四层成层水域内波的研究[1]

陈小刚[1,2]，宋金宝[1]，孙　群[1]

（1. 中国科学院 海洋研究所海洋环流与波动研究实验室，山东 青岛 266071；2. 中国科学院 研究生院 北京 100039）

摘要： 运用小振幅波理论研究了四层成层水域的内波运动，给出了四层成层状态下的各界面波波面位移和各层速度势的解析表达式及各层深度平均流速分布和内波波动频散关系，并与三层成层水域内波的解析结果进行了比较。

关键词： 内波；四层成层水域；小振幅波理论

中图分类号： O351.2;P731.24　**文献标识码：** A　**文章编号：** 1000-3096(2005)03-0038-04

长期以来，人们对内波进行了广泛的研究，如Benjamin[1]，Benjamin[2]，Davis 等[3]，Ono[4]，Joseph[5]，Kubota 等[6]）。Stokes[7]建立了两层海洋内波理论，Lamb[8]详细描述了小振幅内波的特性，而Defant[9]和Benjamin[1]分别研究了内长波和孤立波的相应特性。最近，Choi 等[10] 在上层流体厚度与特征波长相比是一小量假设下导出了两层流体系统中二维弱非线性内波的一般演化方程，Choi 等[11]在某一层流体厚度与特征波长相比是一小量假设下给出了两层流体系统中完全非线性内波的一般演化方程等。这些研究都是针对两层成层水域内波，对于两层以上成层水域内波的研究，目前结果较少，章守宇和杨红[12] 研究了三层成层水域内波。但是在真实的海洋内部，这种密度二层成层有时并不能很好地描述成层现象。例如在中纬度海区的对流层下方，通常就存在着永久性温跃层，在春夏季的成层期很容易与对流层以内的季节性成层构成多层成层；另外，水深较浅的沿岸养殖水域如内湾在成层期，内波产生的海水混合弱化了密度的成层，同时潮汐通过湾口不断与湾内水进行交换，使得湾内水的密度垂直分布变得异常复杂。因此，应用两层或三层成层的方法去近似，势必不够准确。作者以小振幅波理论为基础，就密度四层成层状态下的内波波动规律进行了一些研究，并与三层成层水域内波的解析结果进行了比较。

1 数学模型

如图 1 所示，我们考虑水深 H 为一常数，密度呈四层成层的流体。设流体为无粘不可压的，且波动的振幅相对于波长很小，即为小振幅波动，同时设各层流体厚度相对于波长也很小，并忽略地球旋转的影响。取静止水面向右为 x 轴正方向，垂直向上为 z 轴正向。自水面而下，成层流体厚度分别为 h_1, h_2, h_3 和 h_4，密度分别为 ρ_1，ρ_2，ρ_3 和 ρ_4。不同的密度流体之间构成的各界面水深坐标则分别为 z_0, z_1, z_2, z_3 和 z_4，$z_0=0$ 表示水面，z_4 表示底面。假定流体是无旋的，其速度可由势函数 $\Phi(x,z,t)$来表示为：

$$u=-\frac{\partial \Phi}{\partial x},\qquad w=-\frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{1}$$

这里 u 和 w 分别是水粒子在 x, z 方向的运动速度。对于第 $i(i=1,2,3,4)$层流体，有连续方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial z}=0,\qquad i=1,2,3,4 \tag{2}$$

将（1）代入（2），得

收稿日期：2004-09-08；修回日期：2005-01-07

基金项目：中国海洋石油总公司和中国科学院合作项目“内波特性及对建筑物的作用研究”

作者简介：陈小刚（1968-），男，内蒙古人，副教授，在读博士，主要从事物理海洋学研究，电话：0532-2898873，E-mail：xiaogangchen@imut.edu.cn

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}=0, \quad i=1,2,3,4 \tag{3}$$

