

渤海湾水质污染的数字模型*

于天常

(中国科学院海洋研究所)

渤海湾的污染问题,已引起重视。随着四化建设的发展,向渤海湾排放的污水量也必将增加。

我们认为,在现阶段应着手给渤海湾周围各排污口(河口)规定一个合理的排放指标。显然,如指标限定过宽,渤海湾污染会日趋严重;指标限定过严,就会在污水净化处理上耗费大量资金。因此应当给出一个排放污水水质的科学指标。允许排污,不允许过量。

国家已经制定了海域的环境基准。其中分有害物质的最高容许排放浓度和三类水质标准。第一类、第二类水质的化学耗氧量(COD)都不得超过 3ppm。

关于渤海湾周围污水排放的科学指标,只有将渤海湾的环境容量研究清楚才能最终给出。“环境容量”这一概念有多种定义,但就从管理污水排放这一角度来说,环境容量可以定义为:使海域的水质能够维持在不超过环境基准值的条件下,污染物质的最大排放量。

污染物质排入海,通过输运和扩散溶于海水之中,有一部分随着水体的交换而带出了海湾;有一部分留在湾内海水中,形成了海湾中污染物浓度的分布。本模型的目的就是计算相应于污染物浓度不超过水质污染基准的最大排放量,并以此最大排放量为确定污水排放量的科学指标。

在这个报告里我们给出了一个关于潮流流场中扩散的有限元法的数字模型,并以 COD (化学耗氧量) 为模拟的污染物质,计算渤海湾主要排污河口(天津南、北排污河)的允许最大排放量。

一、数学模型

求污染物质扩散方程的数值解,必须先准确地求出湾内各时刻的速度场(u, v)。渤海湾是一个以潮流为主的强混合型海湾,各种参数随深度的变化很小。溶于水中的污染物搬运的主要动力,一是潮流,一是携带污染物流入海湾的河水动量。

对不可压粘性流体的连续性方程,运动方程和扩散方程,考虑其中的局地时变项,对流项、柯氏力项、涡动扩散项以及入海河流的流量,并从海底到水面垂直积分后,可得下列形式的控制方程:

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 649 号。

本刊编辑部收到稿件日期: 1981 年 8 月 10 日。

本文是在毛汉礼教授指导下,吴宝铃教授支持下,并得到甘子钧副教授、张法高同志的热情帮助而写成的,谨表衷心感谢。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \sum_a Q_a^m \delta(\bar{r} - \bar{r}_a) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{U}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V \frac{U}{H} \right) = & -gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} + fV \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \\ & - \frac{g}{C_f^2} U(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}/H^2 + \sum_a Q_a^x \delta(\bar{r} - \bar{r}_a) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{V}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V \frac{V}{H} \right) = & -gH \frac{\partial \zeta}{\partial y} - fU \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \\ & - \frac{g}{C_f^2} V(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}/H + \sum_a Q_a^y \delta(\bar{r} - \bar{r}_a) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(HC)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (UC) + \frac{\partial}{\partial y} (VC) = & \frac{\partial}{\partial x} \left[D \frac{\partial(HC)}{\partial x} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[D \frac{\partial(HC)}{\partial y} \right] + \sum_a Q_a^c \delta(\bar{r} - \bar{r}_a) \end{aligned} \quad (4)$$

式中 x, y, z 是笛卡尔坐标系, xy 平面与平均海平面重合, x 指向东, y 指向北, z 轴向上为正; U, V 分别为 x, y 方向上的体积流量; ζ 为海面离开平均海平面的高度 (可近似地由 M_2 分潮表出); $H = h + \zeta$ 为海底到海面的高度, h 是自平均海平面起算的深度, 为已知; f 为柯氏参数; g 为重力加速度; ε 为涡动混合系数; C_f 为 Chezy 系数; C 为 COD 的浓度; D 为涡动扩散系数; $\delta(\bar{r} - \bar{r}_a)$ 为 Dirac Delta 函数; Q_a^m 为河流入海的流量; Q_a^x, Q_a^y 分别为河流入海在 x, y 方向上的动量; Q_a^c 为 COD 的排放量。

初始条件:

$$\begin{aligned} U(x, y, 0) &= 0; \quad V(x, y, 0) = 0; \\ \zeta(x, y, 0) &= 0; \quad C(x, y, 0) = \text{const}; \end{aligned}$$

