位势理論和象方法在风海流与升降流研究中的应用*

李心銘 汪景庸
(山东海洋学院)

目前,在海流研究中广泛地采用了 Fourier 方法,本文尝試用位势理論及象方法,从所解决的問題来看,后者有較广的应用范围,而且求解过程簡捷、严密。

文中簡捷地給出了无限深度的风海流的解,而且首次求出了有限深度情况中的普遍解。本文还研究了近岸处的风海流。对任意风胁強的情况給出了无限深度与有限深度时所述問題的解。在 K. Hidaka 的带状风系假定下,解的形式比 K. Hidaka 的解簡单得多。我們还把沿岸流的研究归結为特殊函数的研究,使得能够充分精确地研究近岸处的风海流。在本文的附录中,証明了在 Hidaka 給出的条件下,从我們得到的普遍解出发,就可以推出 K. Hidaka 的解。

一、无限广闊海域上的风海流

1. 数学提法

本文研究三維的稳定风海流。設海水的側向和垂直方向运动学粘滞系数 N_h 与 N_v 都是常量。考虑柯氏力的作用,但不考虑其随緯度的变化。

取 x 軸沿緯圈向东,y 軸沿經圈向北,z 軸鉛直向下且与海面垂直。若略去非綫性項不計,則稳定海流的运动方程[2]为:

$$N_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+N_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\omega\sin\varphi\cdot v=0 \tag{1}$$

$$N_h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+N_v\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-2\omega\sin\varphi\cdot u=0 \tag{2}$$

其中 u、v 分别是沿 x 方向与 y 方向的流速分量,ω 是地球自轉角速度,φ 是地理緯度。

作自变数变换:

$$\xi=x/D_h,\ \eta=y/D_h,\ \zeta=z/D_v,$$

其中 $D_v=\pi\sqrt{N_v/\omega\sin\varphi}$, $D_h=\pi\sqrt{N_h/\omega\sin\varphi}$, D_v 是摩擦深度, D_h 是摩擦距离。

再令 $W=u+iv$,則方程(1)、(2)可合并为:

$$(\nabla^2-a^2)W=0 \tag{3}$$

其中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2},\qquad a=\sqrt{2\pi^2 i}。$$

* 陈成琳老师曾多次审阅原稿,提出许多宝贵意见,奚盘根、余宙文等同志曾阅读原稿,提供宝贵意见,谨此表示深切谢意。

若 ρ 为海水密度，T_ξ、T_η 分别为风胁強沿 ξ、η 方向的分量，则問題的边界条件为：

$$\text{当 } \zeta = 0 \text{ 时，} \qquad -\frac{N_v}{D_v}\frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{T}{\rho} = \frac{1}{\rho}(T_\xi + iT_\eta) \tag{4}$$

$$\text{当 } \zeta \to \infty \text{ 时，} \qquad W = 0, \tag{5}$$

$$\text{或当 } \zeta = \frac{H}{D_u} \text{ 时，} \qquad W = 0, \tag{6}$$

其中 H 是海的深度。

显然方程(3)满足边界条件(4)和(5)的解 W 就是无限深度风海流的解，而当选用边界条件(6)时，W 就是有限深度风海流的解。

2. 无限深度的风海流

由位势理論[1]可知，位势函数

$$\Phi(M) = \iint_\sigma \frac{e^{-ar_{MP}}}{r_{MP}} f(P)\, d\sigma_P$$

在积分曲面 σ 之外满足方程(3)，而且当曲面 σ 为平面时，$\Phi(M)$ 在 σ 上的內法向导数等于 $-2\pi f(p)$。于是，我們立即得到方程(3)满足边界条件(4)和(5)的解[2]：

$$W = \frac{D_v}{2\pi N_v} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{\zeta^2+(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2}}}{\sqrt{\zeta^2+(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2}} \frac{T(\xi',\eta')}{\rho(\xi',\eta')} d\xi'\, d\eta' \tag{7}$$

这就是我們所求的风海流的解。

記 $r_1 = \sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}$，則

$$W = \frac{D_v}{2\pi N_v} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ar_1}}{r_1} \frac{T(\xi',\eta')}{\rho(\xi',\eta')} d\xi'\, d\eta' \tag{8}$$

只要把 ξ、η 和 ζ 换为原来的变量 x、y 和 z 并把实部与虚部分开，就可以得到水平流速 u、v，結果是明显的，在此就不具体写出了。

当 T 与 ρ 不依賴于 η 时，解(8)可以进一步化簡，此时由(8)式可得：

$$\begin{aligned} W &= \frac{D_v}{2\pi N_v} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ar_1}}{r_1} \frac{T(\xi')}{\rho(\xi')} d\xi' d\eta' = \\ &= \frac{D_v}{2\pi N_v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi')}{\rho(\xi')} d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ar_1}}{r_1} d\eta' \end{aligned} \tag{9}$$

作自变数变换：$\eta'' = \eta' - \eta$，则

$$W = \frac{D_v}{2\pi N_v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi')}{\rho(\xi')} d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ar_1'}}{r_1'} d\eta'',$$

其中 $r_1' = \sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2 + \eta''^2}$。

$$\begin{aligned} W &= \frac{D_v}{\pi N_v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(\xi')}{\rho(\xi')} d\xi' \int_0^{\infty} \frac{e^{-ar_1'}}{r_1'} d\eta'' = \\ &= \frac{D_v}{\pi N_v} \int_{-\infty}^{\infty} K_0\left(a\sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2}\right) \frac{T(\xi')}{\rho(\xi')} d\xi' \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $K_0(a\sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2})$ 是第零阶虚变量 Bessel 函数或 Mcdoner 函数[5]。

在这种情况下,我們只要做一次积分計算,就得出解的数值。

由于 $a = \sqrt{2\pi^2 i} = \sqrt{2\pi^2}\cdot\sqrt{i}$,

$$K_0(a\sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2}) = K_0(\sqrt{i}\sqrt{2\pi^2[\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2]}) =$$
$$= \mathrm{ker}(\sqrt{2\pi^2[\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2]}) + i\,\mathrm{kei}(\sqrt{2\pi^2[\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2]}) \tag{11}$$

这里的 ker 与 kei 是第零阶第二类 Thomson 函数。这个函数的图象与数值表見文献[3]。利用(11)式容易算出解的虚部与实部。

当 T、ρ 为常值时,由解(7)出发尚可求出更簡单的有限形式的解。为此作坐标变換:

$$\xi' - \xi = r\cos\theta,\quad \eta' - \eta = r\sin\theta,$$

此时有

$$W = \frac{D_v T}{\rho N_v}\int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{r^2+\zeta^2}}}{\sqrt{r^2 + \zeta^2}}\,r\,dr = \frac{D_v T}{a N_v \rho}\,e^{-a\zeta} \tag{12}$$

設 $T_x = 0$, $T = iT_y$, 計算得到:

$$W = \frac{T_y}{\sqrt{2N_v\omega\sin\varphi}}\,e^{-\sqrt{\frac{\omega\sin\varphi}{N_v}}(1+i)z + i\frac{\pi}{4}} \tag{13}$$

令 $\beta = \sqrt{\dfrac{\omega\sin\varphi}{N_v}}$, 則有

$$W = \frac{T_y}{\sqrt{2}\,\beta N_v \rho}\,e^{-\left(\beta z - \frac{\pi}{4}\right)i - \beta z}. \tag{14}$$

这个結果指出在 T、ρ 为常值的条件下,在平行于海面的平面內各点的流速是相同的,因而不存在側向混合,(14)式是 Ekman 不計側向混合时所曾得到的結果,不过我們是在許可側向混合情况下求出的。

