第2卷 第3期 海洋与湖沼 Vol. II, No. 3
1959年7月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA July, 1959

半封閉型海区中风海流的数值計算* **

何恩典 尤芳湖 沈凌云 許天增
(厦門大学物理系) (中国科学院海洋研究所)

一、微分方程及边界条件

本文所計算的对象——胶州湾，是一个半封閉型的海湾。湾口两岸相距仅約三公里，其余均为陆地所包围。以海图基准面为准，深度均小于60米，海湾直径約为15浬。西部和北部为平坦的沙滩，深度較浅；南部与外海相通，深度較大。由于胶州湾海区范围甚小而且深度不大，科氏力可以略去不計，风場可視为均匀的。在风以及由风引起的海流均已稳定后，可得下列的流体动力方程及連續方程：

$$g\rho\frac{\partial\zeta}{\partial x}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

$$g\rho\frac{\partial\zeta}{\partial y}+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{2}$$

其中 u、v 是水平坐标 x, y 方向上的流速分量；ζ 是海水受到扰动后的海面升高($z=0$ 是未扰动的海平面)，ρ 是海水密度，A_z 是垂直动量交換系数，視为常量。

如果海面上风的应力分量以 T_x, T_y 表示，則在海面，即当 $z=0$ 时有：

$$A_z\frac{\partial u}{\partial z}=-T_x,\qquad A_z\frac{\partial v}{\partial z}=-T_y。 \tag{3}$$

在海底流速应等于零，即当 $z=H(x,y)$，有

$$u=v=0, \tag{4}$$

其中 $H(x,y)$ 为水深。

根据边条件(3)、(4)，把(1)积分，并引入全流分量：

$$S_x=\int_0^H u\,dz,\qquad S_y=\int_0^H v\,dz;$$

及全流函数 Ψ：

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=S_y,\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial y}=-S_x。$$

通过簡单的計算，海面陡度 $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ 和各层流速 u、v 与 Ψ 的关系可用下式表示：

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\frac{3T_x}{2g\rho H}-\frac{3A_z}{g\rho H^3}\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\zeta}{\partial y}=-\frac{3T_y}{2g\rho H}+\frac{3A_z}{g\rho H^3}\frac{\partial\Psi}{\partial x}; \tag{5}$$

---

* 中国科学院海洋研究所調查研究报告第99号。
** 中央气象局的謝炳源、康荷蓮同志为本文作了很多計算，特表謝意。

$$u = \frac{T_x}{4A_z}\left(H - 4z + \frac{3z^2}{H}\right) - \frac{3(H^2 - z^2)}{2H^2}\frac{\partial\Psi}{\partial y},$$
$$v = \frac{T_y}{4A_z}\left(H - 4z + \frac{3z^2}{H}\right) + \frac{3(H^2 - z^2)}{2H^2}\frac{\partial\Psi}{\partial x}。 \qquad (6)$$

从式(5)消去 ζ，即得 Ψ 应滿足的微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H^3}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H^3}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) - \frac{1}{2A_z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T_y}{H}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T_x}{H}\right)\right] = 0。 \qquad (7)$$

这是卜阿桑方程，在已知的边条件下可进行近似积分。在岸边，$H = 0$，有

$$\Psi|_{岸} = 0; \qquad (8)$$

在湾口，

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = S_y = \int_0^H v\,dz, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = -S_x = -\int_0^H u\,dz, \qquad (9)$$

其中 v、u 可由实測得到。这样，对于一个半封閉型的海区，方程(7)就有第一类和第二类的混合边条件。当求出全流函数 Ψ 之后，根据方程組(5)、(6)就可求得湾內各点的海面陡度和各层的流速分量。

上述方程(7)是由費森堡姆 (А. И. Фельзенбаум 1956)[1] 导出的，他在另外两篇文章里分别考虑了 A_z 不是常量[2]和科氏力作用下的情形[3]，都得到了与方程(7)类似的結果，但整个形式較为复杂。