式（3）即为流体关于速度势函数的连续方程，且是Laplace方程。

设各层流体的动压力为p_1, p_2, p_3和p_4，则有

$$\left.\begin{aligned}
p_1&=\rho_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}-\rho_1 gz, && (z_1+\eta_1\le z\le z_0)\\
p_2&=\rho_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}-\rho_2 g(z-z_1)+\rho_1 gh_1, && (z_2+\eta_2\le z\le z_1+\eta_1)\\
p_3&=\rho_3\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}-\rho_3 g(z-z_2)+\rho_1 gh_1+\rho_2 gh_2, && (z_3+\eta_3\le z\le z_2+\eta_2)\\
p_4&=\rho_4\frac{\partial \Phi_4}{\partial t}-\rho_4 g(z-z_3)+\rho_1 gh_1+\rho_2 gh_2+\rho_3 gh_3, && (z_4\le z\le z_3+\eta_3)
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

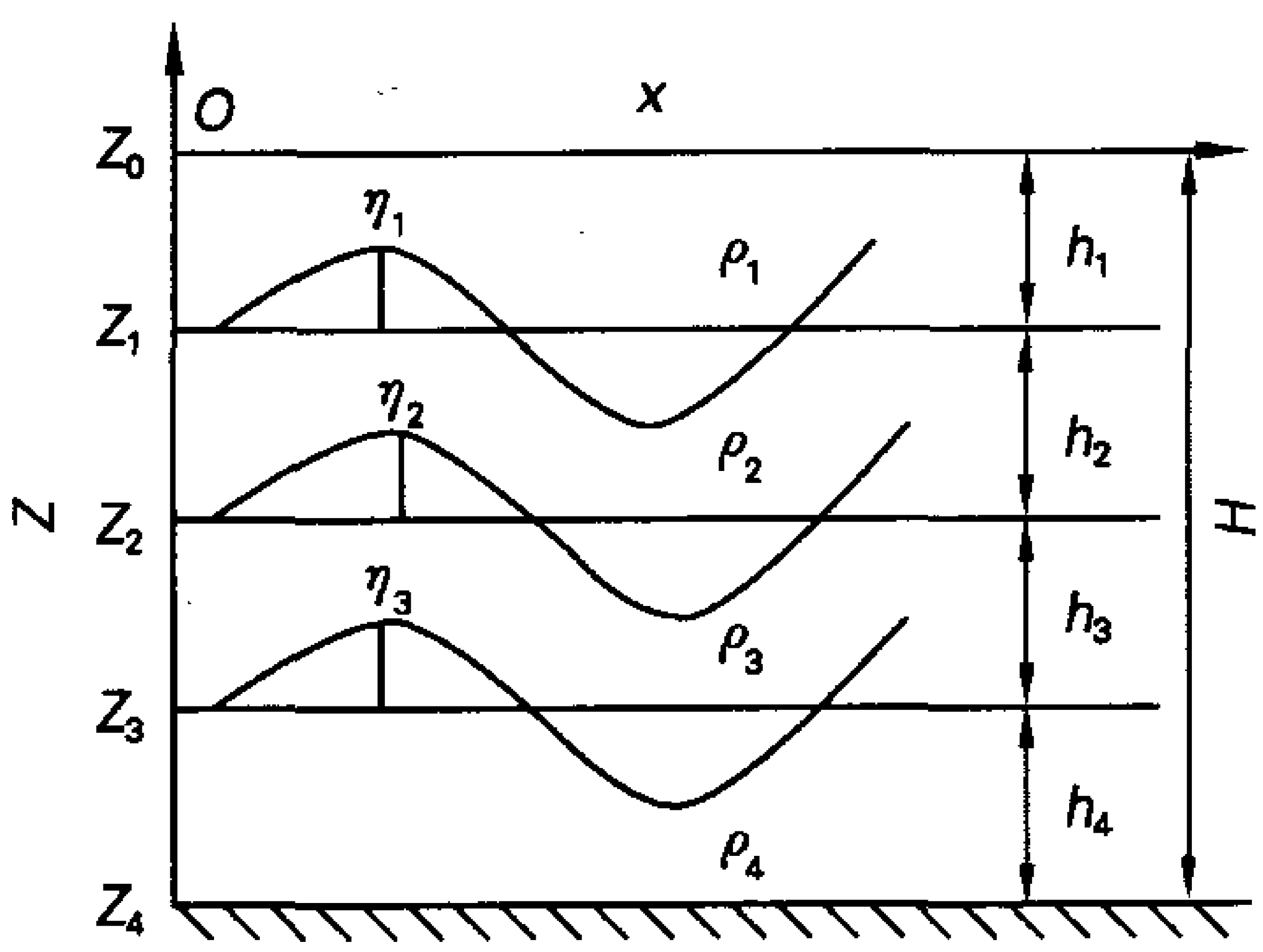

图1 四层成层水域的结构及内波示意

Fig.1 Schematic view of four-layer stratified fluid and internal wave

其中，g为重力加速度。设η_1，η_2和η_3分别表示界面1，2，3处波动的波面位移，显然对于界面1，2，3，有

$$p_1\big|_{z=z_1+\eta_1}=p_2\big|_{z=z_1+\eta_1}, \quad p_2\big|_{z=z_2+\eta_2}=p_3\big|_{z=z_2+\eta_2},$$
$$p_3\big|_{z=z_3+\eta_3}=p_4\big|_{z=z_3+\eta_3}$$

于是可得对于界面1，2，3的动力学条件

$$\begin{aligned}
\rho_1\Big[\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}-g\eta_1\Big]&=\rho_2\Big[\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}-g\eta_1\Big], && z=z_1+\eta_1\\
\rho_2\Big[\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}-g\eta_2\Big]&=\rho_3\Big[\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}-g\eta_2\Big], && z=z_2+\eta_2\\
\rho_3\Big[\frac{\partial \Phi_3}{\partial t}-g\eta_3\Big]&=\rho_4\Big[\frac{\partial \Phi_4}{\partial t}-g\eta_3\Big], && z=z_3+\eta_3
\end{aligned} \tag{5}$$

假设水域下底面不可渗透，上表面为刚性边界，则有

$$-\frac{\partial \Phi_4}{\partial z}\Big|_{z=z_4}=0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\Big|_{z=0}=0 \tag{6}$$

另外，满足（3）的运动学边界条件为