3. 有限深度的风海流

現在,我們考虑海深 H 小于 $D_v = \pi/\beta$(即摩擦深度)但大于 $D_v/2$ 的浅海的风海流問題。这时解(8)就不再适用,因为它不滿足边界条件(6)。但是这个解的格林函数是以比指数律减小得更快的速率而減小的,即当 z 增加时,风海流的流速是以指数律减小的。因此,我們可以用象方法再給出滿足方程(3)的一个特解,使这个特解与解(8)之和滿足边界条件(6),就得到所述問題的解了。为此我們必須先做出海域对海底的象来。令海面的象位于 $z = 2H$ 或 $\zeta = \dfrac{2H}{D_v}$, 并在 $\zeta = \dfrac{2H}{D_v}$ 的平面上給出如下的风系:

$$\frac{T\left(\xi, \eta, \dfrac{2H}{D_v}\right)}{\rho\left(\xi, \eta, \dfrac{2H}{D_v}\right)} = -\frac{T(\xi, \eta)}{\rho(\xi, \eta)},$$

則此风系在海域內引起的流速为:

$$W' = \frac{D_v}{2\pi N_v}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ar_2}}{r_2}\,\frac{T\left(\xi', \eta', \dfrac{2H}{D_v}\right)}{\rho\left(\xi', \eta', \dfrac{2H}{D_v}\right)}\,d\xi'\,d\eta' =$$

$$= -\frac{D_v}{2\pi N_v}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ar_2}}{r_2}\frac{T(\xi',\eta')}{\rho(\xi',\eta')}d\xi'\,d\eta' \tag{15}$$

其中 $r_2=\sqrt{\left(\zeta-\frac{2H}{D_v}\right)^2+(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2}$。

W' 是我們所需的特解的一部分。我們再将海域以及海域对海底的象一起对海面做象，将海域延拓到区域 $-2H \leqslant z \leqslant 0$ 上。在 $\zeta=-2H/D_v$ 的平面上給出如下的风系：

$$\frac{T\left(\xi,\eta,-\frac{2H}{D_v}\right)}{\rho\left(\xi,\eta,-\frac{2H}{D_v}\right)}=-\frac{T(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\eta)},$$

則此风系在海域內引起的流速为：

$$W''=\frac{D_v}{2\pi N_v}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ar_3}}{r_3}\frac{T\left(\xi',\eta',-\frac{2H}{D_v}\right)}{\rho\left(\xi',\eta',-\frac{2H}{D_v}\right)}d\xi'\,d\eta'=$$

$$=\frac{-D_v}{2\pi N_v}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ar_3}}{r_3}\frac{T(\xi',\eta')}{\rho(\xi',\eta')}d\xi'\,d\eta' \tag{16}$$

其中 $r_3=\sqrt{\left(\zeta+\frac{2H}{D_v}\right)^2+(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2}$。

将(8)式、(15)式与(16)式相加，就有

$$W=(8)\text{式中的}\,W+W'+W''=\frac{D_v}{2\pi N_v}\iint_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-ar_1}}{r_1}-\frac{e^{-ar_2}}{r_2}-\frac{e^{-ar_3}}{r_3}\right)\times$$

$$\times\frac{T(\xi',\eta')}{\rho(\xi',\eta')}d\xi'\,d\eta' \tag{17}$$

W 滿足方程(3)是显然的。由直接驗証可知 W 滿足边界条件(4)。現在我們說明 W 近似地滿足边界条件(6)。

当 $\zeta=H/D_v$ 时，由于 $r_1=r_2$，所以就有

$$W|_{\zeta=H/D_v}=\frac{-D_v}{2\pi N_v}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ar_3}}{r_3}\frac{T(\xi',\eta')}{\rho(\xi',\eta')}d\xi'\,d\eta'|_{\zeta=H/D_v}$$

为了說明上式是一个小量，我們以 T、ρ 的平均值 $\bar{T}$、$\bar{\rho}$ 代入上式。且不失一般性，設 $\bar{T}_\xi=0$，(或 $\bar{T}_\eta=0$)，并回到原来的变数，就有：

$$W|_{z=H}=\frac{\bar{T}_y}{\sqrt{2\omega\sin\varphi\cdot N_v\bar{\rho}}}e^{-\sqrt{\frac{\omega\sin\varphi}{N_v}}(1+i)3H+i\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\bar{T}_y}{\sqrt{2}\,\beta N_v\bar{\rho}}e^{-3(1+i)\beta H+i\frac{\pi}{4}}$$

所以 $|W(z=H)|=\frac{\bar{T}_y}{\sqrt{2}\,\beta N_v\bar{\rho}}e^{-\frac{\pi}{D_v}\cdot 3H}$,

当 $H > \frac{D_v}{2}$ 时

$$|W(z=H)| < \frac{\overline{T}_y}{\sqrt{2}\,\beta N_v \overline{\rho}} e^{-\frac{3}{2}\pi}$$

在 Ekman 的风海流理論中，認为 $\frac{\overline{T}_y}{\sqrt{2}\,\beta N_v \overline{\rho}} e^{-\pi}$ 与表面流速 $\frac{\overline{T}_y}{\sqrt{2}\,\beta N_v \overline{\rho}}$ 相比可看作是一个可以忽略的小量。所以我們認为上述 $|W(z=H)|$ 的值与 $\frac{\overline{T}_y}{\sqrt{2}\,\beta N_v \overline{\rho}}$ 相比是一个可以忽略的小量。这就說明了 W 近似地滿足边界条件(10)。

应当指出解的近似程度取决于問題的要求，讀者完全可以从本文后面的精确解出发，任选級数中的前若干項，作出自己認为适用的近似解来。精确解的求得不受海深的限制。

当 $\frac{D_v}{4} < H < \frac{D_v}{2}$ 时，解(17)对于我們所选的精确度不再适用。因此我們需要連續地作象来延拓海域，并使风胁強在下述各平面上有定义：

$$\frac{T}{\rho} = \begin{cases} \frac{T(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\eta)}, & \text{当 } \zeta = -4H/D_v \text{ 时}, \\ -\frac{T(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\eta)}, & \text{当 } \zeta = -2H/D_v \text{ 时}, \\ \frac{T(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\eta)}, & \text{当 } \zeta = 0 \text{ 时}, \\ -\frac{T(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\eta)}, & \text{当 } \zeta = 2H/D_v \text{ 时}, \\ \frac{T(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\eta)}, & \text{当 } \zeta = 4H/D_v \text{ 时}, \end{cases}$$

于是，我們可以得出适用于这种情况的风海流的解：

$$W = \frac{D_v}{2\pi N_v} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-ar_1}}{r_1} - \frac{e^{-ar_2}}{r_2} - \frac{e^{-ar_3}}{r_3} + \frac{e^{-ar_4}}{r_4} + \frac{e^{-ar_5}}{r_5} \right) \frac{T(\xi',\eta')}{\rho(\xi',\eta')} d\xi'\, d\eta' \tag{18}$$

其中

$$r_4 = \sqrt{\left(\zeta - \frac{4H}{D_v}\right)^2 + (\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2},$$

$$r_5 = \sqrt{\left(\zeta + \frac{4H}{D_v}\right)^2 + (\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2}。$$

对于更浅的海，仿上述步驟可求解。由此容易求出适用于任意深度的精确解：

$$W = \frac{D_v}{2\pi N_v} \iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{e^{-ar_j}}{r_j} \frac{T(\xi',\eta')}{\rho(\xi',\eta')} d\xi'\, d\eta' \tag{19}$$

其中 $r_j = \sqrt{\left(\zeta - \frac{2jH}{D_v}\right)^2 + (\xi'-\xi)^2 + (\eta'-\eta)^2}$。