二、計算方法与步驟

方程(7)附上了第一或第二边条件，仅在几种很特殊的边界(如圓或长方形)下，才能够求得准确的解，一般則可进行数値計算求它的近似解。我們这里应用有限差分解法，即网格法。在計算时把所考虑的海区划成网格，在网格的結点上求与原微分方程相近似的差分方程，然后求滿足差分方程的近似解。

1. 計算的网格

考虑到胶州湾的边界形状，我們把它分成了等边的三角形网格(看图 1)。三角形边长的选取有二种，在海湾南部深度变化較大，而且岸形較复杂，边长取 $a = 1.29 \times 10^5$ 厘米，其余部分边长为 $2a = 2.58 \times 10^5$ 厘米。这样，計算用的网格与实际的边界就十分相近。网格的結点就是我們所要計算的点。它們的站名分别以二相交的格綫命名，如 Aa、Ab……；Ba、Bb……。

2. 差分方程

将方程(7)改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(P\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) + Q = 0 \qquad (10)$$

的形式，其中

$$P = \frac{1}{H^3}, \quad Q = -\frac{1}{2A_z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T_y}{H}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T_x}{H}\right)\right]。 \qquad (11)$$

它們为已知函数。与方程(10)对应的差分方程[4]是：

$$\sum_i \frac{P_0 + P_i}{2}\frac{1}{x_i}\Psi_i - \Psi_0\sum_i \frac{P_0 + P_i}{2}\cdot\frac{1}{x_i} + \frac{1}{4}a^2Q\sum_i x_i = 0, \qquad (12)$$

其中 P_0、P_i、Ψ_0、Ψ_i 分别为計算点 (0 点)与其周围第 i 点 (对于我們所取的网格，$i = 1, 2, \cdots\cdots 6$)的 P 值和 Ψ 值，x_i 为第 i 点与 0 点的距离，a 为三角形网格的边长。

为了計算方便,可以将一些与长度有关的变量化为无量綱的变量，而把方程(7)变为相应的无量綱的方程。

为此,作变换:

$$x = ax', \quad y = ay', \quad H = aH',$$

則

$$\Psi = a^3\Psi'。$$

这組无量綱的新变量仍滿足方程(7)。

当方程化为无量綱后，上面提到的計算图案里，在湾口小三角形网格每边长 $x_i = a = 1.29 \times 10^5$ 厘米,所以 $x_i' = 1$。对于大的网格，$x_i = 2a$，$x_i' = 2$。为了簡便,下面所用的符号都不作改变而仍記为 x、y、$\Psi\cdots\cdots$。

3. 关于 P、Q

为了避免边界点上深度的倒数 $\left(\frac{1}{H}\right)$ 为无穷大，我們取边界点的深度为 1 米(但这里的 Ψ 仍等于 0)。

各計算点的深度是根据海图选取的。为了不使深度有个别特殊变化的点出現,我們选取各計算点的深度,系取其周围深度的平均值。

各計算点的 $\frac{1}{H}$ 和 $\frac{1}{H^3}$ (无量綱的)可列出表来,以便計算。根据青島海洋气象台多年的統計,胶州湾及其附近冬季經常吹北风。为此,我們在計算胶州湾冬季的风海流中,选取了在稳定均匀的正北风場作用下所产生的风海流。

根据我們选取的坐标系統,在正北风場作用下,

$$T_y = T\cos\theta = T\cos 180^\circ = -T, \quad T_x = T\sin\theta = 0。$$

代入(11)式得:

$$Q = \frac{T}{2A_z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)。 \tag{13}$$

根据罗士比(Rossby 1936)的公式,风应力与风速有如下的关系:

$$T = k\rho_a W^2,$$

其中 $k = 0.0025$，ρ_a 为空气密度，W 为风速。如 W 的单位取米/秒,則

$$T = 3.2 \times 10^{-2}W^2, \qquad Q = \frac{1.6\times10^{-2}W^2}{A_z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)。$$

为了計算方便起見，我們暂假定 $\frac{W}{A_z} = 1$，$W = 1$ 米/秒。于是(13)式又可写成:

$$Q = 1.6 \times 10^{-2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)。 \tag{13'}$$

