第11卷 第1期 海洋与湖沼 Vol. 11, No. 1
1980年1月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA Jan., 1980

关于海浪波面最大值问题*

张炳根
(山东海洋学院)

在海浪波面最大值的研究中，Longuet-Higgins 曾于1956年提出过在一给定时间区间上波面的最大值问题[8]，其中振幅定义为波高的一半，也就是在一个任意长度的时间区间上波面的最大波高问题。这一问题的实用意义是明显的，例如研究波浪对直壁的作用力时，Крылов[10] 得到了作用在直壁上的最大总波力是

$$R_{\max} \approx \rho g d H_{0\max} \tag{1}$$

其中 $H_{0\max}$ 为入射波的最大波高，ρ 为液体密度，g 为重力加速度，d 为液体深度。由公式(1)，估计最大总波力就成为估计入射波的最大波高。

用 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 分别表示 n 个波的振幅，则均方根振幅定义为

$$\eta_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 / n} \tag{2}$$

Longuet-Higgins[8] 在谱宽度 $\varepsilon = 0$ 的条件下，得到随机抽取 n 个极大值(即振幅)的一个样本，这 n 个极大值中的最高值的平均值的渐近公式为

$$E\{\eta_{\max}\}/\eta_{\mathrm{rms}} = (\ln n)^{1/2} + \frac{\nu}{2}(\ln n)^{-1/2} + O(\ln n)^{-3/2} \tag{3}$$

其中 $\eta_{\max}$ 表示这样本中的最大振幅，$E\{\ \}$ 表示数学期望，ν 是尤拉常数，等于 0.5772…。

设 $f(t)$ 是时间 t 的连续随机函数，其功率谱为 $G(\omega)$，则 n 阶谱矩定义为

$$m_n = \int_0^\infty \omega^n G(\omega) d\omega \tag{4}$$

谱宽度定义为

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \tag{5}$$

Cartwright 和 Longuet-Higgins[4] 推广了 Longuet-Higgins[8] 的工作，定义 η 为波峰到平均线的距离，文献[4]中把极大值 η 作为随机变量，并导出它的分布。根据极大值 η 的分布，研究了随机抽取 n 个极大值的样本，这些极大值中最大值的平均值 $E\{\eta_{\max}\}$，其结果除依赖于极大值的个数 n 以外还依赖于谱宽度 ε

$$E\{\eta_{\max}\}/\eta_{\mathrm{rms}} = \frac{(\ln(1-\varepsilon^2)^{1/2} n)^{1/2} + \frac{\nu}{2}(\ln(1-\varepsilon^2)^{1/2} n)^{-1/2}}{(1-\varepsilon^2/2)^{1/2}} \tag{6}$$

(6)式在任意谱宽度 ε 下成立。

* 中国科学院海洋研究所方国洪同志曾对本文提出过许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。
本刊编辑部收到稿件日期：1979年1月15日。

从概率论的观点看,对解决给定时段上最大波面的问题来说,上述结果有两个缺点或问题:

1. 公式(3)与(6)对 $\eta_{\max}$ 的估计是点估计,仅有点估计对实际应用来说常常是不够的,例如当关心的是波浪的破坏力时,如公式(1)所示,不仅要知道 $E\{\eta_{\max}\}$,而且希望知道 $\eta_{\max}$ 的上界。

2. 把波面的极大值 η 作为随机变量,对其进行 n 次观察,得样本值 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$,令

$$\eta_{\max} = \max(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$$

显然 $\eta_{\max}$ 也是随机变量, Cartwright 等和 Longuet-Higgins 研究了 $\eta_{\max}$ 的分布并导出对 $E\{\eta_{\max}\}$ 的估计。但 $\eta_{\max}$ 并不是连续观察 n 个波的最大振幅。因为前者要求 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是统计独立的,后者相邻的 n 个波之间显然是统计相关的。

鉴于上述两个问题,产生了撰写本文的动机。本文从另一角度出发,即把波面 $f(t)$ 看作正态平稳随机函数[1],利用概率论中的理论成果,更好地解决连续观察 n 个波的最大振幅的估计问题。