解(19)的收斂性是很容易証明的，这是因为它是一个交錯級数，且当 $j \to \infty$ 时其通項又趋于零。

对于无限深海，在解(19)中取 $j=0$，对 $H > \frac{1}{2} D_v$ 的浅海，取 $j = 0, \pm 1$，对于

$H > \frac{1}{4} D_v$ 的浅海，取 $j = 0, \pm 1, \pm 2$，即可分别得到解(8)、(17)和(18)。

在风胁強为常值且海水密度均匀的条件下，(19)式可以化簡为：

$$W = \frac{D_v T}{2\pi N_v \rho} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ar_j}}{r_j} d\xi' d\eta' =$$

$$= \frac{D_v T}{a N_v \rho} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-a\left|\zeta - \frac{2jH}{D_v}\right|} =$$

$$= \frac{D_v T}{a N_v \rho} \left[e^{-\frac{a}{D_v} z} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j e^{-\frac{a}{D_v}(2jH - z)} + \sum_{j=-1}^{-\infty} (-1)^j e^{-\frac{a}{D_v}(z - 2jH)} \right] =$$

$$= \frac{D_v T}{a N_v \rho} \left[e^{-\frac{a}{D_v} z} - \frac{e^{-\frac{a}{D_v}(2H - z)}}{1 + e^{-\frac{2aH}{D_v}}} - \frac{e^{-\frac{a}{D_v}(z + 2H)}}{1 + e^{-\frac{2aH}{D_v}}} \right] =$$

$$= \frac{D_v T}{a N_v \rho} \frac{e^{-\frac{a}{D_v} z} - e^{-\frac{a}{D_v}(2H - z)}}{1 + e^{-\frac{2aH}{D_v}}} = \frac{D_v T}{a N_v \rho} \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{D_v}(H - z)}{\operatorname{ch} \frac{a}{D_v} H} \tag{20}$$

(20)式是不考虑側向摩擦时已有的有限深海风海流的解。

二、近岸处的风海流

1. 数学提法

为了簡便起見，我們考虑平行于經圈的海岸。对于一般的直海岸，可用完全类似的方法来解决。此时，解W仍应满足方程(3)及边界条件(4)和(5)或(6)，此外，W还应满足一个在海岸流速为零的边界条件。綜合起来，所討論的問題归結为下面的定解問題[4]：

$$(\nabla^2 - a^2) W = 0, \tag{21}$$

$$\zeta = 0, \xi > 0, \quad -\frac{N_v}{D_v} \frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{T}{\rho}, \tag{22}$$

$$\xi = 0, \ W = 0 \tag{23}$$

$$\zeta \to \infty, \ \xi > 0, \ W = 0 \tag{24}$$

或

$$\zeta = \frac{H}{D_v}, \ \xi > 0, \ W = 0. \tag{25}$$

2. 近岸处无限深度的风海流

我們作出海域关于 $\xi = 0$ 的象，并在象海面上給出象风系，即如下延拓风胁強：

$$\frac{T(\xi, \eta)}{\rho(\xi, \eta)} = \begin{cases} \dfrac{T(\xi, \eta)}{\rho(\xi, \eta)}, & \xi > 0 \\ -\dfrac{T(-\xi, \eta)}{\rho(-\xi, \eta)}, & \xi < 0 \end{cases} \tag{26}$$

于是在整个 $\zeta = 0$ 平面上，$\frac{T}{\rho}$ 就有了定义。此时按位势理論我們作解

$$W = \frac{D_v}{2\pi N_v} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ar_1}}{r_1} \frac{T(\xi', \eta')}{\rho(\xi', \eta')} d\xi' \, d\eta' \tag{27}$$

由(26), $W = \frac{D_v}{2\pi N_v} \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ar_1}}{r_1} \frac{T(\xi', \eta')}{\rho(\xi', \eta')} d\eta' d\xi' - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ar_1}}{r_1} \frac{T(-\xi', \eta')}{\rho(-\xi', \eta')} d\eta' \, d\xi' \right.$

其中 $r_1 = \sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}$。

在上式的第二項中作自变数变换 $-\xi' = \xi''$, 并改写 ξ'' 为 ξ', 则得:

$$W = \frac{D_v}{2\pi N_v} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{e^{-ar_1}}{r_1} - \frac{e^{-ar_2}}{r_2} \right) \frac{T(\xi', \eta')}{\rho(\xi', \eta')} d\eta' \, d\xi' \tag{28}$$

其中 $r_2 = \sqrt{\zeta^2 + (\xi' + \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}$。

(28)式就是我們求得的近岸处风海流的解。

在 $\frac{T}{\rho}$ 只依賴于 ξ 而不依賴于 η 时,(28)式还可以継續化簡,此时

$$W = \frac{D_v}{\pi N_v} \int_0^\infty \frac{T(\xi')}{\rho(\xi')} [K_0(a\sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2}) - K_0(a\sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2})] d\xi' \tag{29}$$

如上所述这个函数的实部与虚部容易分出。

此时,垂直流速 W 可由連續方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

出发得出:

$$W = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z u \, dz$$

如果 $\frac{T}{\rho}$ 为常値,则有:

$$W = \frac{TD_v}{\pi N_v \rho} \int_0^\infty [K_0(a\sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2}) - K_0(a\sqrt{\zeta^2 + (\xi' + \xi)^2})] d\xi' =$$

$$= \frac{2D_v T}{\pi N_v \rho} \int_0^\xi K_0(a\sqrt{\xi'^2 + \zeta^2}) d\xi' \tag{30}$$

分开实部与虚部就得到:

$$u = \frac{2D_v}{\pi N_v \rho} \left[T_\xi \int_0^\xi \mathrm{Ker}(\sqrt{2}\pi\sqrt{\xi'^2 + \zeta^2}) d\xi' - \right.$$

$$\left. - T_\eta \int_0^\xi \mathrm{Kei}\,(\sqrt{2}\pi\sqrt{\xi'^2 + \zeta^2})\, d\xi' \right] \tag{31}$$

$$v = \frac{2D_v}{\pi N_v \rho} \left[T_\xi \int_0^\xi \mathrm{Kei}(\sqrt{2}\pi\sqrt{\xi'^2 + \zeta^2}) d\xi' + \right.$$

$$\left. + T_\eta \int_0^\xi \mathrm{Ker}(\sqrt{2}\pi\sqrt{\xi'^2 + \zeta^2})\, d\xi' \right] \tag{32}$$

如果风系平行于海岸, $T_\eta = \tau$, $T_\xi = 0$, 那末就有:

$$W = \frac{2D_v i\tau}{\pi N_v \rho} \int_0^\xi K_0(a\sqrt{\xi'^2 + \zeta^2})\, d\xi' \tag{33}$$

$$u = \frac{-2D_v\tau}{\pi N_v\rho}\int_0^{\xi}\mathrm{Kei}(\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\xi'^2+\zeta^2})\,d\xi' \tag{34}$$

$$v = \frac{2D_v\tau}{\pi N_v\rho}\int_0^{\xi}\mathrm{Ker}(\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\xi'^2+\zeta^2})\,d\xi' \tag{35}$$

此时表层流速的計算更为簡单：

$$u|_{\zeta=0} = -\frac{2D_v\tau}{\pi N_v\rho}\int_0^{\xi}\mathrm{Kei}(\sqrt{2}\,\pi\xi')\,d\xi' \tag{36}$$

$$v|_{\zeta=0} = \frac{2D_v\tau}{\pi N_v\rho}\int_0^{\xi}\mathrm{Ker}(\sqrt{2}\,\pi\xi')\,d\xi' \tag{37}$$

垂直流速为：

$$w(\xi,\zeta) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{z} -u\,dz = \frac{2D_v^2\tau}{\pi N_v\rho D_h}\int_0^{\xi}\mathrm{Kei}(\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\xi^2+\zeta'^2})\,d\zeta' =$$

$$= \frac{D_v}{D_h}u(\zeta,\xi) \tag{38}$$

如果与 K. Hidaka 一样，假設风限制在寬度为 L 的带形区域內，那末我們的解取如下形式：

$$W = \frac{D_v\tau i}{\pi N_v\rho}\int_0^{L/D_h}[K_0(a\sqrt{\zeta^2+(\xi'-\xi)^2}) - K_0(a\sqrt{\zeta^2+(\xi'+\xi)^2})]d\xi' \tag{39}$$

$$u = \frac{D_v\tau}{\pi N_v\rho}\int_0^{L/D_h}[\mathrm{Kei}(\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\zeta^2+(\xi'-\xi)^2}) - \mathrm{Ker}(\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\zeta^2+(\xi'+\xi)^2})]d\xi' \tag{40}$$

$$v = \frac{D_v\tau}{\pi N_v\rho}\int_0^{L/D_h}[\mathrm{Ker}(\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\zeta^2+(\xi'-\xi)^2}) - \mathrm{Kei}(\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\zeta^2+(\xi'+\xi)^2})]d\xi' \tag{41}$$

$$W = \frac{D_v\tau}{\pi N_v\rho}\int_0^{z/D_h}[\mathrm{Ker}(\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\zeta'^2+(\xi+L/D_h)^2}) -$$

$$-\mathrm{Kei}(\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\zeta'^2+(\xi-L/D_h)^2}) - 2\,\mathrm{Kei}(\sqrt{2}\,\pi\sqrt{\zeta'^2+\xi^2})]\,d\zeta' \tag{42}$$