各計算点的Q值可列出表来。

从方程 (6) 及 (7) 可以看出，风海流的流速和风速成正比，也与比值$\frac{W}{A_z}$成正比。当算得比值$\frac{W}{A_z} = 1$ 和 $W = 1$ 米/秒的风場作用下产生的风海流后，只要将算得流速乘 W

(米/秒)，与实測資料比較，确定 $\frac{W}{A_z}$ 的比值，再与此比值相乘，卽得在风速 W 的作用下所产生的风海流流場。

4. 边条件

在湾内岸边取 $\Psi=0$，在薛家島与团島之間的湾口断面上 Ψ 卽不为零，这时从湾口測站的海流昼夜連續观測記录中，算出各层余流，并据此按公式(9)算得边界上的 $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$。此卽为湾口的第二类边条件。

根据湾口昼夜連續测流資料及青島海洋气象台多年的測风資料（我們認为在不大的胶州湾内，青島海洋气象台的测风記录是能够代表胶州湾内的风場的），得出胶州湾在冬季基本上是在平均风速为 5—6 米/秒的北风控制之下。参考了进行海流昼夜連續观测时的风速，我們选取风矢北分量平均值 6.4 米/秒，作为胶州湾海区冬季北风場的强度，并由此計算风海流。

5. 松弛图案

方程(12)的近似解法有很多种，最好的方法当然是利用电子計算机在一定的程序下求解。如果用手算（包括利用电动計算机），松弛法看来是一种較为簡便的方法。

上面已提到，边界上的 Ψ 值 $\left(或\ \frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)$ 为已知。我們給各結点以 Ψ 的初值，这些初值可以任意假定，这里我們都取它为零。当然，如能根据边界值的变化規律給以較好的初值，是可以減小計算的反复次数的。可以想到，一般所給的假定值不会满足方程(12)，也就是說，将某一点和它周围六点的初值代入(12)式，算出的数值并不等于零，这数值叫做剩余 R。松弛的目的，在于使各結点的 R 值趋近于零，为此必須改变假定的 Ψ 值。根据方程(12)經过多次反复的“松弛”后，就可使各結点剩余值变为最小。把逐次改变的 Ψ 值相加，卽可得出各結点上眞正的 Ψ 值。

由于网格不同，松弛的图案及計算剩余的公式也不同，下面列出在我們計算中所遇到的几种形式。

a. 网格边长 $X_{i=1}^{6}=2$ 的正規图案，如图 2 所示。計算剩余的公式为：

$$R=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{4}(P_i+P_0)\Psi_i-\Psi_0\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{4}(P_i+P_0)+3Q_0。\qquad(14)$$

采用这图案及公式的計算点如站 Qj、Pf……。可以看出，計算点 0 的 Ψ 值增加 1 时，該点剩余減小 $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{4}(P_i+P_0)$，它周围第 i 点增加了 $\frac{1}{4}(P_0+P_i)$。

b. 网格边长 $x_{i=1}^{6}=1$ 的正規图案，如图 3 所示。計算剩余的公式为：

$$R=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{2}(P_i+P_0)\Psi_i-\Psi_0\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{2}(P_i+P_0)+\frac{3}{2}Q_0。\qquad(15)$$