一、概率论中的某些结果及其对海浪研究的可用性

1. Cramer[5] 研究了如下问题

设 $x(t)$, $t \geqslant 0$ 是实的、可分的正态平稳过程,且

$$E\{x(t)\} \equiv 0, \quad E\{x^2(t)\} = \sigma^2 \tag{7}$$

过程 $x(t)$ 的功率谱为 $G(\omega)$,它在 $0 \leqslant \omega < +\infty$ 上是有界变差函数,且对某 $\alpha > 0$,满足条件

$$\int_0^\infty \omega^2(\ln(1+\omega))^\alpha G(\omega)d\omega < \infty \tag{8}$$

则有

$$\left|\max_{0\leqslant u\leqslant t} x(u) - \sigma\sqrt{2\ln t}\right| < \frac{\sigma \ln\ln t}{\sqrt{\ln t}} \tag{9}$$

当 $t \to \infty$ 时,(9)式成立的概率趋于 1。(9)式中的 t 为无因次时间,其定义为 $t = t'/\bar{T}$, t' 为有因次的实际时间, $\bar{T}$ 为平均周期,因而 t 近似地等于 t' 时间内波的个数。(8)式中的 ω 和 $G(\omega)$ 分别表示无因次频率与无因次谱。

Шур[11] 改进了 Cramer 得到的公式(9),证明在 Cramer[5] 的条件下成立着比(9)式更强的结果:任给 $\varepsilon > 0$,一定可以找到这样的 t_0,使对一切超过 t_0 的 t 值,不等式

$$\left|\max_{0\leqslant u\leqslant t} x(u) - \sigma\sqrt{2\ln t}\right| < \frac{(\sigma+\varepsilon)\ln\ln t}{\sqrt{2\ln t}} \tag{10}$$

成立的概率等于 1。其中 t 是无因次时间,与(9)式中的 t 意义相同。

2. Cramer[6] 在文中得到了正态平稳随机过程的最大值的极限分布

设标准正态平稳过程 $f(t)$ ($E\{f(t)\} \equiv 0$, $E\{f^2(t)\} = 1$) 存在直到四阶的谱矩,则

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} f(t) = \sqrt{2\ln T} - \frac{\ln(2\pi/\sqrt{m_2})}{\sqrt{2\ln T}} + \frac{\xi}{\sqrt{2\ln T}} \tag{11}$$

在式(11)中, m_2 是在 $R(0) = \sigma^2 = 1$,平均周期 $\bar{T} = 1$ 条件下标准功率谱的二阶矩。条

件 $\bar{T}=1$，即以 $\bar{T}$ 作为时间单位。(11) 中的 ξ 是随机变量，它有极限分布

$$\lim_{T\to\infty} P(\xi < z) = \exp[-\exp(-z)] \tag{12}$$

我们打算利用上述文献 [5, 6, 11] 中的结果 (9), (10), (11) 来讨论在给定时间区间上连续波面的最大值问题。为此要研究把海浪波面起伏 $f(t)$ 作为正态平稳随机过程是否满足公式 (9), (10), (11) 成立的条件。

现在来分析海浪波面 $f(t)$ 作为正态平稳随机函数具有的某些性质。

如果随机过程的几乎所有样本函数是连续的，这过程就是可分的[7]，因此，海浪波面 $f(t)$ 显然是可分过程。

设 $f(y)$ 是在 $[a, b]$ 上定义的有界函数，在 $[a, b]$ 上作如下分点

$$y_0 = a < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = b$$

作

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |f(y_{k+1}) - f(y_k)|$$

称 V 的上界为 $f(y)$ 在 $[a, b]$ 上的全变差，记作 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)$，如果 $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f)<\infty$，叫 $f(y)$ 在 $[a, b]$ 上有界变差，例如单调函数是有界变差函数[2]。海浪谱密度 $G(\omega)$ 是单峰曲线，由两个单调分支组成，因而是有界变差函数。

