

剪切流中界面波的二阶 Stokes 波解

杨联贵¹, 杨红丽^{2,3}, 宋金宝², 侯一筠²

(1. 内蒙古大学 数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010021; 2. 中国科学院 海洋研究所, 山东 青岛 266071; 3. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

摘要: 考虑了均匀剪切流中强非线性界面波, 建立了基于任意水深处速度而不是通常所用的平均速度为速度变量的模型, 分析了其色散关系, 并求得了各层速度的二阶渐近解和界面内波波面位移的二阶 Stokes 解, 揭示了波流之间的非线性相互作用和界面波解之间的非线性相互作用。

关键词: 剪切流; 界面波; Stokes 波解

中图分类号: P731.24

文献标识码: A

文章编号: 1000-3096(2008)08-0058-06

最早的界面内波理论研究是 1847 年 Stokes^[1] 关于两层流体间的界面波动。Lamb^[2] 讨论了小振幅界面内波的特性, 即假定波振幅与波长相比为小量, 将基本方程及定解条件线性化, 使得问题简化为线性问题。假设压力是由流体静力学定律确定, Defant^[3] 解释了界面内长波。Hunt^[4] 利用摄动方法研究了两层分层流体有限振幅界面内波。Keulegan^[5] 在实验室观测到了沿两层不可混溶、密度不同流体界面传播的内波, 并利用 Boussinesq 假设从理论上导出了波速和波面位移的一阶解; Long^[6] 将 Keulegan^[5] 的理论推广到二阶, 并讨论了波振幅的限制。

Benjamin^[7] 推导了浅水界面波中沿一个方向传播的 Korteweg-de Vries 方程 (KdV 方程); Benjamin^[8] 和 Ono^[9] 分别独立地导出了无限水深流体中界面波的 Benjamin-Ono 方程 (BO 方程); Kubota 等^[10] 导出了有限水深流体界面内波的中等长波方程 (intermediate long wave), 且在水深趋于浅水条件时, 其解趋于 KdV 方程的解, 在水深趋于深水条件时, 其解趋于 Benjamin-Ono 方程 (BO 方程) 的解。但这些传统的弱非线性理论不能很好地利用到强非线性理论。

Benjamin^[11] 推导了孤立波的弱非线性理论后, Freeman 和 Johnson^[12] 建立了描述剪切流中弱非线性波的时间演化的 KdV 方程。但是当浅水中存在强的剪切流时, 应该考虑作用在表面重力波上的强非线性效应^[13]。Choi^[14] 利用渐近展开的方法建立了浅水中具有有限振幅的表面波模型, 后来又将此结果推广到了两层流体界面波中^[15]。杨联贵等^[16] 采用类似于 Nwogu^[17] 的方法, 即以任意水深处的速度为速度变量, 推广了 Choi^[14] 的结果, 将其结果推广到两层流体中, 并求得其二阶 Stokes 解。

1 基本方程和边界条件

在上、下密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 , 水深分别为常数 h_1 和 h_2 的流体中分别存在着均匀剪切流 $U_{01}(y) = U_1 y$ 和 $U_{02}(y) = U_2 y$, 假设流体都是无粘、不可压缩的, 坐标系取在未扰动界面上, 水平向右为 x 正方向, 垂直向上为 y 正方向, 如图 1 所示, $\eta(x, t)$ 为相对于未扰动界面的扰动位移, 因为上下密度相差不大时, 界面波对表面波的影响不大, 同样, 表面波对界面波的影响也不大, 因而我们做了刚盖假设, 这样速度分量 (U_i, V_i) 和压力 P_i 分别满足连续方程和欧拉 (Euler) 方程:

$$U_{ix} + V_{iy} = 0 \quad (1)$$

$$U_{it} + U_i U_{ix} + V_i U_{iy} = -P_{ix}/\rho_i \quad (2)$$

$$V_{it} + U_i V_{ix} + V_i V_{iy} = -P_{iy}/\rho_i - g \quad (3)$$

其中 g 是重力加速度, 对空间和时间的下标表示求偏导数。 $i=1$ ($i=2$) 表示上(下)层流体, 并且是稳定分层的, 因此 $\rho_1 < \rho_2$ 。