采用这图案及公式的計算点如站 Gd、Ff……。

c. 如站 Rm，网格边长 $x_{i=1}^{5}=2$，而 $x_6=1$，松弛图案如图 4 所示。計算剩余的公式为：

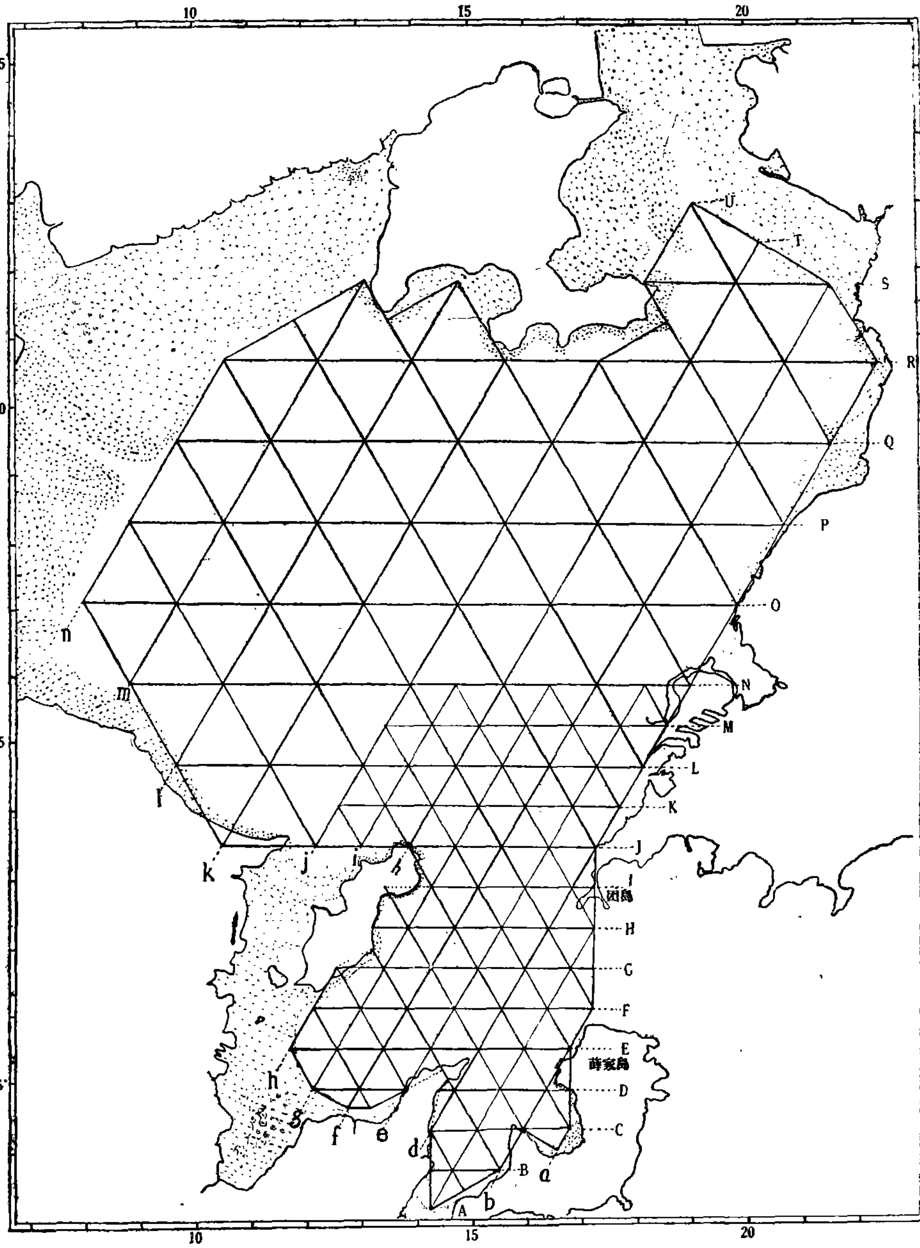

图1　数值計算用的网格
Рис. 1. Схема расчетных сеток численным методом.

$$R = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{4}(P_i + P_0)\Psi_i + \frac{P_0 + P_6}{2}\Psi_6 - \Psi_0\left[\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{4}(P_i + P_0) + \frac{1}{2}(P_6 + P_0)\right] + \frac{11}{4}Q_0 \text{。} \tag{16}$$

