

平稳正态过程反正弦定律在 海浪谱估计中的应用*

余宙文 蓝昌华

(山东海洋学院) (中国科学院南海海洋研究所)

“海浪谱”在海浪理论研究和工程应用方面都占有极为重要的地位。它不仅描述了海浪能量相对于组成波频率的分布,而且与海浪外观特征,如波高和周期等,有着固定的联系。许多学者已指出,在一般的条件下,处于“定常”状态的海浪可以近似地认为是正态的平稳随机过程,且具有各态历经性^[1]。因而,可以从海浪的一次连续记录曲线中,摘取其离散化数据,求出相关函数(或周期图);进而求出谱密度,作为真实海浪谱的估计。既然海浪谱与波高和周期有固定的联系,那么,能否直接由海浪记录曲线量取波高和周期而不读取记录曲线离散化数据即求出相关函数,进而得出海浪谱呢?

本文试图应用平稳正态过程反正弦定律,由海浪记录曲线量取上跨零点(或下跨零点)波高和跨越零点的时间坐标值来计算海浪过程的相关函数和谱密度。通过实例计算表明,本文所述方法计算海浪过程的相关函数与直接摘取海浪记录曲线离散化数据算出的相关函数相当一致,因而计算出的谱密度也很接近。

一、方法的理论依据

设 $\zeta(t)$ 为平稳正态过程,对 $\zeta(t)$ 施行以下非线性变换

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [T_{2j}, T_{2j+1}), \\ -1, & t \in [T_{2j+1}, T_{2j+2}); \end{cases} \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

如图1所示。即输入为 $\zeta(t)$ 输出为 $Y(t)$, 其均值为零。当 $t \in [T_{2j}, T_{2j+1})$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) 时, $Y(t)$ 取值为1, 当 $t \in [T_{2j+1}, T_{2j+2})$ 时, $Y(t)$ 取值为-1。设 $\zeta(t)$ 的相关函数为 $R_\zeta(\tau)$, $Y(t)$ 的相关函数为 $R_Y(\tau)$, 可以证明^[3], 经上述非线性变换后, 公式

$$R_Y(\tau) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{R_\zeta(\tau)}{R_\zeta(0)}, \quad (2)$$

或

$$R_\zeta(\tau) = R_\zeta(0) \sin \left[\frac{\pi}{2} R_Y(\tau) \right] \quad (3)$$

成立。(2)式即为所谓平稳正态过程反正弦定律。

如 $\zeta(t)$ 为海浪过程, 则有^[1]

$$R_\zeta(0) = \sigma_\zeta^2 = \frac{a_\zeta^2}{2},$$

* 本文承山东海洋学院文圣常教授审阅, 中国科学院南海海洋研究所陈俊昌同志提出意见, 黄玉环、洗惠兰、贾淑芬同志帮助整理资料, 陈素华同志清绘附图, 作者特此表示衷心感谢。

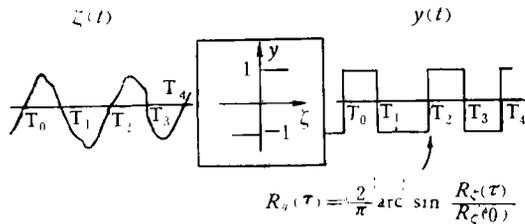


图1 平稳正态过程反正弦定律示意图

而
故

$$H_i^2 = 4a_i^2,$$

$$R_z^2(0) = H_i^2/8. \quad (4)$$

上诸式中, σ_z^2 为海浪过程 $\zeta(t)$ 的方差, a_i^2 为海浪振幅的平方平均值, H_i 为均方根波高。

将 $\zeta(t)$ 作上述非线性变换, 得 $Y(t)$ (图1)。由 $T_j (j \neq 0)$ 相对坐标原点 T_0 的坐标值, 根据公式(1)可以确定 $Y(t)$ 的取值, 由公式

$$R_y(\tau) = E\{y(t) \cdot y(t + \tau)\} \quad (5)$$

计算 $Y(t)$ 的相关函数 $R_y(\tau)$, 从而, 由公式(3)可以计算海浪过程 $\zeta(t)$ 的相关函数 $R_z(\tau)$ 。再依公式

$$A^2(\omega) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} R_z(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (6)$$