界面处的运动学边界条件为:

$$V_1 = \eta_t + U_1 \eta_x, V_2 = \eta_t + U_2 \eta_x \quad (y = \eta) \quad (4)$$

界面处的动力学边界条件为:

$$P_1 = P_2 \quad (y = \eta) \quad (5)$$

底部条件为:

$$V_2 = 0 \quad (y = -h_2) \quad (6)$$

收稿日期: 2008-04-17; 修回日期: 2008-06-02

基金项目: 中国科学院创新项目 (KZCX2-YW-201); 教育部留学回国人员科研启动基金和内蒙古自然科学基金资助项目

作者简介: 杨联贵 (1961-), 男, 内蒙古托县人, 教授, 博士, 从事物理海洋学研究; 杨红丽, 通讯作者, 电话: 0471-4991253, E-mail: hongliyang3@sohu.com

顶部条件为:

$$V_1 = 0 \quad (y = h_1) \quad (7)$$

其中速度分量 (U_i, V_i) 可分为两部分: 剪切流部分 U_{0i} 和无旋部分 (u_i, v_i) 。

$$(U_i, V_i) = (U_{0i} + u_i, v_i), U_{0i}(y) = \Omega_i y \quad (8)$$

根据 (1) ~ (7) 式的线性问题, 得到关于角频率和波数 k 之间的精确线性色散关系^[15] 为

$$\left(\Omega_1 \coth kh_1 + \Omega_2 \coth kh_2 \right)^2 + (\Omega_2 - \Omega_1) = gk(\Omega_2 - \Omega_1) \quad (9)$$

2 均匀剪切流中的强非线性界面波

对于均匀剪切流中的表面波, 杨联贵等^[16] 利用 Nwogu 的方法^[17] 推导了一类非线性演化方程。具体

$$i + \Omega_2 x + (h_2 + y) \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - \left\{ \left[\frac{h_2^3 + y^3}{6} + \frac{h_2(\Omega_2^2 - h_2^2)}{2} - \left(\frac{1}{2} y_2^2 + y_2 h_2 \right) (h_2 + y) \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right\}_x = O(\mu^4) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Omega_2 h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + g x = - \frac{P_x}{\rho_2} + \Omega_2 \left[\frac{1}{3} h_2^3 + \frac{1}{2} h_2^2 y + \frac{1}{3} h_2^3 + h_2 \left(\frac{1}{2} y_2^2 + h_2 y_2 \right) \right] \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + \\ \Omega_2 (h_2 + y) x \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{1}{2} y_2^2 + h_2 \right) - \left(\frac{1}{2} y_2^2 + h_2 y_2 \right) \right] \left[\frac{\partial^3 u_2}{\partial t \partial x^2} + u_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \right] - \left[\left(\frac{1}{2} y_2^2 + h_2 y_2 \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{1}{2} y_2^2 + h_2 + h_2^2 \right) \right] \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + (h_2 + y) x \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right] + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $P = p(x, y, t)$ 是与上层流体共同决定的界面处的压力; y_2 是下层流体中的某一深度, $u_2 = u_2(x, y_2, t)$ 是该深度处的速度; μ 是水深与特征波长的比值。

对于上层流体, 只要将 (g, y) 换为 $(-g, -y)$ 、下标将 2 换为 1 即可:

$$i + \Omega_1 x - (h_1 - y) \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \left\{ \left[\frac{h_1^3 - y^3}{6} + \frac{h_1(\Omega_1^2 - h_1^2)}{2} - \left(\frac{1}{2} y_1^2 - y_1 h_1 \right) (h_1 - y) \right] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right\}_x = O(\mu^4) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \Omega_1 h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g x = - \frac{P_x}{\rho_1} + \Omega_1 \left[\frac{1}{3} h_1^3 - \frac{1}{2} h_1^2 y - \frac{1}{3} h_1^3 - h_1 \left(\frac{1}{2} y_1^2 - h_1 y_1 \right) \right] \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \\ \Omega_1 (h_1 - y) x \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{1}{2} y_1^2 - h_1 \right) - \left(\frac{1}{2} y_1^2 - h_1 y_1 \right) \right] \left[\frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial x^2} + u_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \right] - \left[\left(\frac{1}{2} y_1^2 - h_1 y_1 \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{1}{2} y_1^2 - h_1 + h_1^2 \right) \right] \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - (h_1 - y) x \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right] + O(\mu^4) \end{aligned} \quad (13)$$