采用这种松弛图案及公式的計算点还有 Sh 等。

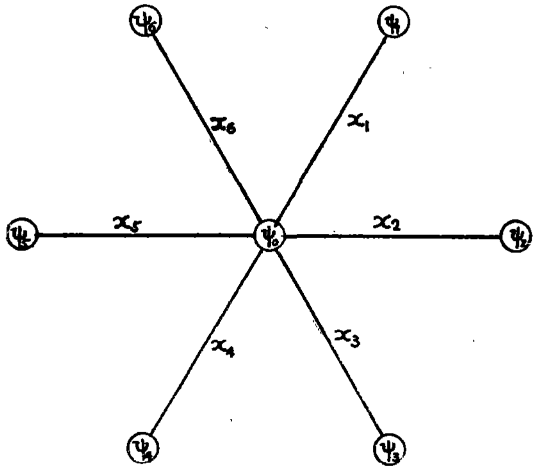

图 2　正 規 松 弛 图 案
($x_{i=1}^{6}=2$)
Рис. 2. Схема "ослабления" с равными шагами.

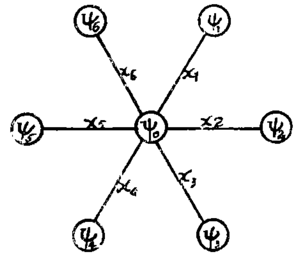

图 3　正規松弛图案
($x_{i=1}^{6}=1$)
Рис. 3. Схема "ослабления" с равными шагами.

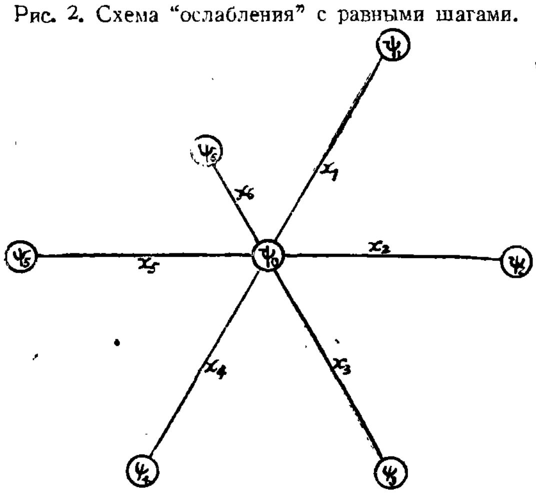

图 4　不 正 規 松 弛 图 案
($x_{i=1}^{5}=2,\ x^{6}=1$)
Рис. 4. Схема "ослабления" с неравными шагами.

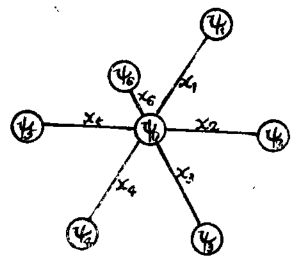

图 5　不正規松弛图案
($x_{i=1}^{5}=1,\ x_6=1/2$)
Рис. 5. Схема "ослабления" с неравными шагами.

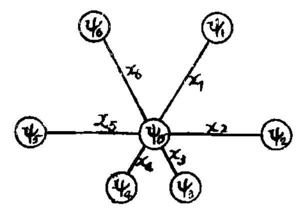

图 6　不正規松弛图案
($x_1=x_2=x_5=x_6=1, x_3=x_4=1/2$)
Рис. 6. Схема "ослабления" с неравными шагами.

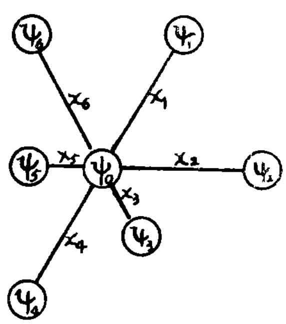

图 7　不正規松弛图案
($x_1=x_2=x_4=x_6=1,\ x_3=x_5=1/2$)
Рис. 7. Схема "ослабления" с неравными шагами.

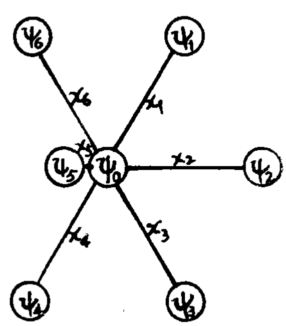

图 8　不正規松弛图案
($x_{i=1}^{4}=x_6=1,\ x_5=1/3$)
Рис. 8. Схема "ослабления" с неравными шагами.