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t}=-\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\Big|_{z=z_1+\eta_1}, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t}=-\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\Big|_{z=z_1+\eta_1} \tag{7-1}$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t}=-\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\Big|_{z=z_2+\eta_2}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial t}=-\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\Big|_{z=z_2+\eta_2} \tag{7-2}$$

$$\frac{\partial \eta_3}{\partial t}=-\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\Big|_{z=z_3+\eta_3}, \quad \frac{\partial \eta_3}{\partial t}=-\frac{\partial \Phi_4}{\partial z}\Big|_{z=z_3+\eta_3} \tag{7-3}$$

2 理论分析

由方程（3），势函数Φ_i $(i=1,2,3,4)$可取为下列形式

$$\Phi_i=Z_i(z)\cos(kx-\omega t), \quad i=1,2,3,4 \tag{8}$$

式中，ω为内波的角频率，k为波数，t为时间。将（8）代入（3），可得

$$\frac{\partial^2 Z_i(z)}{\partial z^2}-k^2 Z_i(z)=0, \quad i=1,2,3,4 \tag{9}$$

（9）的一般解为

$$Z_i(z)=C_{i1}e^{kz}+C_{i2}e^{-kz}, \quad i=1,2,3,4 \tag{10}$$

式中C_{i1}，C_{i2} $(i=1, 2, 3, 4)$为常数。

考虑到小振幅波特点，$\sinh k(h_i+\eta_i)\approx\sinh kh_i$，$(i=1,2,3)$，且$\rho_1/\rho_2\approx1$, $\rho_2/\rho_3\approx1$, $\rho_3/\rho_4\approx1$，并令$\varepsilon_1=(\rho_2-\rho_1)/\rho_2$，$\varepsilon_2=(\rho_3-\rho_2)/\rho_3$，$\varepsilon_3=(\rho_4-\rho_3)/\rho_4$。由（4），（5）可以得到

$$\left.\begin{aligned}
\eta_1&=A_1\sin(kx-\omega t)\\
\eta_2&=A_2\sin(kx-\omega t)\\
\eta_3&=A_3\sin(kx-\omega t)
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\frac{\omega}{\varepsilon_1 g}[(C_{21}-C_{11})\mathrm{e}^{kz_1}+(C_{22}-C_{12})\mathrm{e}^{-kz_1}]\\A_2&=\frac{\omega}{\varepsilon_2 g}[(C_{31}-C_{21})\mathrm{e}^{kz_2}+(C_{32}-C_{22})\mathrm{e}^{-kz_2}]\\A_3&=\frac{\omega}{\varepsilon_3 g}[(C_{41}-C_{31})\mathrm{e}^{kz_3}+(C_{42}-C_{32})\mathrm{e}^{-kz_3}]\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