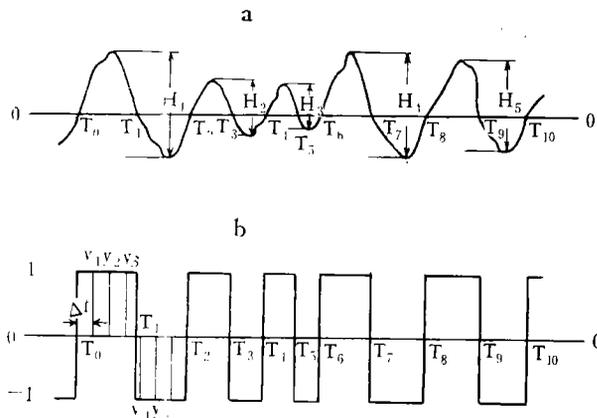
即可求出海浪的能量谱密度。

二、计算步骤

设有一段海浪连续记录曲线 $\zeta(t)$, 作出 $\zeta(t)$ 的平均值线 0 0, 读取波峰与波谷间的垂直距离 $H_i (i = 1, 2, \dots, n)$ (图2, a), 由公式

$$H_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_i^2 \quad (7)$$

求出均方根波高的平方值 H_i^2 , 依公式(4)可算出 $R_z(0)$; 定出 $\zeta(t)$ 的上、下跨零点 $T_j (j = 0, 1, 2, \dots, 2n)$, 量取 $T_j (j \neq 0)$ 相对于坐标原点 T_0 的距离, 以时间间隔 Δt 对曲线 $Y(t)$

图2 H_i 和 T_j 读数示意图

进行离散化, 当 $t \in [T_{2j}, T_{2j+1})$ 时, $y(t)$ 取值为 1, 当 $t \in [T_{2j+1}, T_{2j+2})$ 时, $Y(t)$ 取值为 -1 (图 2, b)。在电子计算机上计算时, $Y(t)$ 的离散化值, 由机器根据上述原则依程序自动判断, 因此, 这步工作不必人工进行。确定 $Y(t)$ 值后, 根据公式

$$R_y(\tau) \approx R_y(r\Delta t) = \frac{1}{n-r} \sum_{j=1}^{n-r} y(t_j) \cdot y(t_j + r\Delta t), \quad (8)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, m; \quad m < n,$$

计算 $R_y(\tau)$ 。式中 m 为 $R_y(\tau)$ 的个数, n 为离散化的 $y(t)$ 的个数。有了 $R_\zeta(0)$ 和 $R_y(\tau)$, 由公式 (3) 可以算出 $\zeta(t)$ 的相关函数 $R_\zeta(\tau)$ 。然后, 根据公式^[2]

$$V(\omega_h) = \frac{2\Delta t}{\pi} \left[R_\zeta(0) + 2 \sum_{r=1}^m R_\zeta(r\Delta t) \cos\left(\frac{hr}{m}\pi\right) + R_\zeta(m\Delta t) \cos(h\pi) \right] \quad (9)$$

其中

$$\omega_h = h \cdot \Delta\omega = \frac{\pi}{m\Delta t} h, \quad h = 0, 1, 2, \dots, m,$$

计算未光滑谱密度和根据公式

$$\left. \begin{aligned} A^2(\omega_0) &= 0.54V(\omega_0) + 0.46V(\omega_1) \\ A^2(\omega_h) &= 0.54V(\omega_h) + 0.23[V(\omega_{h-1}) + V(\omega_{h+1})] \quad h = 1, 2, \dots, m-1, \\ A^2(\omega_m) &= 0.54V(\omega_m) + 0.46V(\omega_{m-1}) \end{aligned} \right\} (10)$$

计算光滑(即加权平均后的)谱密度。至此, 求出了 $\zeta(t)$ 的谱密度的估计值。需要指出的是, 应用上述公式计算谱密度值, 当其值接近于零时, 实际算出的谱估计值可能为负值, 这与物理意义不合。产生这种情况的原因是原 Tukey 方法的缺点, 因为所取的对周期图平均的权函数可以为负值。当算出的谱值为负时, 应予去掉(可以近似地取为零)。

三、计算结果比较

为了检验本文所述方法的可靠性, 我们对不同海区的 5 组表面波记录曲线和 3 组水下压力波记录曲线, 分别按上述方法计算 $\zeta(t)$ 的相关函数 $R_\zeta(\tau)$ 和直接摘取记录曲线 $\zeta(t)$ 的离散化数据, 按公式

$$R'_\zeta(\tau) \approx \frac{1}{n-r} \sum_{i=1}^{n-r} \zeta(t_i) \cdot \zeta(t_i + r\Delta t) \quad (11)$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, m, \quad n > m$$