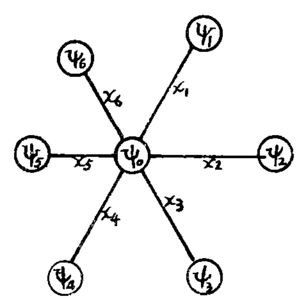

图 9　不正規松弛图案
($x_{i=1}^{4}=1,\ x_5=x_6=3/4$)
Рис. 9. Схема "ослабления" с неравными шагами.

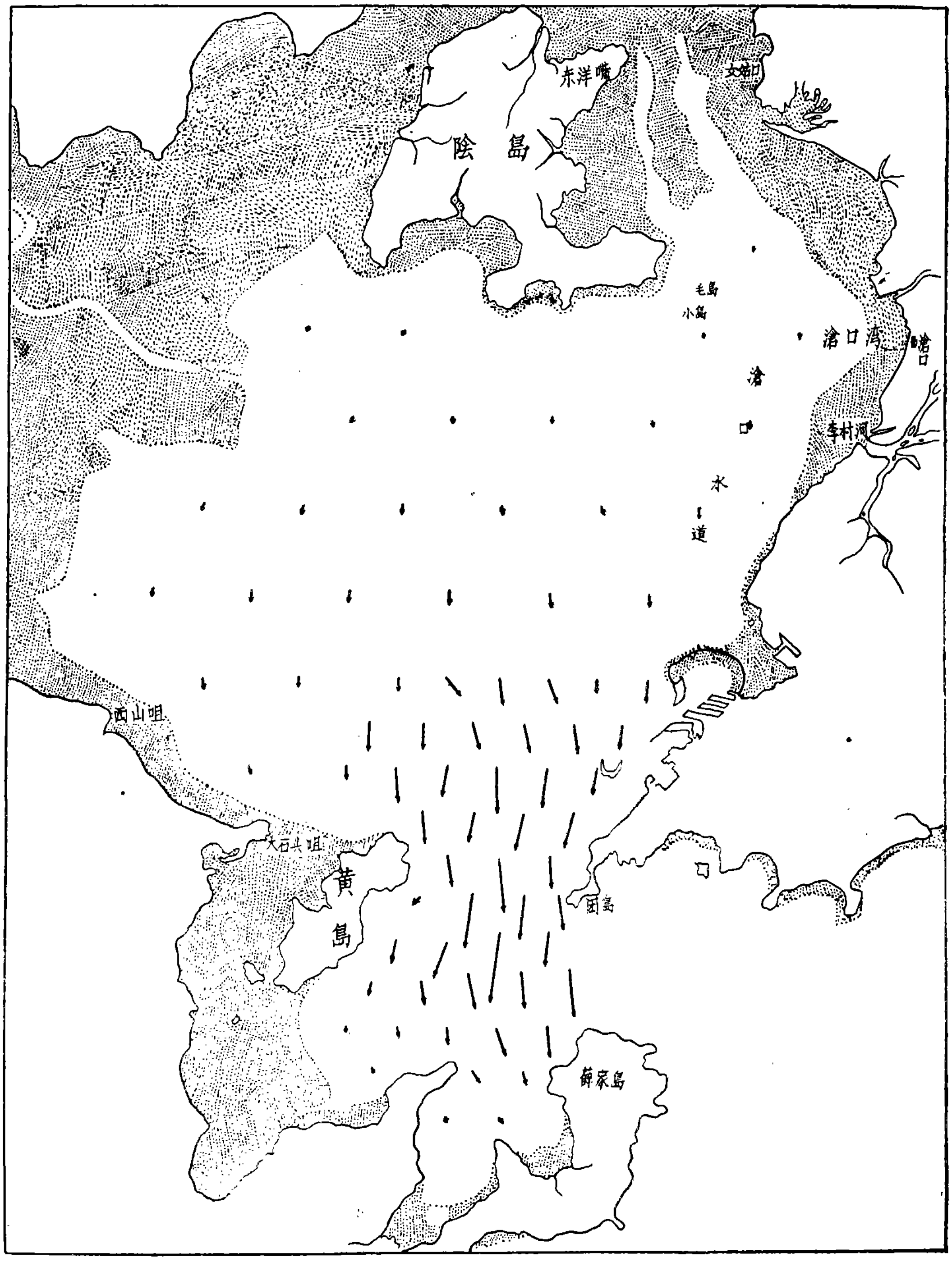

图10 表层风海流矢量图
Рис. 10. Вектор поверхностного ветрового течения.