由（11）可知，成层流体内部的界面依照正弦规律波动，A_1, A_2, A_3 分别为它们的振幅。

利用边界条件（6）和（7），并基于小振幅波理论，由（8），（10），（11），解得各常数 C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{31}, C_{32}, C_{41}, C_{42}，得到密度四层成层状态时的速度势函数为

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1&=-\frac{\omega}{k}\frac{A_1\cosh kz}{\sinh kh_1}\cos(kx-\omega t), && (z_1+\eta_1\le z\le z_0)\\\Phi_2&=\frac{\omega}{k}\frac{A_1\cosh k(z-z_2)-A_2\cosh k(z-z_1)}{\sinh kh_2}\cos(kx-\omega t), && (z_2+\eta_2\le z\le z_1+\eta_1)\\\Phi_3&=\frac{\omega}{k}\frac{A_2\cosh k(z-z_3)-A_3\cosh k(z-z_2)}{\sinh kh_3}\cos(kx-\omega t), && (z_3+\eta_3\le z\le z_2+\eta_2)\\\Phi_4&=\frac{\omega}{k}\frac{A_3\cosh k(z-z_4)}{\sinh kh_4}\cos(kx-\omega t), && (z_4\le z\le z_3+\eta_3)\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

再将计算所得 C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{31}, C_{32}, C_{41}, C_{42} 代入（12），并考虑到各层流体厚度相对于波长很小，即 $\sinh kh_i\approx kh_i$，整理可得关于界面振幅的三元方程组

$$\left.\begin{aligned}&A_1(\frac{\varepsilon_1 gh_2}{c^2}-\frac{h_1+h_2}{h_1})+A_2=0\\&A_1+A_2(\frac{\varepsilon_2 gh_2}{c^2}-\frac{h_2+h_3}{h_3})+\frac{h_2}{h_3}A_3=0\\&A_2+A_3(\frac{\varepsilon_3 gh_3}{c^2}-\frac{h_3+h_4}{h_4})=0\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

这里，$c=\omega/k$ 为波速。由（14）消去 A_1, A_2, 和 A_3 可得

$$(\frac{\varepsilon_1 gh_2}{c^2}-\frac{h_1+h_2}{h_1})(\frac{\varepsilon_2 gh_2}{c^2}-\frac{h_2+h_3}{h_3})(\frac{\varepsilon_3 gh_3}{c^2}-\frac{h_3+h_4}{h_4})-\frac{h_2}{h_3}(\frac{\varepsilon_1 gh_2}{c^2}-\frac{h_1+h_2}{h_1})-(\frac{\varepsilon_3 gh_3}{c^2}-\frac{h_3+h_4}{h_4})=0\quad(15)$$

上式即为密度四层成层时的内波频散关系。由于（15）是 c^2 的三次代数方程，因此，波速 c 一般有三个解 c',c'',c'''，这些解分别对应于密度四层成层内波的三种模态，令 $c'>c''>c'''$，则可以称 c' 对应的模态为大波速模态，c''' 对应的为小波速模态。设界面振幅 A_1, A_2, A_3 之间存在关系

$$A_2/A_1=\beta_1,\quad A_3/A_2=\beta_2\quad(16)$$

β_1, β_2 称为内波振幅比，由（14）即可得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\varepsilon_1 gh_2}{c^2}-\frac{h_1+h_2}{h_1}+\beta_1=0\\&\frac{1}{\beta_1}+(\frac{\varepsilon_2 gh_2}{c^2}-\frac{h_2+h_3}{h_3})+\frac{h_2}{h_3}\beta_2=0\\&\frac{1}{\beta_2}+(\frac{\varepsilon_3 gh_3}{c^2}-\frac{h_3+h_4}{h_4})=0\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