边界条件:

$$\text{海峡处 } \zeta(t) = H_m \cdot \sin(\sigma_m t - \Theta)$$

C 为已知;

$$\text{陆界上 } U = 0, \quad V = 0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} l_x + \frac{\partial C}{\partial y} l_y = 0;$$

$$\text{河口上 } Ul_x + Vl_y = q_n,$$

C 为已知。

式中 n 为法线, l_x, l_y 为法线的方向余弦, H_m 为潮振幅, Θ 为初位相角, σ_m 为角速度, q_n 为河口法线方向单位宽度上的流出量。

二、计算方法

1. 局地时变项用前差商离散

控制方程 (1), (2), (3), (4) 均可化为下列输运扩散方程的形式:

令

$$P = \begin{Bmatrix} H \\ U \\ V \\ HC \end{Bmatrix}$$

如果 S 表示各方程中不带微分的项, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P\bar{V}) = \nabla \cdot (K\nabla P) + S \quad (5)$$

设 $t^n < t < t^{n+1}$, $t^{n+1} - t^n = \Delta t_n$, 则上式可差分离散为

$$\frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t_n} = -\nabla \cdot (P^* \bar{V}) + \nabla \cdot (K\nabla P^n) + S^n \quad (6)$$

如取 P^* 为 $n+1$ 时刻的值 (即 $P^* = P^{n+1}$), 则计算格式是隐式的。这种计算格式比较复杂, 计算时间冗长。如果 P^* 为 n 时刻的值 (即 $P^* = P^n$), 则计算格式是显式的, 并且计算得以简化, 但不稳定。因此, 在实际计算中, 可将 P^* 取在两者之间。

$$P^* = P^*(\bar{r}, t^n + \alpha \cdot \Delta t_n), \quad 0 < \alpha < 1,$$

若 $\alpha = 1$, 即 $P^* = P^{n+1}(\bar{r}, t^{n+1})$, 是隐式; 若是 $\alpha = 0$, 即 $P^* = P^n(\bar{r}, t^n)$, 是显式。

利用泰勒公式:

$$\begin{aligned} P^*(\bar{r}, t) &= P^*(\bar{r}, t^n + \alpha \cdot \Delta t_n) \\ &= P(\bar{r} - \alpha \cdot \Delta t_n \cdot \bar{V}^n, t^n) \\ &= P^n(\bar{r}, t^n) - \alpha \cdot \Delta t_n \cdot \bar{V}^n \cdot \nabla P^n + O(\Delta t_n^2) \end{aligned} \quad (7)$$

将 (7) 式代入 (6) 式得

$$\begin{aligned} P^{n+1} &= P^n - \Delta t_n \cdot \nabla \cdot (P^n \bar{V}^n) + \alpha \cdot (\Delta t_n^2) \nabla \cdot [(\bar{V}^n \cdot \nabla P^n) \bar{V}^n] \\ &\quad + \Delta t_n [\nabla \cdot (K\nabla P^n) + S^n] \end{aligned} \quad (8)$$

这里 α 称作迎风系数, 用以体现对流项中的“迎风效应”。对于二维问题, α 的最优值可通过试算法求得。

2. 空间的离散化

用 Galerkin 方法对方程 (8) 进行空间离散化, 得

$$\begin{aligned} \iint_R N_i P^{n+1} dR &= \iint_R N_i P^n dR - \Delta t_n \iint_R N_i \nabla \cdot (P^n \bar{V}^n) dR \\ &\quad + \alpha (\Delta t_n)^2 \iint_R N_i \nabla \cdot [(\bar{V}^n \cdot \nabla P^n) \bar{V}^n] dR \\ &\quad + \Delta t_n \iint_R N_i \nabla \cdot (K\nabla P^n) dR + \Delta t_n \iint_R N_i S^n dR \\ &= \iint_R N_i P^n dR - \Delta t_n \iint_R N_i \nabla \cdot (P^n \bar{V}^n) dR \\ &\quad + \alpha (\Delta t_n)^2 \oint_B N_i \left(U \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{V}_n^x dB \\ &\quad - \alpha (\Delta t_n)^2 \iint_R \left(U \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \left(U \frac{\partial N_i}{\partial x} + V \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dR \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta t_n \oint_B N_i K \frac{\partial P}{\partial n} dB - \Delta t_n \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dR \\
& + \Delta t_n \iint_R N_i S^n dR
\end{aligned} \quad (9)$$