d. 网格边长如站 Gg, $x_{i=1}^{5}=1$,而 $x_6=\frac{1}{2}$,则松弛图案如图 5 所示。計算剩余的公式为:

$$R=\sum_{i=1}^{5}\frac{P_i+P_0}{2}\Psi_i+(P_6+P_0)\Psi_6-\Psi_0\left[\sum_{i=1}^{5}\frac{P_i+P_0}{2}+(P_6+P_0)\right]+\frac{11}{8}Q_0。\quad(17)$$

采用类似这种图案及公式的計算点还有 Id、Gc、Ee、Db 等。

e. 网格边长如站 Df, $x_1=x_2=x_5=x_6=1$, $x_3=x_4=\frac{1}{2}$, 如图 6 所示。計算剩余的公式是:

$$R=\sum_{i=1,2,5,6}\frac{P_i+P_0}{2}\Psi_i+\sum_{i=3,4}(P_i+P_0)\Psi_i-\Psi_0\left[\sum_{i=1,2,5,6}\frac{P_i+P_0}{2}+\sum_{i=3,4}(P_i+P_0)\right]+\frac{5}{4}Q_0。\quad(18)$$

f. 网格边长如站 Bc, $x_1=x_2=x_4=x_6=1$, $x_3=x_5=\frac{1}{2}$ 的图案,如图 7 所示。計算剩余的公式是:

$$R=\sum_{i=1,2,4,6}\frac{P_i+P_0}{2}\Psi_i+\sum_{i=3,5}(P_i+P_0)\Psi_i-\Psi_0\left[\sum_{i=1,2,4,6}\frac{P_i+P_0}{2}+\sum_{i=3,5}(P_i+P_0)\right]+\frac{5}{4}Q_0。\quad(19)$$

g. 网格边长如站 Ig, $x_{i=1}^{4}=x_6=1$, $x_5=\frac{1}{3}$ 的图案,如图 8 所示。計算剩余的公式为:

$$R=\sum_{i=1,2,3,4,6}\frac{P_i+P_0}{2}\Psi_i+\frac{3(P_5+P_0)}{2}-\Psi_0\left[\sum_{i=1,2,3,4,6}\frac{P_i+P_0}{2}+\frac{3(P_5+P_0)}{2}\right]+\frac{4}{3}Q_0。\quad(20)$$

h. 网格边长如站 Hg, $x_{i=1}^{4}=1$, $x_5=x_6=\frac{3}{4}$, 如图 9 所示,計算剩余的公式如下:

$$R=\sum_{i=1}^{4}\frac{P_i+P_0}{2}\Psi_i+\sum_{i=5}^{6}\frac{2(P_i+P_0)}{3}-\Psi_0\left[\sum_{i=1}^{4}\frac{P_i+P_0}{2}+\sum_{i=5}^{6}\frac{2(P_i+P_0)}{3}\right]+\frac{11}{8}Q_0。\quad(21)$$

我們利用上述的松弛图案計算出各結点的 Ψ 值，大部分的計算工作是用电动計算机进行的,計算时步步核对,直到网格內各結点的剩余最小为止。这里必須注意,由此算得的 Ψ(即 Ψ')仍是无量綱的,还应乘上 a^3 才是所要求的 Ψ。同样, $x=ax'$, $y=ay'$。

三、計算結果的討論

在 Ψ 值已求得的情况下,根据式(6)算得表层(0 米层)、5 米层的 u、v, 用矢量合成法求得各結点风海流的流矢量,繪成矢量图(看图 10)。从图上可以得出在均匀、稳定的正