因此，如果由（15）求得波速 c，则由（17）即可求得内波振幅比 β_1, β_2，从而就可以讨论界面波波形。下面给出密度四层成层时各层流体的深度平均水平流速

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_1&=\frac{1}{h_1}\int_{z_1}^{z_0}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\mathrm{d}z=-c\frac{1}{h_1}A_1\sin(kx-\omega t)\\\bar{u}_2&=\frac{1}{h_2}\int_{z_2}^{z_1}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\mathrm{d}z=c\frac{1-\beta_1}{h_2}A_1\sin(kx-\omega t)\\\bar{u}_3&=\frac{1}{h_3}\int_{z_3}^{z_2}-\frac{\partial\Phi_3}{\partial x}\mathrm{d}z=c\frac{1-\beta_2}{h_3}A_2\sin(kx-\omega t)\\\bar{u}_4&=\frac{1}{h_4}\int_{z_4}^{z_3}-\frac{\partial\Phi_4}{\partial x}\mathrm{d}z=c\frac{\beta_2}{h_4}A_2\sin(kx-\omega t)\end{aligned}\right\}\quad(18)$$

式（18）描述了界面波形与流速的关系。由（15），（17），（18）即可讨论四层成层水域内波的波形及流况。为简单起见，这里仅以一特例来作一些分析。取

$$h_1=h_2=h_3=h_4=1,\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=\varepsilon=0.001\quad(19)$$

将（19）代入（15），可得

$$c'^2=\frac{\varepsilon g}{2-\sqrt{2}},\quad c''^2=\frac{\varepsilon g}{2},\quad c'''^2=\frac{\varepsilon g}{2+\sqrt{2}}\quad(20)$$

将（19）代入（17），可得

当内波以c' 对应的大波速模态传播时

$$\beta_1=\sqrt{2},\quad \beta_2=1/\sqrt{2} \tag{21}$$

当内波以 c'' 对应的模态传播时

$$\beta_1=0,\quad 1/\beta_2=0 \tag{22}$$

当内波以 c''' 对应的小波速模态传播时

$$\beta_1=-\sqrt{2},\quad \beta_2=-1/\sqrt{2} \tag{23}$$

分 析：

当内波以大波速 c' 对应的大波速模态传播时，由于 β_1，β_2 均大于0，故界面1, 2, 3 的振动呈同相位，此时上面两层流体粒子平均运动方向相同，下面两层流体粒子平均运动方向相同，但上面两层流体粒子平均运动方向与下面两层流体粒子平均运动方向相反(图2a)，这种情形类似于密度三层成层流体[12]大波速模态的情形。

当内波以波速 c'' 对应模态传播时，此时 β_1=0，从而 A_2=0 由（14）可得 A_1=-A_3，故界面1，3 的振动呈逆相位，界面2 的振幅为0。由(18)，有

$$\bar{u}_1=-\bar{u}_2,\qquad \bar{u}_2=\bar{u}_3,\qquad \bar{u}_1=\bar{u}_4$$

即上面两层流体粒子平均运动方向相反，下面两层流体粒子平均运动方向也相反，中间两层流体粒子平均运动方向相同（图2b），此情形就是密度三层成层流体[12]小波速模态的情形。

当内波以小波速 c''' 对应的小波速模态传播时，由于 β_1，β_2 均小于0，故界面1，3 的振动呈同相位，而1，2及2，3 的振动分别呈逆相位，此时相邻的两层流体粒子平均运动方向都相反（图2c），此情形类似于密度三层成层流体[12]小波速模态的情形。