这組解的形式比 K. Hidaka 的解簡单得多，在本文的附录中将証明，这組解与 K. Hidaka 的解是完全一致的，但是用本文中的表示式作数值計算却方便得多。

3. 近岸处有限深度的风海流

現在我們来考慮海深 $H < D_v$ 且大于 $D_v/2$ 的浅海中的风海流問題。首先我們用象方法分别作出海域对于海岸以及海底的象来，把风胁強延拓到下述平面上，卽：

$$\frac{T(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\eta)}\begin{cases} \dfrac{T(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\eta)}, & \text{当 } \xi>0,\ \zeta=0 \quad \text{时}, \\ -\dfrac{T(-\xi,\eta)}{\rho(-\xi,\eta)}, & \text{当 } \xi<0,\ \zeta=0 \quad \text{时} \\ -\dfrac{T(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\eta)}, & \text{当 } \xi>0,\ \zeta=\dfrac{2H}{D_v} \text{ 时} \\ \dfrac{T(-\xi,\eta)}{\rho(-\xi,\eta)}, & \text{当 } \xi<0,\ \zeta=\dfrac{2H}{D_v} \text{ 时} \\ -\dfrac{T(\xi,\eta)}{\rho(\xi,\eta)}, & \text{当 } \xi>0,\ \zeta=-\dfrac{2H}{D_v} \text{ 时} \\ \dfrac{T(-\xi,\eta)}{\rho(-\xi,\eta)}, & \text{当 } \xi<0,\ \zeta=-\dfrac{2H}{D_v} \text{ 时} \end{cases}$$

则在 $H > \frac{D_v}{2}$ 条件下,我們可以得出問題的解为:

$$W = \frac{D_v}{2\pi N_v}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \left[\left(\frac{e^{-ar_1}}{r_1} - \frac{e^{-ar_2}}{r_2}\right) - \left(\frac{e^{-ar_3}}{r_3} - \frac{e^{-ar_4}}{r_4}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{e^{-ar_5}}{r_5} - \frac{e^{-ar_6}}{r_6}\right)\right] \frac{T(\xi', \eta')}{\rho(\xi', \eta')} d\eta' \, d\xi' \tag{43}$$

其中 $r_1 = \sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}$,

$$r_2 = \sqrt{\zeta^2 + (\xi' + \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2},$$

$$r_3 = \sqrt{\left(\zeta - \frac{2H}{D_v}\right)^2 + (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2},$$

$$r_4 = \sqrt{\left(\zeta - \frac{2H}{D_v}\right)^2 + (\xi' + \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2},$$

$$r_5 = \sqrt{\left(\zeta + \frac{2H}{D_v}\right)^2 + (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2},$$

$$r_6 = \sqrt{\left(\zeta + \frac{2H}{D_v}\right)^2 + (\xi' + \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}。$$

当 $\frac{T}{\rho}$ 不依賴于 η 时,(43)式可以化簡为:

$$W = \frac{D_v}{\pi N_v}\int_0^\infty \frac{T(\xi')}{\rho(\xi')}\left[K_0\left(a\sqrt{\zeta^2 + (\xi' - \xi)^2}\right) - K_0\left(a\sqrt{\zeta^2 + (\xi' + \xi)^2}\right) - \right.$$

$$- K_0\left(a\sqrt{\left(\zeta - \frac{2H}{D_v}\right)^2 + (\xi' - \xi)^2}\right) + K_0\left(a\sqrt{\left(\zeta - \frac{2H}{D_v}\right)^2 + (\xi' + \xi)^2}\right) -$$

$$\left. - K_0\left(a\sqrt{\left(\zeta + \frac{2H}{D_v}\right)^2 + (\xi' - \xi)^2}\right) + K_0\left(a\sqrt{\left(\zeta + \frac{2H}{D_v}\right)^2 + (\xi' + \xi)^2}\right)\right] d\xi' \tag{44}$$

当 $\frac{T}{\rho}$ 为常值时,可进一步化簡为:

$$W = \frac{2D_v T}{\pi N_v \rho}\int_0^\xi \left[K_0\left(a\sqrt{\zeta^2 + \xi'^2}\right) - K_0\left(a\sqrt{\left(\zeta - \frac{2H}{D_v}\right)^2 + \xi'^2}\right) - \right.$$

$$\left. - K_0\left(a\sqrt{\left(\zeta + \frac{2H}{D_v}\right)^2 + \xi'^2}\right)\right] d\xi' \tag{45}$$

同样,我們很容易分开实部与虛部求出 u 和 v, 并且可以利用連續方程求出 W。

对于更浅的海可仿处理无限广闊海流中风海流的方法, 作更多的象求出适用的近似解。这种手續还可以逐次做下去,求出精确解来:

$$W = \frac{D_v}{2\pi N_v}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \left[\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^j \frac{e^{-ar_j}}{r_j} - \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-ar_k}}{r_k}\right] \frac{T(\xi', \eta')}{\rho(\xi', \eta')} d\xi' \, d\eta' \tag{46}$$

其中 $$r_j = \sqrt{\left(\zeta - \frac{2jH}{D_v}\right)^2 + (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2},$$

$$r_k = \sqrt{\left(\zeta - \frac{2kH}{D_v}\right)^2 + (\xi' + \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2},$$

当 $\frac{T}{\rho}$ 不依赖于 η 时，得到：

$$W = \frac{D_v}{\pi N_v}\int_0^\infty \frac{T(\xi')}{\rho(\xi')}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j K_0\left(\sqrt{\left(\zeta - \frac{2jH}{D_v}\right)^2 + (\xi' - \xi)^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k K_0\left(\sqrt{\left(\zeta - \frac{2kH}{D_v}\right)^2 + (\xi' + \xi)^2}\right)\right] d\xi' \tag{47}$$

当 $\frac{T}{\rho}$ 为常值时，有：

$$W = \frac{2D_v T}{\pi N_v \rho}\int_0^\xi \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j K_0\left(a\sqrt{\left(\zeta - \frac{2jH}{D_v}\right)^2 + \xi'^2}\right) d\xi' \tag{48}$$

所有出現在(46)、(47)、(48)式中的級数显然都是收斂的。

4. 关于近岸处无限深度风海流的数值計算

現在我們作出近岸处无限深海风海流(升降流)的数值計算。为了和 K. Hidaka 的数值計算作比較，計算中我們取 $N_v = 1{,}000$ c.g.s 单位（他的文章中取 $A_v = 1{,}000$ c.g.s 单位)。这样一来，在北緯 30 度处 D_v 近似等于 162 米。假設 $A_h/A_v = 10^6$，那末 D_h 就是 D_v 的 1,000 倍，即 162 公里。在这里，我們認为要精确地說明升降流的結构，不一定要假設风系为一带状风系。因此我們假定风脅強在整个海域內为常值，风向平行于 y 軸（即岸)，并取 $T_y = \tau = 1$c.g.s 单位，这对应于 5—6 米/秒的风速[4]。

在上述假設下，我們詳細計算了不同点上的水平流速与垂直流速。用本文中的公式(34)、(35)計算 u、v 的手續非常簡单，而 $W(\xi, \eta) = \frac{1}{1{,}000} u(\eta, \xi)$ 根本就不用再算了。