式中 N_i 为 Lagrange 插值函数。

将 (6) 式至 (9) 式的运算过程应用到控制方程 (1), (2), (3), (4) 上即完成了离散化。

3. 网格的选取与插值函数

选用的单元是曲边四边形, 每元九个结点, 通过坐标变换函数

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) = \sum_i N_i(\xi, \eta) x_i \\ y = y(\xi, \eta) = \sum_i N_i(\xi, \eta) y_i \end{cases} \quad (10)$$

使整体坐标 x, y 平面上的曲边四边形与局部坐标 ξ, η 平面上矩形元相对应。

(5) 式中的 P 则相应表示为

$$P = \sum_i N_i(\xi, \eta) P_i \quad (11)$$

这里 $N_i(\xi, \eta)$ 是双二次函数。

$$N_i = \begin{cases} (\xi \cdot \xi_i + \xi^2) \cdot (\eta \cdot \eta_i + \eta^2) / 4 & \text{当 } (\xi_i, \eta_i) = (\pm 1, \pm 1) \\ (\xi \cdot \xi_i + \xi^2) \cdot (1 - \eta^2) / 2 & \text{当 } (\xi_i, \eta_i) = (\pm 1, 0) \\ (\eta \cdot \eta_i + \eta^2) \cdot (1 - \xi^2) / 2 & \text{当 } (\xi_i, \eta_i) = (0, \pm 1) \\ (1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta^2) & \text{当 } (\xi_i, \eta_i) = (0, 0) \end{cases}$$

4. 单元矩阵

形状函数 (11), 只给出了 P 关于局部坐标 (ξ, η) 的表达式, 我们必须应用坐标变换 (10) 及复合函数求导的法则, 找出局部坐标与整体坐标的对应关系。

经过简单的推导, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial P}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{|J|} \left(-\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) \end{cases} \quad (12)$$

$$J = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (14)$$

5. 单元积分

因为各被积函数变得复杂, 只能采用数字积分的方法。在这里, 我们采用二维 Simpson 求积公式。积分形式为:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{9} \{ f(-1, 1) + 4f(0, 1) \}$$

$$\begin{aligned}
 &+ f(1, 1) + 4f(-1, 0) + 16f(0, 0) + 4f(1, 0) \\
 &+ f(-1, -1) + 4f(0, -1) + f(1, -1) \} \quad (15)
 \end{aligned}$$

6. 时间步长

对非线性方程来说, 还没有一个用以确定时间步长的一般公式, 而时间步长的选取却又关系着计算的成败。为了选取最优的时间步长, 我们在计算程序中采取“变步长”和“定步长”相结合的计算方案。

变步长的内容是: 取 $\Delta t_n = dT$, 算出一个结果, 再令 $\Delta t_n = \frac{1}{2} dT$, 又计算两步, 得到在 $t_0 + dT$ 时刻的两个结果。若这两个结果之差的绝对值小于预先给定的误差要求, 则将步长加大, 重复上述过程来计算下一步。否则将 dT 缩小。直到选到最合适的时间步长后, 即可用定步长继续计算。在计算过程中, 按时还要检查误差情况, 以保证计算的稳定性。

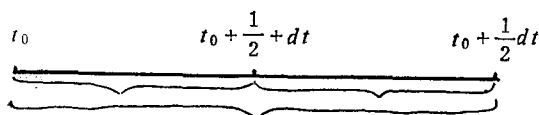


图1 变步长示意图

显然, 我们采用的这种计算方法, 对于时间和空间均是显式的, 并且可以节省计算时间。

三、计算结果

渤海湾的湾口尺寸与湾域同量级, 湾口断面上的参数难能作为已知条件。渤海海峡较窄, 将海峡上的潮位作为边界条件(海峡的潮位值取用 1958 年海洋普查的资料)从而模拟整个渤海。由于计算机内存容量的限制, 将整个渤海分成 73 个单元, 343 个结点。渤海湾内结点密, 有 30 个单元, 180 个结点。模拟潮汐 (M_2 分潮), 使它符合 1958 年海洋普查的资料, 试算出迎风系数 $\alpha = 0.5-0.6$, 涡动混合系数 $\varepsilon = 10^4-10^5$ 米²/秒, $C_f =$