海浪谱密度函数显然可以认为是具有四阶谱矩的，实际上，Cartwright 等[4]也是这样认为的。

Cramer[6] 还要求随机过程 $x(t)$ 具有强混合的条件，Беляев[9] 证明这个条件是可以不要的。

上面简单的讨论表明海浪波面 $f(t)$ 作为正态平稳随机过程，满足使公式 (9), (10), (11) 成立的一切条件。因而可以利用这些公式来研究海浪波面的最大值问题。

二、主要结果

1. 如已指出的，(7)式中的无因次时间 t 近似地等于连续观察的波的个数 n，即 $t\approx n$。设海浪波面 $f(t)$，其均值 $E\{f(t)\}\equiv 0$，方差 $E\{f^2(t)\}=\sigma^2$，连续观察 n 个波的最大值为 $\eta_{\max}$，则据公式 (7) 成立下列不等式

$$\sigma\sqrt{2\ln n} - \frac{\sigma \ln\ln n}{\sqrt{\ln n}} < \eta_{\max} < \sigma\sqrt{2\ln n} + \frac{\sigma\ln\ln n}{\sqrt{\ln n}} \tag{13}$$

也就是连续观察 n 个波的最大值 $\eta_{\max}$ 的大小依赖于波面的方差和观察的波的个数。对于平稳随机过程波面方差为常数，因而估计 (13) 用起来是方便的。

当 $n\to\infty$ 时，(13) 式成立的概率趋于 1，因此，对于大的 n，(13) 式成立的概率接近 1。

据公式 (10) 也可得类似于 (13) 的结果，当 n 充分大时，以概率 1 成立

$$\sigma\sqrt{2\ln n} - \frac{(\sigma+\varepsilon)\ln\ln n}{\sqrt{2\ln n}} < \eta_{\max} < \sigma\sqrt{2\ln n} + \frac{(\sigma+\varepsilon)\ln\ln n}{\sqrt{2\ln n}} \tag{14}$$

其中 $\varepsilon>0$ 是个小量，需用观察数据经验地确定它。

2. 从公式 (11) 可以得到连续观察 n 个波的波面最大值 $\eta_{\max}$ 的极限分布

$$\eta_{\max} = \sigma\left(\sqrt{2\ln n} - \frac{\ln(2\pi/\sqrt{m_2})}{\sqrt{2\ln n}} + \frac{\xi}{\sqrt{2\ln n}}\right) \tag{15}$$

其中

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi < z) = \exp[-\exp(-z)] \tag{16}$$

m_2 是在 $R(0) = \sigma^2 = 1$，以平均周期 $\bar{T}$ 作为时间单位的 $f(t)$ 的标准功率谱密度的二阶谱矩，它与通常的波面的功率谱密度只是时间尺度有了一个变换，设实际观察的海浪波面的一个现实为 $f(t)$，由此现实计算的功率谱密度为 $S(\omega)$，则这里计算 m_2 用的谱是

$$G(\omega) = \frac{1}{\bar{T}} S\left(\frac{\omega}{\bar{T}}\right).$$

由公式 (15) 与 (16)，连续观察 n 个波的波面最大值 $\eta_{\max}$ 的极限分布，只依赖于波面方差和二阶谱矩 m_2，当然还要依赖于观察时段的长度，即依赖于 n. 知道了 $\eta_{\max}$ 的极限分布，当 n 充分大时(海浪观察通常是这样的)可以得到任意保证率下最大值 $\eta_{\max}$ 的上界，为了达到这个目的，只要利用 (16) 式估计 ξ 的上界就可以了。因而，这个公式用起来也是十分方便的。

实际上，注意到可以用 $-f(t)$ 代替 $f(t)$，因而 (15) 中 $\eta_{\max}$ 是绝对最大值，即最大振幅。

如果把波高定义为振幅的两倍，则最大波高 $H_{\max} = 2\eta_{\max}$，于是，公式 (13)—(16) 可用于最大波高的估计。

3. Cartwright 等[4]指出，在某些海况条件下，例如一个高频的小振幅的波叠加在一个低频成分上，高频波形成其余波上的波纹的情况，波面振幅(指波峰到平均线的距离)服从正态分布，也就是谱宽度 $\varepsilon \to 1$ 的情况，这时连续观察 $n+1$ 个波的振幅序列记为 a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n，把它看成平稳正态序列的一部分，而用文献 [6] 中的另一结果，得到

$$\max_{0\leqslant s\leqslant n} a_s = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}} + \frac{v}{\sqrt{2\ln n}} \tag{17}$$