图 1 中給出了表面水平流速与离岸距离 x 之关系。由該图及計算中可看出随着离开海岸距离的增加水平流速逐漸增加。在紧靠岸处 $u=v=0$，离开海岸后 v 比 u 增加得快，而后 u 和 v 增加的速度逐漸減小，而 v 減小的快。当 $\xi=0.147$ 起，u 比 v 增加的快了。当

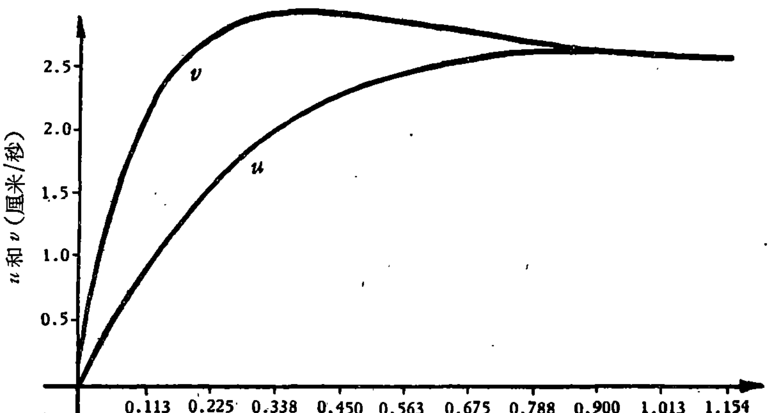

图 1　表面流速与 (x/D_h) 之关系
Fig. 1. The dependence of surface velocity on x/D_h

$\xi=0.383$ 时，v 达到极大值，而 u 和 v 都趋向其极限值 2.62 厘米/秒。当 $\xi=D_h$ 时，$u=2.62$，$v=2.66$，与极限值相差小于 1.5%。此后 u 和 v 均在极限值上下做微小的摆动，摆动的振幅愈来愈小。K. Hidaka 求出的最大水平流速为 3.35 厘米/秒，讀者只要仔細查对一下他計算的 $2\pi\tau/\rho\omega\sin\varphi$，就会知道是他算錯了[4]。

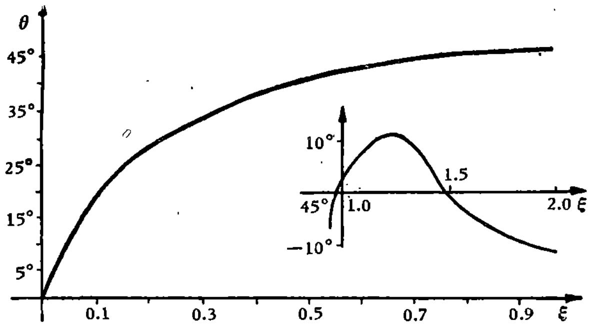

图 2 表面流与海岸間夹角 θ 与 x/D_h 之关系

Fig. 2. The dependence of the angle between surface velocity and coast on x/D_h

图 2 中給出表面流与海岸之夹角 θ 随 ξ 的变化曲綫。由图及計算值可知 θ 角随 ξ 的增加而增加，而在 $\xi=1$ 的地方，θ 近于 45°（极限值）。当 $\xi=0.99$ 时，θ 角开始大于 45°，而后增至 45°10′ 再下降，并在 45° 上下作愈来愈小的摆动，只是在离开海岸很远的地方才取这个极限值。为了精确地說明 $\xi>D_h$ 时 θ 角的变化規律，我們还給出了 θ 角的变化規律的局部放大图。在 ξ 近于 1 处 $\theta>45°$ 这一事实已为实驗所証实，在 $\xi>1$ 时 θ 的变化規律在实驗中尙未观察到。

图 3 中給出了垂直于海岸的平面內的环流情况。由計算和图可知升降流集中于距海岸一个 D_h 的范围內。垂直流速的量級为水平流速的千分之一（图中垂直流速放大了 1,000

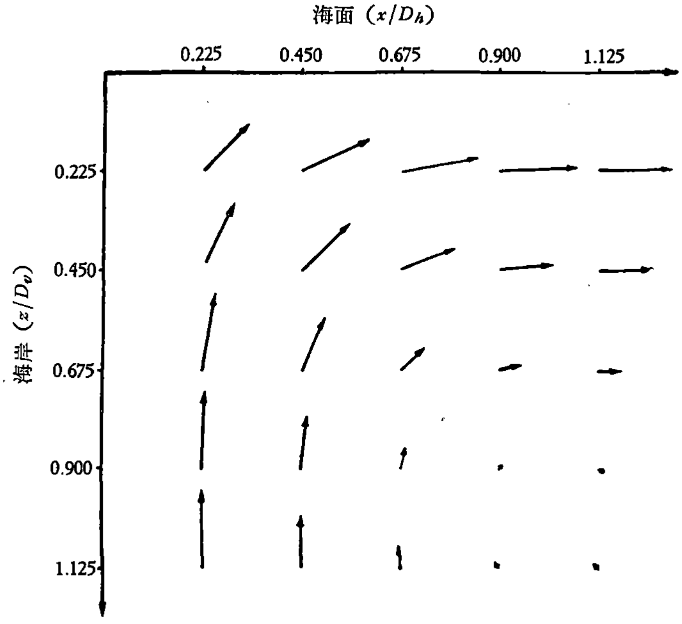

图 3 垂 直 环 流 图

Fig. 3. Vertical circulation

倍)。而且愈靠近海岸，則升降流愈強，由計算得出的升降流的最大流速为 2.246 米/天。这与 Saito 由分析得到的 2.25 米/天或 80 米/月是完全一致的。

图 4—13 中給出了 ξ 等于不同值的 10 个 Ekman 螺綫，以便清楚地了解离开海岸不同距离处水平流速随深度改变的情况。

表 1 中給出了 125 个点处的水平流速 u、v 及 θ 的值。

表 1 水平流速 u、v 的值（单位：厘米/秒）
Table 1. Values of horizontal velocity u、v. (Unit: Cm/sec)

ζ	0		0	0.225		0.450		0.675		0.900	
ξ	u	v	θ	u	v	u	v	u	v	u	v
0.0450	0.36	1.28	15°41′	0.23	0.13	0.09	−0.02	0.02	−0.03	0.00	−0.02
0.0900	0.70	1.91	20°8′	0.45	0.25	0.18	−0.04	0.05	−0.06	0.00	−0.05
0.1350	1.01	2.31	23°35′	0.67	0.34	0.27	−0.06	0.07	−0.09	0.00	−0.05
0.1801	1.23	2.57	26°37′	0.86	0.41	0.35	−0.09	0.09	−0.12	−0.01	−0.07
0.2251	1.53	2.74	29°15′	1.03	0.45	0.43	−0.12	0.11	−0.15	−0.01	−0.09
0.2701	1.75	2.84	31°34′	1.18	0.46	0.49	−0.15	0.12	−0.18	−0.01	−0.10
0.3152	1.93	2.90	33°38′	1.30	0.47	0.55	−0.18	0.14	−0.21	−0.01	−0.11
0.3601	2.08	2.93	35°28′	1.41	0.46	0.60	−0.21	0.15	−0.23	−0.02	−0.12
0.4051	2.21	2.93	37°2′	1.51	0.44	0.64	−0.24	0.15	−0.26	−0.02	−0.13
0.4502	2.31	2.91	38°28′	1.58	0.41	0.68	−0.28	0.16	−0.28	−0.02	−0.14
0.4952	2.40	2.89	39°41′	1.64	0.38	0.70	−0.31	0.16	−0.30	−0.03	−0.15
0.5402	2.46	2.86	40°44′	1.69	0.35	0.72	−0.34	0.16	−0.32	−0.03	−0.16
0.5852	2.52	2.83	41°32′	1.73	0.32	0.73	−0.37	0.16	−0.34	−0.04	−0.17
0.6302	2.55	2.79	42°23′	1.76	0.29	0.74	−0.39	0.16	−0.35	−0.04	−0.18
0.6752	2.58	2.76	43°3′	1.78	0.26	0.75	−0.42	0.16	−0.37	−0.05	−0.18
0.7203	2.60	2.73	43°36′	1.79	0.23	0.76	−0.44	0.15	−0.39	−0.05	−0.19
0.7653	2.61	2.71	44°10′	1.79	0.21	0.76	−0.45	0.15	−0.40	−0.05	−0.19
0.8103	2.62	2.68	44°22′	1.80	0.18	0.75	−0.47	0.15	−0.41	−0.06	−0.19
0.8553	2.62	2.66	44°36′	1.80	0.17	0.75	−0.48	0.14	−0.42	−0.06	−0.20
0.9003	2.62	2.64	44°49′	1.80	0.15	0.75	−0.50	0.14	−0.42	−0.06	−0.20
0.9453	2.62	2.63	44°57′	1.79	0.14	0.74	−0.50	0.14	−0.43	−0.06	−0.20
0.9904	2.62	2.61	45°4′	1.79	0.13	0.74	−0.51	0.13	−0.43	−0.07	−0.21
1.0354	2.61	2.60	45°8′	1.78	0.12	0.73	−0.52	0.13	−0.44	−0.07	−0.21
1.0804	2.61	2.59	45°9′	1.78	0.11	0.73	−0.52	0.12	−0.44	−0.07	−0.21
1.1254	2.60	2.59	45°10′	1.78	0.11	0.72	−0.52	0.12	−0.44	−0.07	−0.22