方程 (10) ~ (13) 组成了关于 (u_1, u_2) 的均匀剪切流中的强非线性界面波模型。

如定义平均速度:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{h_1 - y} \int_0^{h_1} u_1 dy, \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{h_2 + y} \int_{-h_2}^0 u_2 dy \quad (14)$$

这样方程 (10) ~ (13) 可以用平均速度来表示:

$$i + \Omega_1 x - (h_1 - y) \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{u}_1 = 0 \quad (15)$$

$$i + \Omega_2 x + (h_2 + y) \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{u}_2 = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \Omega_1 h_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + g x = - \frac{P_x}{\rho_1} + \frac{1}{h_1 - y} \left\{ \frac{(h_1 - y)^3}{3} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x \partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} \right)^2 + \Omega_1 \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x^2} \right] \right\}_x \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - \Omega_2 h_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} + g x = - \frac{P_x}{\rho_2} + \frac{1}{h_2 + y} \left\{ \frac{(h_2 + y)^3}{3} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x \partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} \right)^2 + \Omega_2 \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x^2} \right] \right\}_x \quad (18)$$

方程 (15) ~ (18) 正是 Choi 的结果^[15]。

推导过程, 可以参考杨联贵等^[16], 这里就忽略掉了。

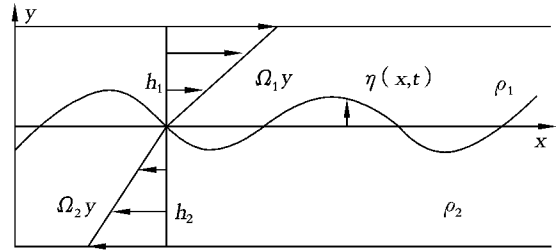


图 1 剪切流中的界面波示意图

Fig. 1 Interfacial waves in a two-layer system interacting with uniform shear flows

假设水深与特征波长之比是小量, 下层流体的非线性演化方程为:

3 界面波的二阶 Stokes 解

利用摄动方法来求解上述方程(10)~(13)。设 ϵ 是一个小参数,将 u_1 和 u_2 按小参数展开,即

$$u = u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + \dots \quad (19)$$

$$u_1 = u_1^{(1)} + \epsilon^2 u_1^{(2)} + \dots \quad (20)$$

$$u_2 = u_2^{(1)} + \epsilon^2 u_2^{(2)} + \dots \quad (21)$$

这里上标(1)和(2)分别表示一阶和二阶近似。

将(19)~(21)代入方程(10)~(13)中,比较 ϵ 的同次幂的系数,可以得一阶方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} u^{(1)} - h_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \left(1 + \frac{1}{3}\right) h_1^3 \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial x^3} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u^{(1)} + h_2 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \left(2 + \frac{1}{3}\right) h_2^3 \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial x^3} = 0 \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} + h_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} u^{(1)} + h_1^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t \partial x^2} + \left(1 + \frac{1}{3}\right) h_1^3 \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} - h_2 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} u^{(1)} + h_2^2 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t \partial x^2} - \left(2 + \frac{1}{3}\right) h_2^3 \frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial x^3} \end{cases} = \quad (24)$$

二阶方程

$$\frac{\partial}{\partial t} u^{(2)} - h_1 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \left(1 + \frac{1}{3}\right) h_1^3 \frac{\partial^3 u^{(2)}}{\partial x^3} = -h_1 \left[\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} \right]_x \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u^{(2)} + h_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + \left(2 + \frac{1}{3}\right) h_2^3 \frac{\partial^3 u^{(2)}}{\partial x^3} = -h_2 \left[\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} \right]_x \quad (26)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} + h_1 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} u^{(2)} + h_1^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t \partial x^2} + \left(1 + \frac{1}{3}\right) h_1^3 \frac{\partial^3 u^{(2)}}{\partial x^3} \\ \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} - h_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial x} u^{(2)} + h_2^2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t \partial x^2} - \left(2 + \frac{1}{3}\right) h_2^3 \frac{\partial^3 u^{(2)}}{\partial x^3} \end{cases} = \begin{cases} u_2^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \left[h_2^2 u_2^{(1)} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} h_2^2 \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right)^2 - h_2 \left[\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x \partial t} \right]_x \right. \\ \left. u_1^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \left[h_1^2 u_1^{(1)} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{1}{2} h_1^2 \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right)^2 + h_1 \left[\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x \partial t} \right]_x \right] \end{cases} \quad (27)$$