其中 a_s 为标准化的波面振幅 ($E\{a\} = 0$, $E\{a^2\} = 1$)。随机变量 v 服从极限分布

$$\lim_{n\to\infty} P(v \leqslant z) = \exp[-\exp(-z)] \tag{18}$$

由 (17) 和 (18) 得到这种海况条件下 $n+1$ 个波的最大振幅的平均值为

$$E\{\max_{0\leqslant s\leqslant n} a_s\} = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln\ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}} + \frac{\nu}{\sqrt{2\ln n}} \tag{19}$$

其中 ν 为尤拉常数。

从 (17) 和 (18) 可得在任意保证率下最大振幅的上界。

公式 (13)—(19) 是本文提供的估计连续观察 n 个波(对于公式 (17)—(19) 是 $n+1$ 个波)的最大波面的公式。

三、本文得到的公式 (13)—(19) 和文献 [4], [8] 中得到的公式 (3) 与 (6) 的关系

1. 本文开始时指出，文献[4]，[8]得到的公式(3)和 (6) 是随机抽取的 n 个波，其中最

大振幅的平均值与连续观察 n 个波中最大振幅的平均值是有区别的。其区别在于前者要求 n 个波是统计独立的，而后者显然是统计相关的，但是当 $n\to\infty$ 时，两者间的结果应当是一致的。下面的推导将证实这一点，即证明在 $n\to\infty$ 的极限情况下，公式 (3) 与 (6) 可以从本文提供的公式 (15) 与 (16) 中推出来。

对于公式 (15) 中的随机变量 ξ，它的极限分布由公式 (16) 表示，因而，当 $n\to\infty$ 时，渐近地有

$$\begin{aligned}E\{\xi\} &= \int_{-\infty}^{\infty} z\exp(-z)\exp[-\exp(-z)]dz \\ &= \int_0^{\infty} \ln(1/z)\exp(-z)dz = \nu = 0.5772\cdots \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}E\{\xi^2\} &= \int_{-\infty}^{\infty} z^2\exp(-z)\exp(-\exp(-z))]dz \\ &= \int_0^{\infty} \ln^2 z\exp(-z)dz = \pi^2/6 + \nu^2\end{aligned} \tag{21}$$

其中 ν 是尤拉常数[3]。

从 (20) 与 (21) 容易得到随机变量 ξ 的变异系数

$$\delta_\xi = E\{\xi\}^{-1}(E\{\xi^2\} - (E\{\xi\})^2)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}\,\nu} \approx 2.22 \tag{22}$$

结合公式 (20) 与 (15) 可以得到渐近估计

$$E\{\eta_{\max}\} = \sigma\left(\sqrt{2\ln n} + \frac{\nu}{\sqrt{2\ln n}}\right) \tag{23}$$

因为 $2\pi/\sqrt{m_2}$ 的平均值等于 1。如果把 $\eta_{\rm rms} = \sqrt{2}\,\sigma$ 代入 (23) 式，则有

$$E\{\eta_{\max}\}/\eta_{\rm rms} = \sqrt{\ln n} + \frac{\nu}{2\sqrt{\ln n}} \tag{24}$$

公式 (24) 与文献 [8] 得到的公式 (3) 一致。但文献 [8] 中是假定谱宽度 $\varepsilon=0$ 推出来的，这里无需这个假定。从公式 (20)—(23) 还可以得到 $\eta_{\max}$ 的方差为 $\pi^2\sigma^2/12\ln n$，对于充分大的 n，近似地取 $E\{\eta_{\max}\} = \sigma\sqrt{2\ln n}$，则得最大振幅 $\eta_{\max}$ 的变异系数为