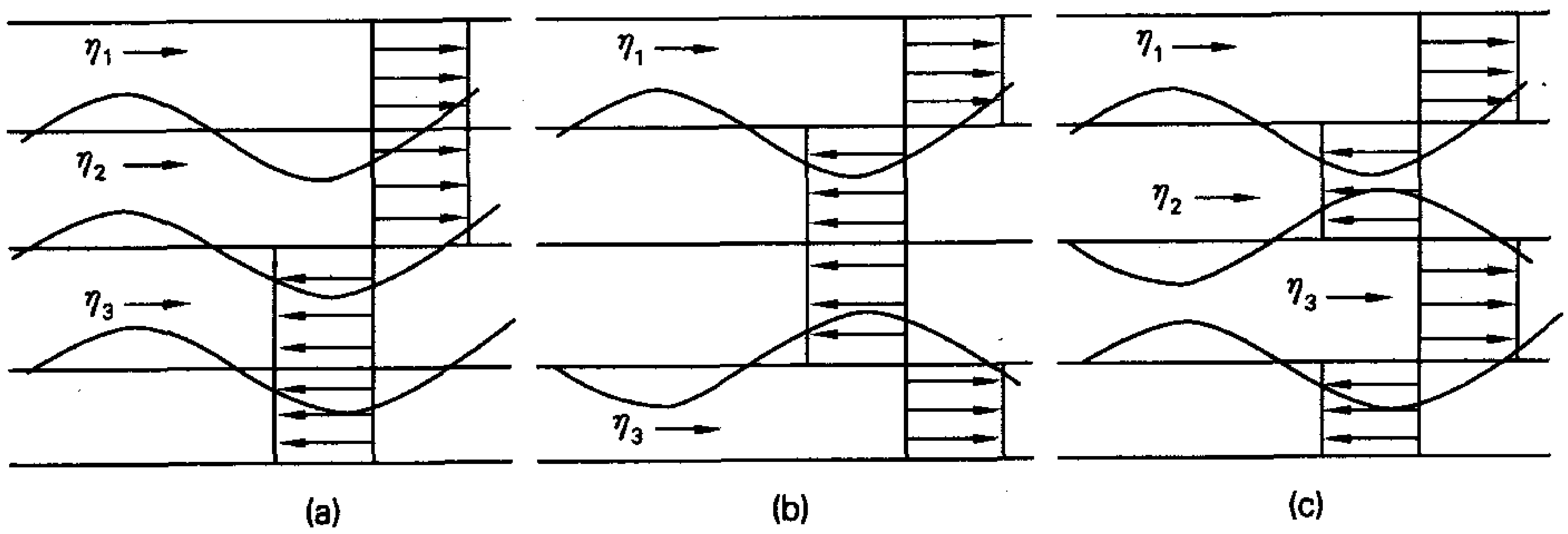

图2　四层成层水域的内波波形及流况示意

Fig. 2 Phase of interfacial wave and its flow characters in four-layer stratified fluid

3 结论

利用小振幅波理论，研究了四层成层水域内波波动规律，给出了各层波动解的解析表达式，并以实际观测到的内波为例，与三层成层水域内波理论作了比较，结果如下：

在小振幅波理论基础下，四层成层水域的内波有三种模态，大波速模态波动时，其流况及界面波动特征与三层成层状态大波速模态时的情形类似；其它两种波速模态波动时，其流况及界面波动特征与三层成层状态小波速模态时的情形类似。

参考文献：

[1] Benjamin T B. Internal waves of finite amplitude and permanent form[J]. **J Fluid Mech**, 1966, 25：241-270.

[2] Benjamin T. B. Internal waves of permanent form of great depth[J]. **J Fluid Mech**, 1967, 29：559-592.

[3] Davis R E, Acrivos A. Solitary internal waves in deep water[J]. **J Fluid Mech**，1967, 29：593-607.

[4] Ono H. Algebraic solitary waves in stratified fluids[J]. **J Phys Soc Japan**, 1975, 39：1082-1091.

[5] Joseph R I. Solitary waves in finite depth fluid[J]. **J Phys A: Math Gen**，1977,10：L225-L227.

[6] Kubota T, Ko D R S, Dobbs L D. Propagation of weakly nonlinear internal waves in a stratified fluid of finite depth [J]. **AIAA J Hydrodyn**, 1978, 12：157-165.

[7] Stokes G G. On the theory of oscillatory waves[J]. **Trans Camb Phil Soc**, 1847, 8：441-455.

[8] Lamb H. Hydrodynamics[M]. New York: Dover Publications, 1932. 738.