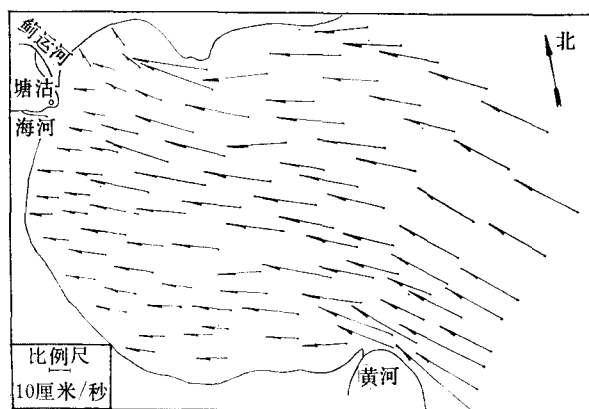


图2 $t=0$ 时的潮流图

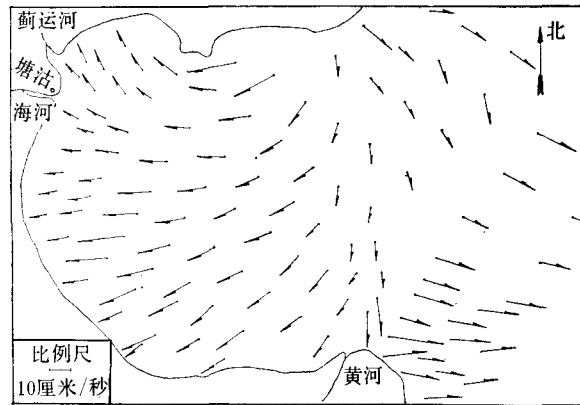


图 3 $t = \frac{T}{4}$ 时的潮流图

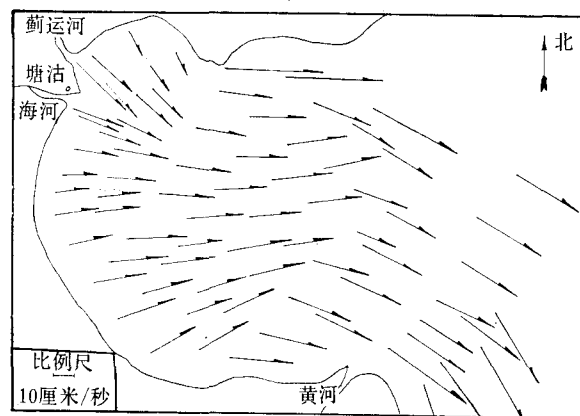


图 4 $t = \frac{T}{2}$ 时的潮流图

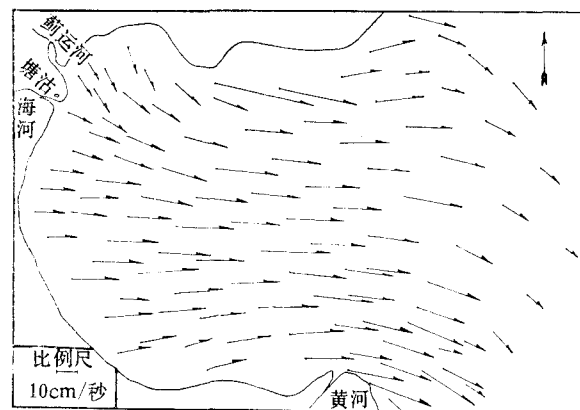


图 5 $t = \frac{3}{4}T$ 时的潮流图

60 米^{1/2}/秒, 渤海湾位于北纬 39° 附近, $f = 9.17 \times 10^{-5}$ /秒, 涡动扩散系数 $D = 10-100$ 米²/秒。