$$\pi/(2\sqrt{6}\ln n).$$

现在再从我们的公式 (15) 与 (16) 导出 Cartwright 等得到的公式 (6)。

众所周知，对于正态平稳随机过程有下列结果：

单位时间内上跨零点的个数的期望值为

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_2}{m_0}}$$

或平均周期

$$\overline{T} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \tag{25}$$

单位时间内极大值(波峰)个数的期望值为

$$N' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \tag{26}$$

波峰到平均线的距离的协方差为

$$\eta_{\mathrm{rms}}=\sqrt{2(1-\varepsilon^2/2)m_0} \tag{27}$$

在公式(11)中观察时段 T(以 $\bar{T}$ 为时间单位)内波峰的个数为

$$n=N'\bar{T}T=\sqrt{\frac{m_0m_4}{m_2}}T=T/\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

或者

$$T=n(1-\varepsilon^2)^{1/2} \tag{28}$$

把(28)代入(11)再取期望可以得到

$$E\{\eta_{\max}\}/\sqrt{m_0}=\sqrt{2\ln[n(1-\varepsilon^2)^{1/2}]}+\frac{v}{\sqrt{2\ln[n(1-\varepsilon^2)^{1/2}]}} \tag{29}$$

把(27)式代入(29)式得到

$$E\{\eta_{\max}\}/\eta_{\mathrm{rms}}=\left[\sqrt{2\ln[n(1-\varepsilon^2)^{1/2}]}+\frac{v}{\sqrt{2\ln[n(1-\varepsilon^2)^{1/2}]}}\right]\Big/\sqrt{2(1-\varepsilon^2/2)}$$

$$=\frac{\sqrt{\ln[n(1-\varepsilon^2)^{1/2}]}+\frac{v}{2}\Big/\sqrt{\ln[n(1-\varepsilon^2)^{1/2}]}}{\sqrt{1-\varepsilon^2/2}} \tag{30}$$

公式(30)就是文献[4]中得到的公式(6),说明当 $n\to\infty$ 时,文献[4,8]中得到的关于计算 $E\{\eta_{\max}\}$ 的公式都可从本文提供的公式中推出来。

2. 在波高服从 Rayleigh 分布的条件下可以证明有关系式 $\eta_{\mathrm{rms}}=\sqrt{2}\,\sigma$,把这个关系式代入(13),可得公式(13)的另一形式

$$\sqrt{\ln n}-\frac{\ln\ln n}{\sqrt{2\ln n}}<\eta_{\max}/\eta_{\mathrm{rms}}<\sqrt{\ln n}+\frac{\ln\ln n}{\sqrt{2\ln n}} \tag{31}$$

比较公式(31)与文献[8]的公式(3)可以看到公式(31)的区间中心 $\sqrt{\ln n}$ 是公式(3)的主项,公式(3)提供的点估计落在估计(31)的范围内,说明对于大的 n,本文的估计(31)与文献[8]的估计(3)是相符的,但后者是点估计,本文提供的公式(31)给出了以接近1概率成立的 $\eta_{\max}$ 的范围,实用意义更大一些。

对于公式(14)有类似于上面的分析。

3. 在谱宽度 $\varepsilon\to1$ 的情况下,随机抽取 $n+1$ 个波的最大振幅的平均值,据文献[4]中得到的公式是

$$E\{\eta_{\max}\}/\sigma\approx\sqrt{2}(\ln(n+1)-(1/2)\ln2\pi)^{1/2} \tag{32}$$

从本文提出的渐近分布(17)和(18)得到的公式是公式(19),公式(32)与(19)有所不同,但数值计算表明这两个公式得到的数值是十分近似的,例如考虑101个波,由公式(32)之右端算得2.720,由(19)右端算出为2.572,相对误差约为5.7%。公式(32)本身是近似公式,而(19)是渐近公式,上述差异是可以理解的。但是,本文的公式(17)提供一个用起来很方便的最大振幅的渐近分布,由它可以计算任意保证率下最大振幅的上界及有关 $\eta_{\max}$ 的其它统计性质。

在这种海况下 $\eta_{\max}$ 的方差与三、1.中相同,为 $\pi^2\sigma^2/12\ln n$,由(19)也可计算 $\eta_{\max}$ 的