表 2 中給出了 25 个点处垂直流速 W 的值。該表中最上面一行的流速由于海岸摩擦作

表 2 垂直流速 W 值（单位：厘米/秒 $\times 10^8$）
Table 2. Values of vertical velocity W. (Unit: cm/sec $\times 10^8$)

ζ / ξ	0	0.2251	0.4502	0.6752	0.9003	0.1479
0	0	1.53	2.31	2.58	2.62	2.60
0.2251	0	1.03	1.58	1.78	1.80	1.78
0.4502	0	0.43	0.68	0.75	0.74	0.72
0.6752	0	0.11	0.16	0.16	0.14	0.12
0.9003	0	−0.01	−0.02	−0.05	−0.06	−0.07

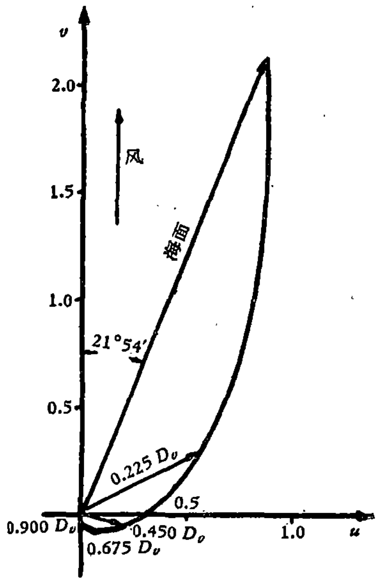

图4 水平流速的垂直变化 $\xi=0.113$

Fig. 4. The vertical variation of horizontal velocity

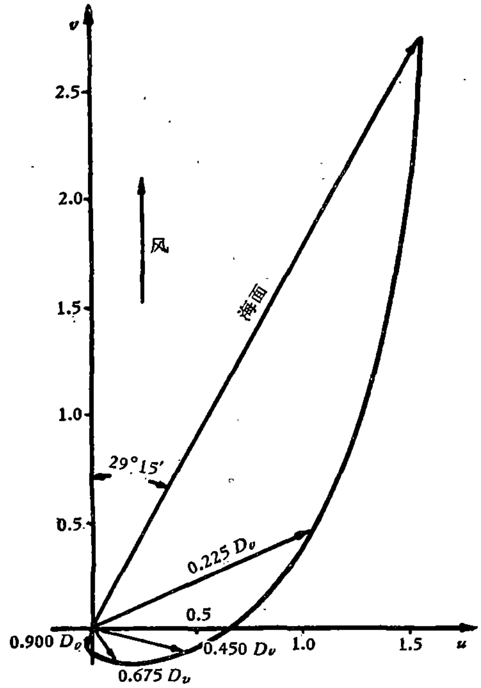

图5 水平流速的垂直变化 $\xi=0.225$

Fig. 5. The vertical variation of horizontal velocity

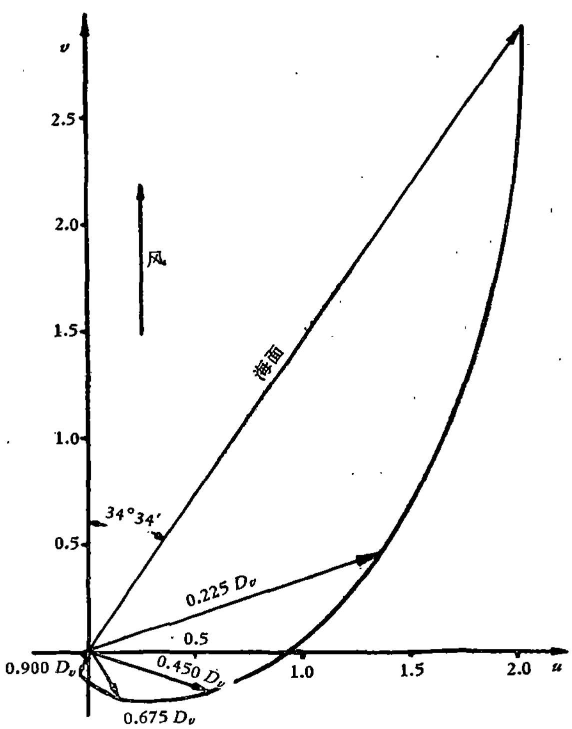

图6 水平流速的垂直变化 $\xi=0.338$

Fig. 6. The vertical variation of horizontal velocity