计算 $\zeta(t)$ 的相关函数 $R'_\zeta(\tau)$, 式中 m 为 $R'_\zeta(\tau)$ 的个数, n 为离散化的 $\zeta(t)$ 的个数。再由相关函数 $R_\zeta(\tau)$ 和 $R'_\zeta(\tau)$ 按公式 (9) 和 (10) 计算相应的谱密度 $A^2(\omega)$ 和 $A'^2(\omega)$ 。图 3、图 4 和图 5 分别画出了 8 组记录曲线中的 3 组(相应于表 1 中的序号 1、2 和 8)记录曲线的 $R_\zeta(\tau)$ 、 $R'_\zeta(\tau)$ 和 $A^2(\omega)$ 、 $A'^2(\omega)$ 的图形。其中图 3 和图 4 的资料为表面波记录, 图 5 的资料为水下 1.3 米处压力波记录。从图可看出, 两者算出的相关函数和谱密度的图形都非常一致。当然, 由于记录曲线不是无限长以及摘取曲线数据的误差, 致使两者的结果不可能完全吻合。

表 1 列出了 8 组记录曲线由上述两种方法计算出的谱在主要频率范围内几个谱密度值 ($A^2(\omega)$ 或 $A'^2(\omega)$)、谱面积 (S)、由谱的零阶矩和二阶矩计算的平均波高 (\bar{H})、平均周期 (\bar{T}) 和直接由记录曲线 $\zeta(t)$ 统计出的平均波高 (\bar{H}')、平均周期 (\bar{T}')。表中的方法 I

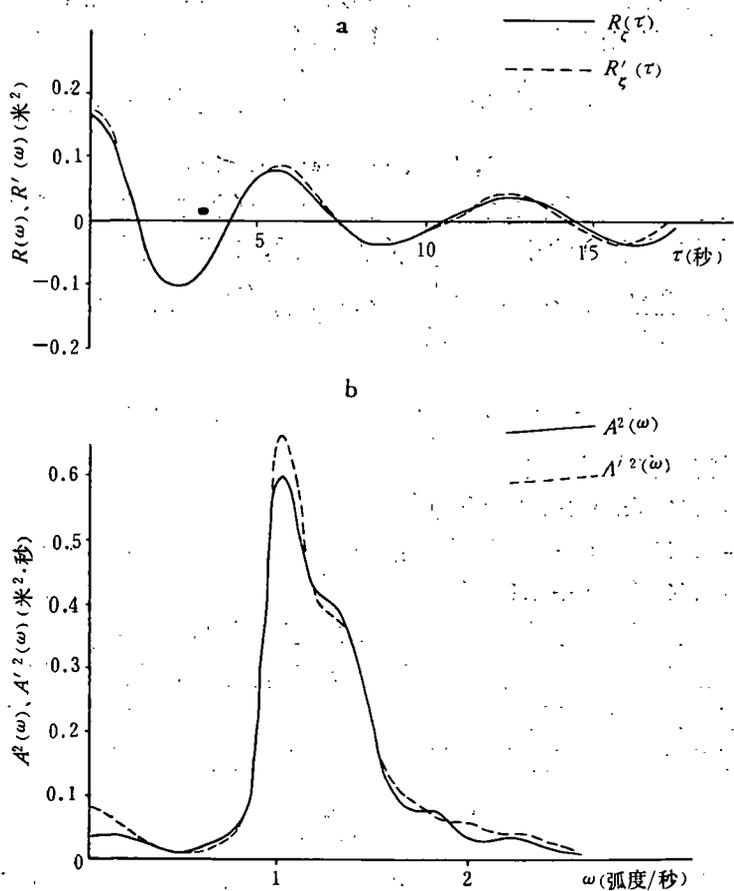
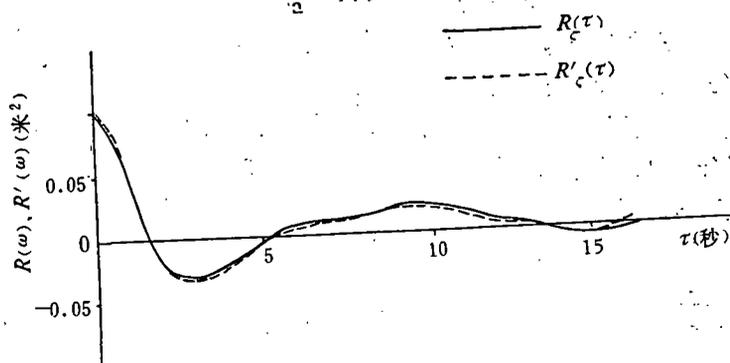


图3 $R_z(\tau)$ 、 $A^2(\omega)$ 与 $R'_z(\tau)$ 、 $A'^2(\omega)$ 对比图(一)