（下转 第75页）

[25] Ramazanov Z, Henk C, Mason C, *et al.* The induction of the CO_2-concentrating mechanism is correlated with the formation of the starch sheath around the pyrenoid of *Chlamydomonas reinhardti* [J]. **Planta**, 1994, 195: 210-216.

[26] Spalding M H, Winder T L, Anderson J C, *et al.* Changes in protein and gene expression during induction of the CO_2-concentrating mechanism in wild-type and mutant *Chlamydomonas*[J]. **Can J Bot**, 1991, 69: 1 008-1 016.

[27] Satoh A, Shiraiwa V. Two polypeptides inducible by low levels of CO_2 in soluble protein fractions from *Chlorella regularis* grown at low or high pH[J]. **Plant Cell Physiol.**, 1996, 37:431-437.

[28] Thielmann J, Tolbert N E, Goyal A, *et al.* Two systems for CO_2 concentrating and bicarbonate during photosynthesis by Scenedesmus[J]. **Plant Physiol**, 1990, 92:622-629.

[29] Badger M R, Price G D. The CO_2 concentrating mechanism in cyanobacteria and green algae[J]. **Physiol Plant**, 1992, 84:606-615.

[30] Tachiki A, Fukuzawa H, Miyachi S. Characterization of carbonic anhydrase isozyme CA_2, which is the CAH_2 gene product, in *Chlamydomonas reinhardtii*[J]. **Biosci Biotechnol Biochem**, 1992, 56:794-798.

[31] Roberts S B, Lave T W, Morel F M M. Carbonic anhydrase in the marine diatom *Thalassiosira weissflogi* (Bacillario phyceae) [J]. **J Phycol**, 1997, 33:845-850.

[32] Funke R P, Kovar J L, Weeks D P. Intracellar carbonic anhydrase in essential to photo- synthesis in *Chlamydomonas reinhardtii* at atmospheric levels of CO_2[J]. **Plant Physio**, 1997, 114:237-244.

[33] Karlsson J, Clarke A K, Chen Z Y, *et al.* A novel á-type carbonic anhydrase associated with the thylakoid membrane in *Chlamydomonas reinhardtii* is required for growth at ambient CO_2[J].**The EMBO J**. 1998, 17(5): 1 208-1 216.

[34] Park Y I, Karlsson J, Rojdestvenski I, *et al.* Role of a novel photosystem II-associated carbonic anhydrase in photosynthetic carbon assimilation in *Chlamydomonas reinhardtii*[J]. **FEBS letters**, 1999, 444:102-105.

[35] Jinushi K, Okabe K, Ishi R. Improvement of tobacco photosynthetic potential by the genetic introgretion of carbonic anhydrase activity in the mesophyll cytoplasmic space[J]. **Proceeding of Asia-Pacific Plant Physol Conference**, 1997:72.

(本文编辑: 张培新)

(上接第 41 页)

[9] Defant A. Physical Oceanography(Vol.II)[M]. New York: Pergamon Press, 1961. 1-244.

[10] Choi W. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system[J]. **J Fluid Mech,** 1996, 313:83-103.

[11] Choi W. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system[J]. **J Fluid Mech**, 1999, 396:1-36.

[12] 章守宇，杨红. 三层成层水域内波的研究[J]. 上海水产大学学报，1999，8:226-231.

Study on internal wave in four-layer stratified fluid

CHEN Xiao-gang[1,2], SONG Jin-bao[1]

(1. Laboratory of Ocean Circulation and Wave Studies, Institute of Oceanology, the Chinese Academy of Sciences, Qingdao 266071, China; 2. Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Received: Sep., 8, 2004

Key words: internal wave; four-layer stratified fluid; small amplitude wave theory

Abstract: In this paper, motions of internal waves in four-layer stratified fluid were investigated, and solutions of the elevations of the interfacial waves and the associated velocity potentials were presented based on small amplitude wave theory. Patterns of distribution of mean velocity due to the waves and its dispersion relationship were derived, and they are compared with the analytic results of the study on internal wave in three-layer stratified fluid.

(本文编辑: 刘珊珊)