. *Siam Journal on Optimization*, 1993, 3(3): 582-608.
- [39] Zhang J, Wang Y. A method for inversion of periodic open boundary conditions in two-dimensional tidal models[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, 275: 20-38.
- [40] Vrahatis M N, Androulakis G S, Lambrinos J N, et al. A class of gradient unconstrained minimization algorithms with adaptive stepsize[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 114(2): 367-386.
- [41] Zhang Q, Gao Y, Lv X, et al. Estimation of oceanic eddy viscosity profile and wind stress drag coefficient using adjoint method[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015: 309525.
- [42] Dattner I. A model-based initial guess for estimating parameters in systems of ordinary differential equations[J]. *Biometrics*, 2015, 71(4): 1176-1184.
- [43] Leredde Y, Devenon J, Dekeyser I, et al. Turbulent viscosity optimized by data assimilation[J]. *Annales Geophysicae*, 1999, 17(11): 1463-1477.
- [44] Yoshikawa Y, Endoh T. Estimating the eddy viscosity profile from velocity spirals in the Ekman boundary layer[J]. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 2015, 32(4): 793-804.
- [45] 吕咸青. 数据同化反演风应力拖曳系数以及垂向涡动黏性系数的分布[J]. *海洋学报*, 2001, 23(1): 13-20.
- Lv Xianqing. Deducing the wind stress drag coefficient and the oceanic eddy viscosity profile by data assimilation[J]. *Acta Oceanologica Sinica*, 2001, 23(1): 13-20.
- [46] Black W, Dickey T D. Observations and analyses of upper ocean responses to tropical storms and hurricanes in the vicinity of Bermuda[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2008, 113: C08009.
- [47] Dickey T D, Frye D, McNeil J, et al. Upper-ocean temperature response to hurricane Felix as measured by the Bermuda Testbed Mooring[J]. *Monthly Weather Review*, 1998, 126(5): 1195-1201.
- [48] Jiang S, Dickey T D, Steinberg D K, et al. Temporal variability of zooplankton biomass from ADCP backscatter time series data at the Bermuda Testbed Mooring site[J]. *Deep-sea Research Part I-oceanographic Research Papers*, 2007, 54(4): 608-636.
- [49] 孟庆军, 李培良. 黄海在有潮作用下对“布拉万”不同响应的数值模拟研究[J]. *海洋与湖沼*, 2015, 46(6): 1241-1254.
- Meng Qingjun, Li Peiliang. A numerical study of the Yellow Sea responses to Bolaven with and without tides[J]. *Oceanologia Et Limnologia Sinica*, 2015, 46(6): 1241-1254.
- [50] Chereskin T K. Direct evidence for an Ekman balance in the California Current[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 1995, 100(C9): 18261-18269.
- [51] Lenn Y, Chereskin T K. Observations of Ekman currents in the Southern Ocean[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 2009, 39(3): 768-779.
- [52] Phillips H E, Bindoff N L. On the nonequivalent barotropic structure of the Antarctic Circumpolar Current: An observational perspective[J]. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2014, 119(8): 5221-5243.
- [53] Polton J, Lenn Y, Elipot S, et al. Can Drake Passage observations match Ekman's classic theory?[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 2013, 43(8): 1733-1740.
- [54] Roach C J, Phillips H E, Bindoff N L, et al. Detecting and Characterizing Ekman Currents in the Southern Ocean[J]. *Journal of Physical Oceanography*, 2015, 45(5): 1-49.
- [55] Chen H, Cao A, Zhang J, et al. Estimation of spatially varying open boundary conditions for a numerical internal tidal model with adjoint method[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2014, 97: 14-38.
- [56] 罗蒋梅, 潘静, 杨支中. 海面风应力拖曳系数参数化方案对风暴潮数值模拟的影响[J]. *海洋预报*, 2011, 28(3): 15-19.
- Luo Jiangmei, Pan Jing, Yang Zhizhong. Impact of the parameterization scheme about sea surface wind stress drag coefficients on numerical simulation of storm surge[J]. *Marine Forecasts*, 2011, 28(3): 15-19.
- [57] Zhang J, Zhu J, Lv X. Numerical study on the bottom

- friction coefficient of the Bohai, Yellow and East China Seas[J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2006, 23(6): 731-737.
- [58] Price J F, Weller R A, Schudlich R R. Wind-driven ocean currents and Ekman transport[J]. Science, 1987, 238(4833): 1534-1538.
- [59] Weller R A, Rudnick D L, Eriksen C C, et al. Forced ocean response during the Frontal Air-Sea Interaction Experiment[J]. Journal of Geophysical Research, 1991, 96(C5): 8611-8638.

Estimation of the time-varying vertical eddy viscosity coefficient in an Ekman layer model through the adjoint data assimilation approach

YI Jia-cheng¹, GAO Yan-qiu², ZHANG Ji-cai¹

(1. Institute of Physical Oceanography, Ocean College, Zhejiang University, Zhoushan 316021, China; 2. State Key Laboratory of Satellite Ocean Environment Dynamics, Second Institute of Oceanography, Hangzhou 310012, China)

Received: Apr. 8, 2018

Key words: parameter estimation; Ekman layer model; adjoint assimilation; eddy viscosity

Abstract: A method for estimating the temporal distribution of the vertical eddy viscosity coefficient (VEVC) in an Ekman model is developed based on the adjoint data assimilation approach to obtain an effective approach for computing oceanic eddy viscosity. Three factors that affect the estimation results, optimization algorithm, initial guess, and number of observations, are investigated through ideal experiments. The main conclusions are that the following: (1) the gradient descent (GD) algorithm is better than the quasi-Newton conjugate gradient and limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno algorithms in optimizing the VEVC, (2) the closer the initial guess and given value are to each other, the higher the convergence rate and accuracy, and (3) the inversion results are more sensitive to the observations in the upper layers than those in the lower layers. The Ekman currents are extracted from the measurements obtained from Bermuda Testbed Mooring. Then, the VEVC is inverted in practical experiments. The main conclusions are that (1) the GD algorithm is still the best among the three algorithms in practice experiments; (2) the strategy that assumes that the VEVC is time-varying exhibits a better performance than the two other strategies that assume that the VEVC is constant or depth-varying; and (3) the VEVC of the study area is approximately 0.01 m²/s. The study extends our understanding of the Ekman layer model and provides an effective approach to determine the temporal variations of the VEVC.

(本文编辑: 李晓燕)