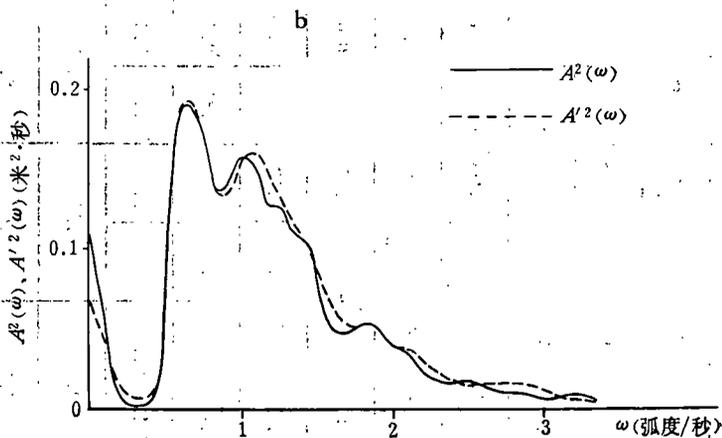


图4 $R_{\zeta}(\tau)$ 、 $A^2(\omega)$ 与 $R'_{\zeta}(\tau)$ 、 $A'^2(\omega)$ 对比图(二)

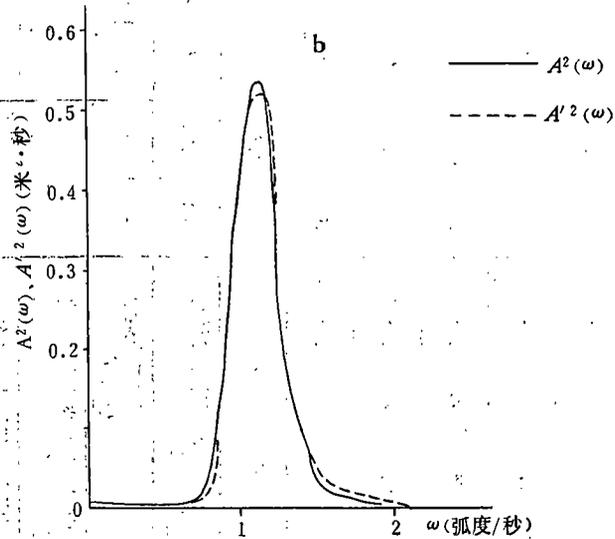
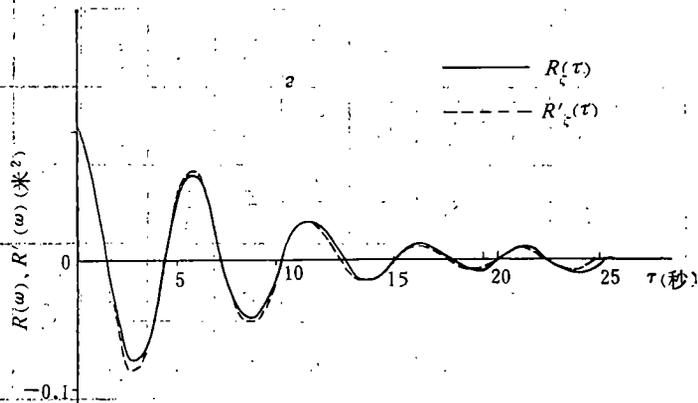


图5 $R_{\zeta}(\tau)$ 、 $A^2(\omega)$ 与 $R'_{\zeta}(\tau)$ 、 $A'^2(\omega)$ 对比图(三)

表 1

序 号	1		2		3		4		5		6		7		8		
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	
谱 密 度 $A^2(\omega)$ 或 $A^{1/2}(\omega)$ (米 ² /秒)	$\omega_1^* = 0.5; 0.8$	0.010	0.015	0.066	0.080	0.004	0.006	0.014	0.012	0.010	0.009	0.032	0.026	0.050	0.048	0.084	0.056
	$\omega_2 = 1.0; 1.0$	0.612	0.654	0.161	0.160	0.240	0.284	0.214	0.248	0.049	0.062	0.226	0.206	0.361	0.384	0.422	0.428
	$\omega_3 = 1.5; 1.2$	0.176	0.182	0.090	0.092	0.065	0.065	0.041	0.056	0.158	0.166	0.311	0.352	0.133	0.160	0.419	0.437
	$\omega_4 = 2.0; 1.4$	0.027	0.034	0.040	0.044	0.014	0.017	0.031	0.026	0.029	0.031	0.124	0.144	0.078	0.096	0.056	0.072
	$\omega_5 = 2.5; 1.6$	0.001	0.002	0.008	0.013	0.008	0.009	0.009	0.010	0.023	0.024	0.022	0.038	0.033	0.032	0.020	0.031
谱 面 积 (米 ²) S	0.338	0.374	0.202	0.216	0.184	0.208	0.164	0.190	0.192	0.184	0.156	0.166	0.184	0.198	0.210	0.216	
由谱的零阶矩计算的平均 波高(米) \bar{H}	1.03	1.06	0.80	0.82	0.76	0.81	0.72	0.77	0.78	0.76	0.70	0.72	0.76	0.79	0.81	0.82	
由谱的零阶矩和二阶矩计 算的平均周期(秒) \bar{T}	4.7	4.5	4.8	4.4	4.9	4.8	4.7	4.3	4.0	3.5	5.1	4.8	5.4	5.1	5.4	5.3	
由记录曲线统计的平均波 高(米) \bar{H}'	1.03		0.80		0.76		0.72		0.79		0.71		0.75		0.81		
由记录曲线统计的平均周 期(秒) \bar{T}'	5.0		4.7		5.0		4.9		4.0		5.4		5.6		5.7		