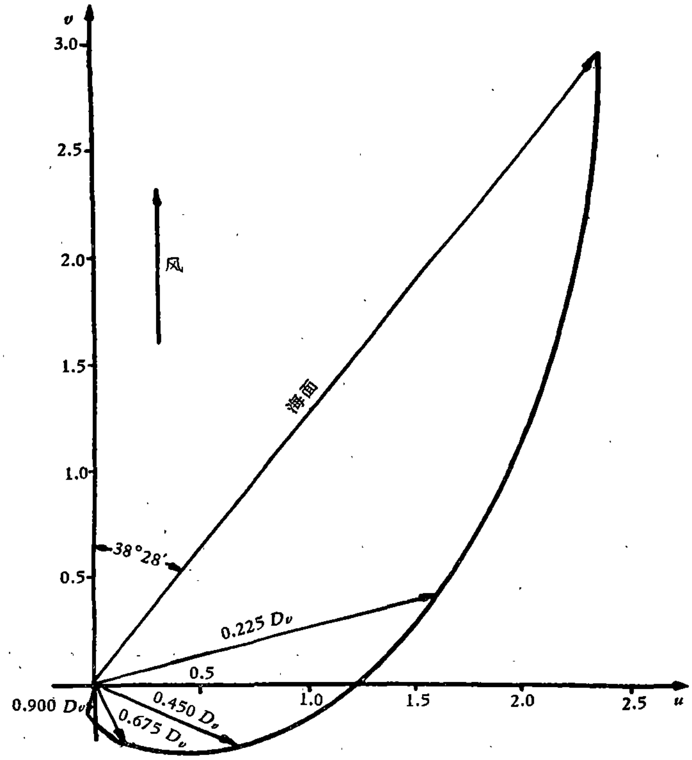

图 7 水平流速的垂直变化 $\xi = 0.450$

Fig. 7. The vertical variation of horizontal velocity

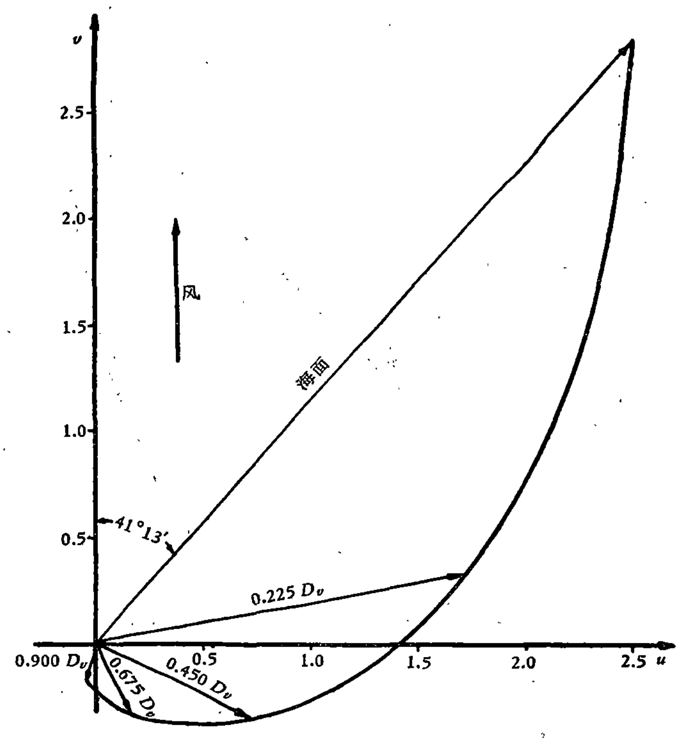

图 8 水平流速的垂直变化 $\xi = 0.563$

Fig. 8. The vertical variation of horizontal velocity

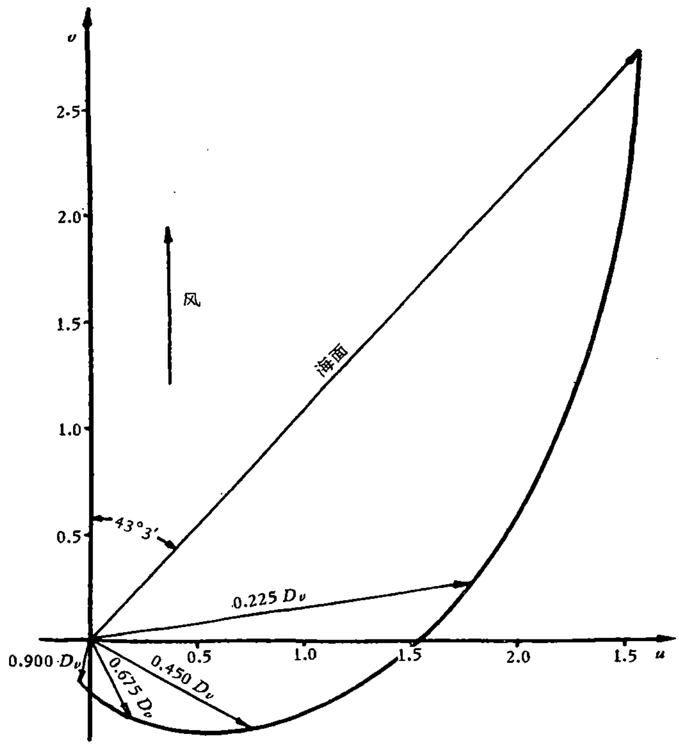

图 9　水平流速的垂直变化 $\xi = 0.675$
Fig. 9.　The vertical variation of horizontal velocity

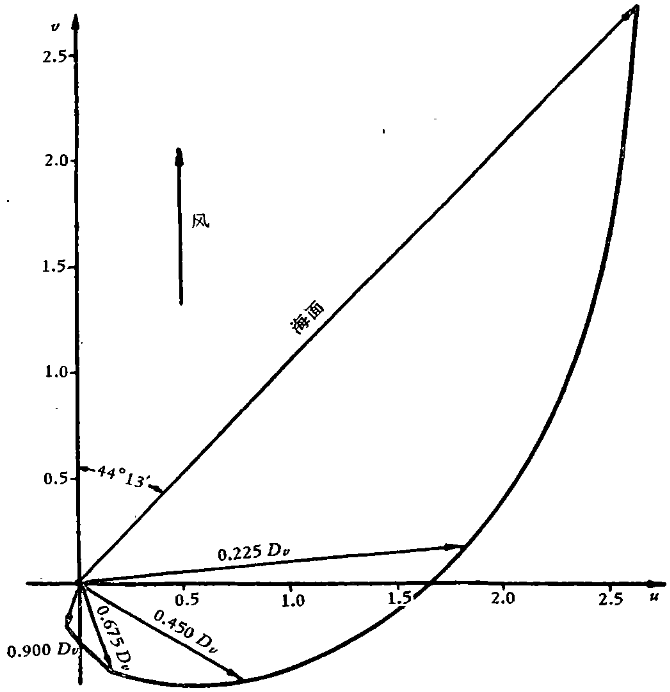

图 10　水平流速的垂直变化 $\xi = 0.788$
Fig. 10.　The vertical variation of horizontal velocity

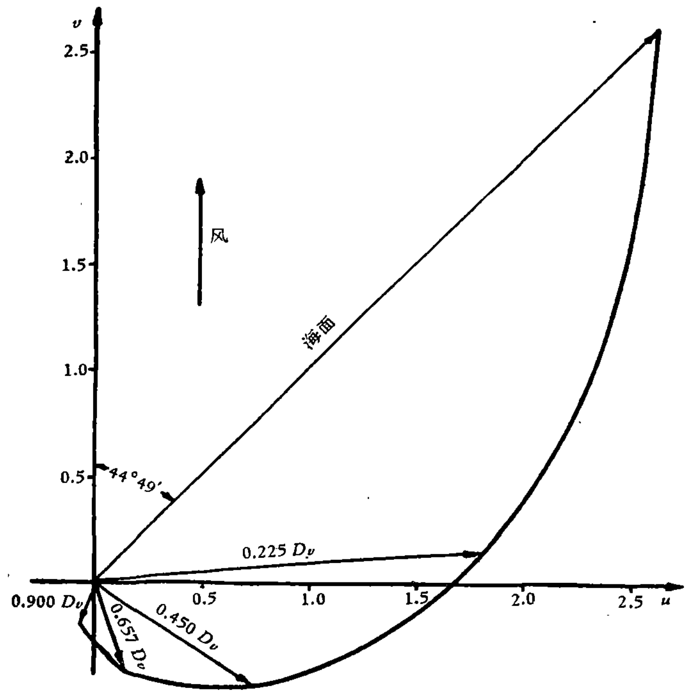

图 11　水平流速的垂直变化 $\xi=0.900$
Fig. 11. The vertical variation of horizontal velocity

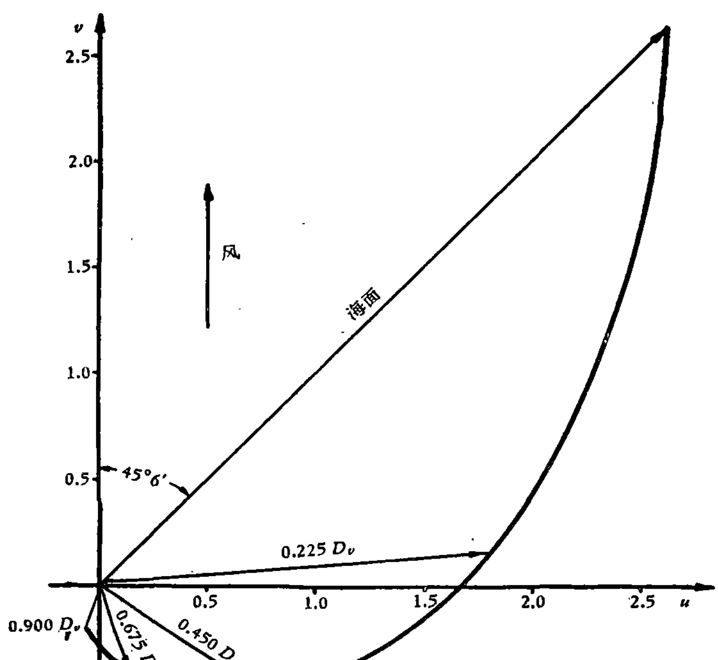

图 12　水平流速的垂直变化 $\xi=1.013$
Fig. 12. The vertical variation of horizontal velocity