北风場作用下所产生的表层风海流,基本上与风向一致;而至湾口則有偏东向湾外流的趋向。近岸各站因受岸形影响,流向基本上与岸向一致。

在图中还可以明显地看到,海湾的北部及西部表层流的流速較南部湾口附近的流速为小。这是由于北部及西部的深度都很浅,受海底摩擦影响显著的緣故。在南部及湾口表层流速較大,除了因深度較大外,海面縮窄亦是主要原因。同时,还可看到,表层沒有出現水平环流系統。

从其余各层的海流矢量图中还可以看出:不論 5 米层或 10 米层,凡是接近海底,則流向就有与风向相反的趋势。这是由于在正北风場的作用下,胶州湾南部有明显的增水,而北部則显著減水,因而产生了流速不大的垂直环流,并作为北部的补偿流。

計算結果表明,风速1米/秒时,表层最大流速可以达到 37 厘米/秒。因此,当胶州湾在 3 級风的作用下,个别点的风海流的流速可达 3 节左右,这与实測的数值相比是大了,主要的原因是由于我們所用 $\frac{T}{A_z}$ 的数值偏高的緣故。在与实測数值比較中,就可选取适当的 $\frac{T}{A_z}$ 的平均值,$\left(\text{其实},\frac{T}{A_z}\text{远小于 }1\right)$,算出在正北风場作用下,胶州湾內所形成的风海流流場。在 5 級的正北风作用下,个别点的最大流速可达 1 节左右。总的看来,計算所得的結果基本上和我們昼夜連續站所得到的結果是一致的。

此外,在流速的垂直分布上,还可看出各站的流速量值均自表面向底部递減,这亦是由于海底摩擦所引起的現象。

最后,我們認为象胶州湾这样一个半封閉型的海区中,应用上述数值計算的方法,进行风海流的預报是值得采取的。

参 考 文 献

[1] Фельзенбаум, А. И.: 1956. Связь Ветра с Уровнем и Установивщимися Течениями Мелкого моря, *ДАН СССР*, **109** (1): 80—83.

[2] Фельзенбаум, А. И.: 1957. Обобщение Теории Установившихся Течений Мелкого Моря на Случай Переменого Коэффициента Вертикального Обмена. *ДАН СССР*, **119** (1): 86—89.

[3] Фельзенбаум, А. И.: 1956. Обобщение Теории Экмана на Случай Неравномерного Ветра и Произвольного Рельефа Дна Замкнутого Моря, *ДАН СССР*, **109**, (2): 299—302.

[4] Southwell, R. V.: 1946. Relaxation Methods in Theoretical Physics. p. 144—150, 67—69.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕТРОВОГО ТЕЧЕНИЯ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ В ПОЛУЗАМКНУТОМ МОРЕ

(Резюме)

Хэ Эн-диан Ю Фан-ху Сын Лейн-ин Си Тиен-чжэн
(*Амойский университет*) (*Институт Океанологии АН КНР*)

На основании приведения численным методом, приведено и рассмотрено устойчивое устоновившоеся течение под действия свойственного равновесного и устойчивого поля ветра в заливе Цзяочжоу.

Мы применяли уравнение А. И. Фельзембаума, которое получено по уравнению динамики морских течений, несколько сократив и интегрируя, потом вводя в функцию полных потоков. Данная функция удовлетворяла уравнению Пуассона.

Приближенное решение получилось путем превращения уравнения Пуассона в соответствующее уравнение конечной разности, причем принятия треугольной сетки и методы "ослабления". На основании полученной фанкции полных потоков, получено поле ветрового течения в данном районе.

Результат вычисления доказан, что под действия северного поля ветра в 5/баллов над морем, направление поверхностного ветрового течения залива Цзяочжоу в основном совпадает с направлением ветра. Максимальная скорость течения достигается около 1 уз., у придонного слоя направление течения противоположно направлению течения поверхностного течения, причем скорость течения уменьшается.