其中无量纲参数 $\gamma_1 = -\frac{y_{d1}}{h_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{y_{d1}}{h_1} \right)^2$, $\gamma_2 = \frac{y_{d2}}{h_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{y_{d2}}{h_2} \right)^2$, 可以看出两个参数都是只与位置有关。

先考虑一阶方程的解。令形式解为:

$$u^{(1)} = a_1 \cos(kx - \omega t), u_1^{(1)} = A_1 \cos(kx - \omega t), u_2^{(1)} = A_2 \cos(kx - \omega t) \quad (28)$$

其中 a_1 是界面波的振幅, ω 是角频率, k 是波数。

将(28)式代入到(22), (23)可得:

$$u_1^{(1)} = -\frac{a_1}{kh_1 \left[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) (kh_1)^2 \right]} \cos(kx - \omega t) \quad (29)$$

$$u_2^{(1)} = \frac{a_1}{kh_2 \left[1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right) (kh_2)^2 \right]} \cos(kx - \omega t) \quad (30)$$

并且由(24)式还可以得到色散关系:

$$\left\{ \frac{[1 - \gamma_1 (kh_1)^2]}{kh_1 \left[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right) (kh_1)^2 \right]} + \frac{[1 - \gamma_2 (kh_2)^2]}{kh_2 \left[1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right) (kh_2)^2 \right]} \right\}^2 + (\omega^2 - \gamma_1 - \gamma_2) = gk(\omega^2 - \gamma_1) \quad (31)$$

由(31)式可以看出,色散关系除了与各层流体的密度、深度和剪切流有关外,还与参数 γ_1 和 γ_2 有关,即与位置有关,亦即模型与不同位置处的速度有关。与精确的色散关系式(9)对比,不同的就是 ω^2 项中 γ_1 和 γ_2

的系数,如果 $\alpha_1 = \alpha_2 = -2/5$,则系数正好是 $\coth kh_1$ 和 $\coth kh_2$ 的 $P[2, 2]$ 展开,此时所用的速度称为优化速度;而 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ 则是取未扰动界面处的速度; $\alpha_1 = \alpha_2 = -1/2$ 则是底部和顶部的速度; $\alpha_1 = \alpha_2 = -1/3$ 则是平均速度。取不同值时,色散关系的适用范围是不同的,在这里取定密度比 $\rho_1/\rho_2 = 9/10$,深度比 $h_1/h_2 = 1$,剪切流也取定: $F_1 = F_2 = 0.1$,其中 F_1 和 F_2 为 Froude 数,定义为:

$$F_1 = \frac{U_1 h_1}{\sqrt{g h_1}}, \quad F_2 = \frac{U_2 h_2}{\sqrt{g h_2}} \quad (32)$$

由于频率 ω 是波数 k 的二次函数,所以会出现两个相速度 c^\pm ,这里只比较 c^+ ,如图 2, c^- 是类似的,可以看出选取优化速度时适用范围最大。