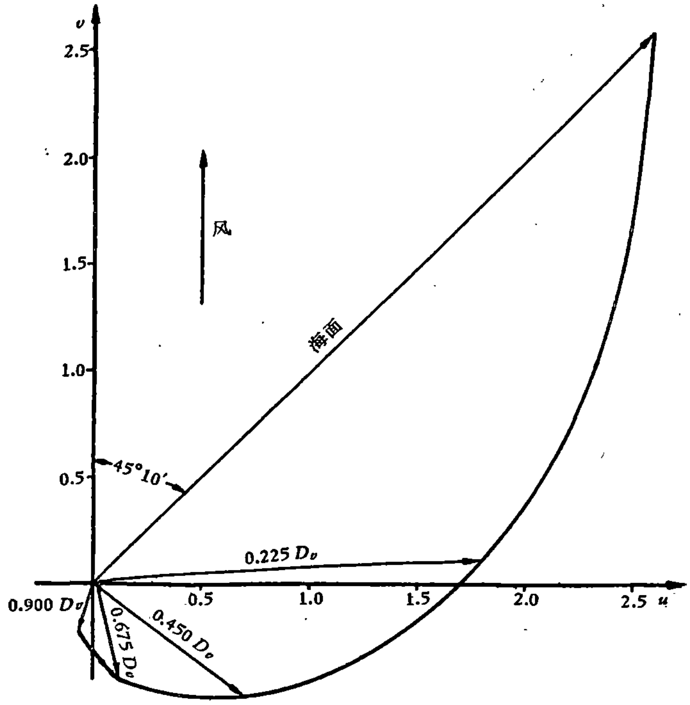

图 13 水平流速的垂直变化 $\xi = 1.125$
Fig. 13. The vertical variation of horizontal velocity

用,实际上不会出现。

附 录

本文中已指出,我們所給出的近岸处无限深度的风海流的解概括了 Hidaka[4] 給出的解。兹証明如下:

Hidaka 設 $T = i\tau$, ρ 为常值,而且只在区域 $0 < \xi < L/D_h$ 內有值。对于这种具体情况,本文的解(19)取如下形式:

$$W_1 = \frac{D_v i\tau}{2\pi A_v}\int_0^{L/D_h}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt{2\pi^2 i}\sqrt{\zeta^2+(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2}}}{\sqrt{\zeta^2+(\xi'-\xi)^2+(\eta'-\eta)^2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\sqrt{2\pi^2 i}\sqrt{\zeta^2+(\xi'+\xi)^2+(\eta'-\eta)^2}}}{\sqrt{\zeta^2+(\xi'+\xi)^2+(\eta'-\eta)^2}}\right)d\eta'\,d\xi'$$

其中 $A_v = N_v\rho$。

作积分变数变換,令 $\eta' - \eta = \eta''$, 并改写 η'' 为 η', 然后对 ξ 作富氏积分正反变换各一次得:

$$W_1 = \frac{D_v i\tau}{\pi^2 A_v}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{L/D_h}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{-\sqrt{2\pi^2 i}\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+(\xi'-\alpha)^2}}}{\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+(\xi'-\alpha)^2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-\sqrt{2\pi^2 i}\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+(\xi'+\alpha)^2}}}{\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+(\xi'+\alpha)^2}}\right)\sin\lambda\alpha\sin\lambda\xi\,d\eta'\,d\xi'\,d\alpha\,d\lambda =$$

$$= \frac{D_v i\tau}{2\pi^2 A_v}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^{L/D_h}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{e^{-\sqrt{2\pi^2 i}\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+(\xi'-\alpha)^2}}}{\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+(\xi'-\alpha)^2}} -\right.$$

$$\left. - \frac{e^{-\sqrt{2\pi^2 i}\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+(\xi'+\alpha)^2}}}{\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+(\xi'+\alpha)^2}}\right) \sin\lambda\alpha \sin\lambda\xi \, d\eta \, d\xi' \, d\alpha \, d\lambda =$$

$$= \frac{D_v i\tau}{2\pi^2 A_v}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^{L/D_h} \frac{e^{-\sqrt{2\pi^2 i}\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+\alpha^2}}}{\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+\alpha^2}} [\sin\lambda(\alpha+\xi') -$$

$$- \sin(\alpha-\xi')] \sin\lambda\xi \, d\xi' \, d\eta' \, d\alpha \, d\lambda =$$

$$= \frac{D_v i\tau}{\pi^2 A_v}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^{L/D_h} \frac{e^{-\sqrt{2\pi^2 i}\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+\alpha^2}}}{\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+\alpha^2}} \cos\lambda\alpha \cdot \sin\lambda\xi' \sin\lambda\xi \, d\xi' \, d\eta' \, d\alpha \, d\lambda =$$

$$= \frac{D_v i\tau}{\pi^2 A_v}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\sqrt{2\pi^2 i}\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+\alpha^2}}}{\sqrt{\zeta^2+\eta'^2+\alpha^2}} \cos\lambda\alpha \cdot [1-\cos(\lambda L/D_h)]/\lambda \cdot \sin\lambda\xi \, d\alpha \, d\lambda =$$

$$= \frac{2D_v i\tau}{\pi^2 A_v}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty K_0[\sqrt{2\pi^2 i}\sqrt{\zeta^2+\alpha^2}] \cos\lambda\alpha \cdot [1-\cos(\lambda L/D_h)]/\lambda \cdot \sin\lambda\xi \, d\alpha \, d\lambda =$$

$$= \frac{2D_v i\tau}{\pi A_v}\int_0^\infty\int_0^\infty [J_0(-\sqrt{2\pi^2}\sqrt{\zeta^2+\alpha^2}) + iN_0(-\sqrt{2\pi^2}\sqrt{\zeta^2+\alpha^2})] \cdot \cos\lambda\alpha \cdot$$

$$\cdot [1-\cos(\lambda L/D_h)]/\lambda \cdot \sin\lambda\xi \, d\alpha \, d\lambda。$$

$$W_1 = \frac{2D_v i\tau}{\pi A_v}\int_0^\infty (1/\sqrt{\lambda^2+2\pi^2 i}) e^{-\sqrt{\lambda^2+2\pi^2 i}\zeta} [1-\cos(\lambda L/D_h)]/\lambda \cdot \sin\lambda\xi d\lambda。$$

其中 $\zeta = z/D_v$。 这就是 Hidaka 的解[4]。

参　考　文　献

[1] A. H. 吉洪诺夫，A. A. 萨马尔斯基，1963。数学物理方程(新1版)，535—558页。

[2] 秦曾灏，1963。论海流的空间问题。"海洋与湖沼" 5(4)：285—297。

[3] Л. Н. Насова, 1960. Таблича фvнкуий Томсона и их первых производных. 14—53.

[4] K. Hidaka, 1954. A Contribution to the theory of upwelling and Coastal currents. *Tras. Amer. Geophy. Un.* **35** (3): 431—444.

[5] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 1952.

APPLICATIONS OF THE POTENTIAL THEORY AND THE METHOD OF IMAGE IN THE STUDIES OF DRIFT AND UP-WELLING CURRENTS

LI XIN-MING AND WANG JING-YONG
(Department of Oceanography, Shangtung College of Oceanology)

(ABSTRACT)

So far, the method of Fourier transform has been most frequently employed in the ocean current studies. In the present paper the potential theory and the method of image are introduced in the discussions of ocean currents. The proposed methods proved to be better; they solved in terms of special functions the space problem of drift and up-welling currents in the cases of both infinite and finite depths, solutions to the latter case being obtained for the first time. Numerical calculations are given for coastal currents in the case of infinite depth, the results being satisfactory as compared with that of K. Hidaka's theory and in agreement with Saito's result.