* 第一列为序号1—5,第二列为序号6—8的 ω 值(弧度/秒)。

为本文所述的方法,方法 II 为由记录曲线 $\zeta(t)$ 直接摘取离散化数据求相关函数的方法。

由表 1 可看出,两种方法计算出的谱密度值和谱面积是很接近的。由方法 I 算出的谱的零阶矩和二阶矩求出的平均波高和平均周期更接近于由记录曲线直接统计出的平均波高和平均周期。

四、讨 论

本文应用平稳正态过程反正弦定律,将海浪过程的相关函数从而谱密度与海浪记录曲线的波高和跨越零点的时间坐标值建立了联系。通过实例计算表明,用本文所述方法计算海浪过程的相关函数与直接摘取波面记录离散化数据计算出的相关函数极为一致,因而谱密度值也很接近。因此,对计算海浪谱来说,本方法是可行的。

本方法不必读取记录曲线的离散化数据,因而大大减轻了读取数据的工作量。如有一段 150 个波的记录曲线,若其平均周期为 5 秒,当离散化间隔 Δt 取为 0.5 秒时,由记录曲线的离散化数据计算相关函数时,需读取 1500 个数据;而应用本方法计算相关函数时,则只需读取 150 个波高值和 301 个跨零点的时间坐标值,不到前者读数量的三分之一。而且, Δt 取值愈小愈好, Δt 值愈小,折迭频率愈大, Nyquist 折迭现象就消除得愈彻底。但 Δt 取值太小,前者读数的工作量大大增加,而后者读数量不变。此外,就计算波浪要素而言,通过实例计算可看出,由本方法算出的谱的零阶矩和二阶矩求出的平均波高和平均周期更接近于由记录曲线直接统计出的平均波高和平均周期。因为本方法的相关函数是直接由记录曲线读出的波高和跨越零点的时间坐标值计算出来的。

应强调的是,平稳正态过程反正弦定律只有在过程是平稳正态的条件下才成立;另外,该定律是在概率意义下推导出来的,根据大数法则,要求过程的时间比较长,因而,应用该定律计算海浪谱时,应满足上述两点要求。不过,此两条件与通常由波浪记录曲线计算海浪谱时,对海浪过程的要求是一致的,因此,本方法要求过程满足的条件并不特别苛刻。

参 考 文 献

- [1] 文圣常, 1964. 海浪原理. 山东人民出版社, 143, 167—172 页。
- [2] Blackman, R. B. and J. W. Tukey, 1959. The measurement of power spectrum from the point of view of communications engineering. New York, Dover.
- [3] Papoulis, A., 1965. Probability, random variables, and stochastic processes. New York, McGraw-Hill. 483—484.

THE APPLICATION OF THE ARC-SINE LAW OF THE STATIONARY NORMAL PROCESS TO THE ESTIMATION OF OCEAN WAVE SPECTRA

Yu Zhouwen

(Shandong College of Oceanology)

and

Lan Changhua

(South China Sea Institute of Oceanology, Academia Sinica)

ABSTRACT

A method of estimating ocean wave spectrum utilizing the arc-sine law is presented. Computational details are described. In the proposed method, only the zero-up-crossing (or zero-down-crossing) wave heights and the time abscissas of the zero-crossing points, instead of the discrete surface elevations, are used as the input data for spectrum computation. In comparison with the existing techniques, the one here proposed has the advantage of reducing the amount of sampling input data from recording curve.

Estimations of spectra for eight wave records have been carried out by using both the Blackman-Tukey approach and the one developed in the paper. Comparison of the two approaches exhibits excellent agreement, suggesting that the presented method is applicable for ocean wave spectrum estimation with reasonable accuracy.