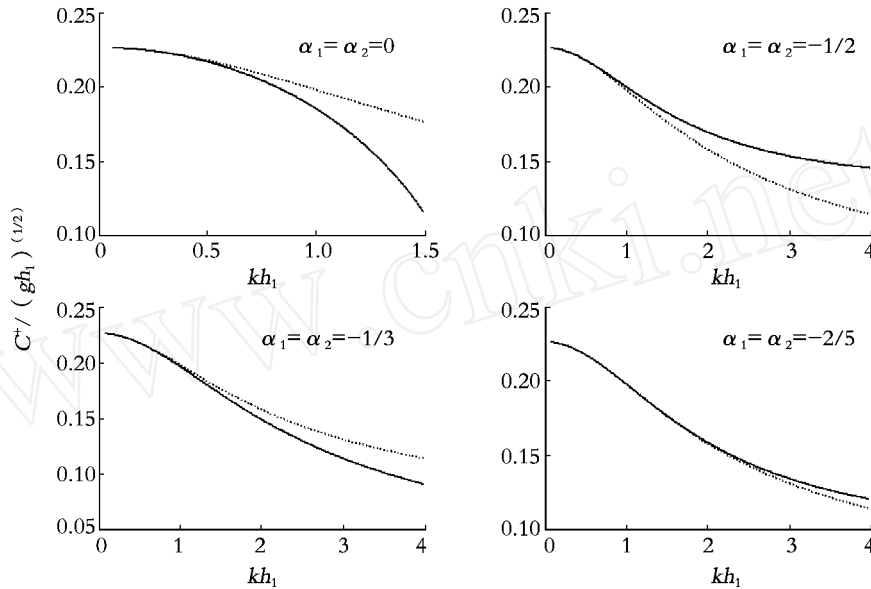


图 2 (31)式定义的相速度(实线)与(9)式定义的相速度(虚线)的比较

Fig. 2 Comparison of phase speeds defined by formula (31) (real line) and formula (9) (point line)

再求二阶方程的解。把一阶代入到二阶方程中,类似于求一阶方程的解,可得二阶方程的解:

$$u^{(2)} = a_2 \cos 2(kx - \omega t) \quad (33)$$

$$u_1^{(2)} = \left\{ \frac{-\frac{a_2}{kh_1 \left[1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \right) (2kh_1)^2 \right]} + \frac{1}{4kh_1 \left[1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \right) (2kh_1)^2 \right]} - \frac{1}{2kh_1 \left[1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \right) (2kh_1)^2 \right]} \frac{[1 - \frac{1}{1} (kh_1)^2] a_1^2}{h_1 \left[1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \right) (kh_1)^2 \right]} \right\} \cos 2(kx - \omega t) \quad (34)$$

$$u_2^{(2)} = \left\{ \frac{\frac{a_2}{kh_2 \left[1 - \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \right) (2kh_2)^2 \right]} - \frac{1}{4kh_2 \left[1 - \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \right) (2kh_2)^2 \right]} - \frac{1}{2kh_2 \left[1 - \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \right) (2kh_2)^2 \right]} \frac{[1 - \frac{1}{2} (kh_2)^2] a_1^2}{h_2 \left[1 - \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \right) (kh_2)^2 \right]} \right\} \cos 2(kx - \omega t) \quad (35)$$

其中

$$a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_3 + m_4} \quad (36)$$

$$m_1 = 2 \left\{ \frac{[1 - \frac{1}{2} (2kh_2)^2]^2}{kh_2 \left[1 - \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \right) (2kh_2)^2 \right]} \frac{[1 - \frac{1}{2} (kh_2)^2]}{h_2 \left[1 - \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \right) (kh_2)^2 \right]} + \frac{[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \right) (kh_2)^2]^2}{kh_2^2 \left[1 - \left(\frac{1}{2 + \frac{1}{3}} \right) (kh_2)^2 \right]} \right\}$$

$$\left\{ \frac{k^2}{1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right)(kh_2)^2} + \frac{[1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right)(2kh_2)^2] k^2}{2kh_2[1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right)(2kh_2)^2]} + \frac{1}{2} \frac{2}{1} k + \frac{[1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right)(kh_2)^2] \frac{1}{2}}{h_2[1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right)(kh_2)^2]} \right\} a_1^2 \quad (37)$$

$$m_2 = \left\{ \frac{[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(2kh_1)^2]^2}{kh_1[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(2kh_1)^2]} \frac{[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(kh_1)^2]}{h_1[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(kh_1)^2]} + \frac{\left[\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(kh_1)^2\right]^2}{kh_1^2[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(kh_1)^2]} \right. \\ \left. - \frac{k^2}{1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(kh_1)^2} - \frac{[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(2kh_1)^2] k}{2kh_1[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(2kh_1)^2]} + \frac{1}{2} \frac{2}{1} k - \frac{[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(kh_1)^2] \frac{1}{2}}{h_1[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(kh_1)^2]} \right\} a_1^2 \quad (38)$$

$$m_3 = 2 \left\{ \frac{[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(2kh_1)^2]^2}{kh_1[1 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)(2kh_1)^2]} - \frac{1}{1 + gk} \right\} \quad (39)$$

$$m_4 = 2 \left\{ \frac{[1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right)(2kh_2)^2]^2}{kh_2[1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right)(2kh_2)^2]} + \frac{1}{2 - gk} \right\} \quad (40)$$