变异系数。计算表明这种海况下 $\eta_{\max}$ 的变异系数比三、1. 中的情况大一些。

四、结 束 语

1. 为了解决在给定的时间区间上海浪波面的最大值估计问题，本文认为直接把波面看成随机过程的连续样本的一段，比文献 [4,8] 中的观点更合理，虽然上面已经证明当 $n \to \infty$ 时，从这两种观点得到的 $E\{\eta_{\max}\}$ 的估计是一致的，但当 n 为有限时，本文提供的公式更正确地反映连续观察时段上波面的最大值。

即从概率论观点看来，本文从随机函数观点来解决这里提出的问题是更恰当的。

2. 对于最大波面估计，文献 [4,8] 提供了 $\eta_{\max}$ 的平均值的计算公式，对于工程需要来说，只知道平均值常常是不够用的，本文提供的公式 (13) 和 (14)，能给出 $\eta_{\max}$ 的一个范围，实用意义更大。

3. 按理从文献 [4] 也可得到 $\eta_{\max}$ 的分布，但其形式将相当复杂，所以文献[4]中也未具体推导出一个有用的公式。而本文提供的 $\eta_{\max}$ 的渐近分布是重指数型的分布，形式上与 Gumbel 极值分布有点相似，用起来是很方便的，有了分布可以讨论有关 $\eta_{\max}$ 的各种统计性质。例如前面讨论过 $\eta_{\max}$ 的变异系数，一定保证率下 $\eta_{\max}$ 的上界等等。

4. 文献 [4] 得到的公式 (6)，$E\{\eta_{\max}\}$ 依赖于谱宽度 ε，而本文从公式 (15) 推出的关于 $E\{\eta_{\max}\}$ 的公式 (23) 只依赖于方差，不必计算谱宽度，故使用起来很方便。

参 考 文 献

[1] 文圣常，海浪原理。山东人民出版社。
[2] 那汤松，1953。实变函数论，上册。商务印书馆，第 270 页。
[3] 菲赫金哥贝茨，1954。微积分学教程。人民教育出版社，2(3)：705。
[4] Cartwright, D. E. and M. S. Longuet-Higgins, 1956. The statistical distribution of the maxima of a random function. *Proc. Royel. Soc. London* **237** (1029): 212—232.
[5] H. Cramer, 1962. On the maximum of a normal stationary stochastic process. *Bull. Amer. Math. Soc.* **68**(5): 512—515.
[6] ——————, 1965. A limit theorem for the maximum values of certain stochastic processes. *Теория Вероят и ее Примен* **10**(1): 137—139.
[7] Loeve, M., 1962. Probability Theory Van Nostrand-Reinhold. Princeton. New Jeney, p. 504.
[8] Longuet-Higgins. M. S., 1952. On the statistical distribution of the height of sea waves. *Jour. Mar. Res.* 11(3): 245—266.
[9] Беляев, Ю. К., 1967. О числе пересечений уровня гауссовским случайным процессом. *Теория Вероят и ее Примен* **11**(3):444—457.
[10] Крылов, Ю. М. 1969. Линейная теория взаимодействия нерегуляных. Трехмерных волн с жисткой вертикальной стенкой. М 〈Тринспорт〉. *Труды союзморниипроекто* **27** (33): 95—111.
[11] Шур, М. Г., 1965. О Максимуме гауссовского стационарного процесса. *Теория Вероят и ее Примен* 10:386—389.

ON THE MAXIMUM OF WAVE SURFACE OF SEA WAVES

Zhang Binggen

(*Shandong College of Oceanology*)

ABSTRACT

This article considers wave surface as a normal stationary random process to solve the estimation of the maximum of wave surface in a given time interval by means of the theoretical results of probability theory. The results are represented by formulae (13)—(19) in this article. It was proved in this article when time interval approaches infinite the formulae (3), (6) of $E\{\eta \max\}$ that were arrived from the references[4,8], can also be derived by asymptotic distribution of the maximum of wave surface provided by the article. The advantage of the results obtained from this point of view as compared with the results obtained from the reference[4,8] was discussed.