可以看出二阶解的界面波振幅 a_2 同样也依赖于各层流体的密度、深度和剪切流,和参数 α_1 和 α_2 , 其中含剪切流的项有 α_1^2 和 α_2^2 , 表明了波流之间的非线性相互作用,同时还与一阶解的振幅 a_1^2 有关,这表明了界面波解之间的非线性相互作用。

这样,二阶解为:

$$\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)} \quad (41)$$

$$u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(2)} \quad (42)$$

$$u_2 = u_2^{(1)} + u_2^{(2)} \quad (43)$$

4 结论

本文考虑了均匀剪切流场中强非线性界面波,建立了基于任意水深处速度而不是通常所用的平均速度为速度变量的模型,该模型包括了用静止水面速度、底部及顶部速度、平均速度来表示的不同形式,分析了其色散关系,当选择优化速度时水深适用范围较大,并求得了各层速度的二阶渐近解和界面内波波面位移的二阶 Stokes 解,表明了波流之间的非线性相互作用和界面波解之间的非线性相互作用。

参考文献:

[1] Stokes G G. On the theory of oscillatory waves[J]. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1847, 8: 441-455.
 [2] Lamb H. *Hydrodynamics*[M]. New York: Cambridge University Press, 1932.
 [3] Defant A. *Physical Oceanography*[M]. Vol. II. New York: Pergamon, Tarrytown, 1961.
 [4] Hunt J N. Interfacial waves of finite amplitude[J]. *La Houille Blanche*, 1961, 16: 515-531.
 [5] Keulegan M J. Characteristics of internal solitary waves

[J]. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 1953, 51: 133-140.
 [6] Long R R. Solitary waves in one-and two-fluid systems [J]. *Tellus*, 1956, 8: 460-471.
 [7] Benjamin T B. Internal waves of finite amplitude and permanent form [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1966, 25: 241-270
 [8] Benjamin T B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1967, 29: 559-592.
 [9] Ono H. Algebraic solitary waves in stratified fluids[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1975, 39: 1 082-1 091.
 [10] Kubota T, Ko D R S, Dobbs L D. Propagation of weakly nonlinear internal waves in a stratified fluid of finite depth[J]. *AIAA Journal of Hyeronautics*, 1978, 12: 157-165.
 [11] Benjamin T B. The solitary wave on a stream with an arbitrary distribution of vorticity[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1962, 12: 97-116.
 [12] Freeman N C, Johnson R S. Shallow water waves on shear flows [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, 42: 401-409.
 [13] Teles da Silva A F, Peregrine D H. Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1988, 195: 281-302.
 [14] Choi W. Strongly nonlinear long gravity waves in uniform shear flows [J]. *Physical Review E*, 2003, 68: 026305.
 [15] Choi W. The effect of a background shear current on large amplitude internal solitary waves [J]. *Physics of Fluids*, 2006, 18: 036601.

[16] 杨联贵,杨红丽,宋金宝,侯一筠. 均匀剪切流场中的强非线性波及其色散关系 [J]. 海洋科学,2008,32(7):33-37.

for nearshore wave propagation[J]. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 1993, 119(6): 618-638.

[17] Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations

Second-order stokes solutions for interfacial waves with uniform shear flows

YANGLian-gui¹, YANG Hong-li^{2,3}, SONG Jin-bao², HOU Yi-jun²

(1. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China; 2. Institute of Oceanology, the Chinese Academy of Sciences, Qingdao 266071, China; 3. Graduate School, the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Received: Apr. , 17, 2008

Key words: uniform shear flows; interfacial waves; Stokes solutions

Abstract: Strongly nonlinear interfacial waves of a finite amplitude with uniform shear flows are considered, a new model is derived using the velocities at arbitrary distances from the still water level as the velocity variables instead of the commonly used depth-averaged velocities. Dispersion relations are analyzed, and the second-order asymptotic solutions of the velocities and the second-order Stokes solutions of the associated elevations of the interfacial waves are presented.

(本文编辑:刘珊珊)