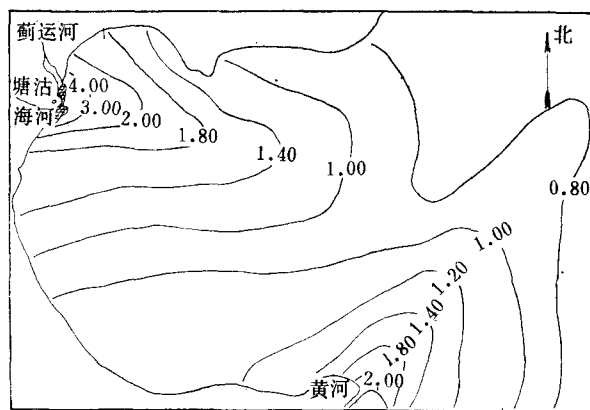


图 6 COD 分布图 单位: ppm

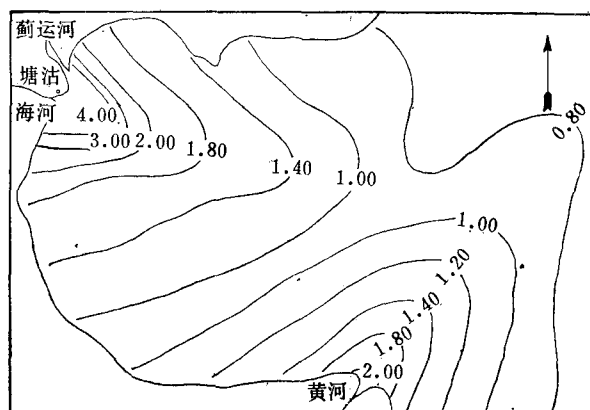


图 7 COD 分布图 单位: ppm

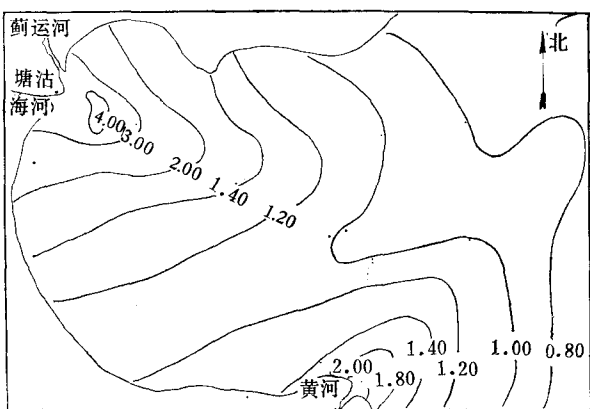


图 8 COD 分布图 单位: ppm

图 2, 3, 4, 5 是 $t = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3}{4}T$ 四个时刻的潮流图。

由图 2—5 可以看出,在湾顶处流速较小,流向大致与海岸垂直。最大流速出现于北岸曹妃甸附近(64 厘米/秒)和黄河口外(62 厘米/秒)。这些都与实测结果相符,从而证实了本文数字模型的合理性¹⁾。

各排污口的排污量,因缺乏资料,用一系列给定值进行试算,最后选用有代表性的三组数据,图 6, 7, 8 就是这三种不同的计算条件,计算了 58 个潮汐循环以后低潮时刻的 COD 分布图。

我们将天津南、北排污河的排污量以及黄河的排污量均取为 200 吨/天(以 COD 计),河水流量分别取为 30 米³/秒、40 米³/秒、300 米³/秒(相当于这三条河的旱季流量)。计算的结果是天津南、北排污河口附近的小区域内(约 3 公里)的 COD 超过了 3ppm,渤海湾内其它区域的 COD 均小于 3ppm(图 6)。

我们若将天津南、北排污河的排污量均取为 400 吨/天,其它条件不变。计算结果是天津南、北排污口外一片海域(20—50 公里)的 COD 超过了 3ppm(图 7)。

我们若将天津南、北排污河的排污量仍取为 400 吨/天,而河水流量分别取为 300 米³/秒、400 米³/秒(代表雨季流量),其它条件不变。计算结果是 COD 的浓度大于 3ppm 的面积变小(图 8)。

基于上述计算结果,我们可以得出如下初步结论:

(1) 天津南、北排污河的排污量以 COD 计,在枯水季节都要小于 200 吨/天,在丰水季节则不应超过 300 吨/天。

(2) 本模型是将 COD 当成保守溶质,且仅考虑渤海湾由于潮流所产生的水体交换而形成的自净能力。实际上海湾中的有机污染物,在一些生物过程和化学过程下,既可能消衰,也可能增长。而且,海湾内的风海流,热、盐环流也对海湾的水体交换有一定的贡献。但是关于 COD 的消长规律,目前还缺少资料,风海流,热、盐环流本模型也未考虑,这有待进一步的研究。

参 考 文 献

- [1] 春名誠治、松梨順三郎, 1979。播磨灘の潮流解析。第 26 回海岸工学講演会論文集 pp. 522—562。
- [2] 大西亮一、白石英彦, 1979。有明海の潮流解析について。同上 pp. 527—531。
- [3] 松梨順三郎、神吉和夫、中井茂喜、春名誠治, 大阪湾の汚濁解析。第 24 回海岸工学講演会論文集 pp. 500—503。

1) 整个渤海潮流数字模拟的结果详见吴江航、于天常、唐世敏等“浅海潮流的数字模拟”一文(待发表)。

A NUMERICAL MODEL OF SEWAGE TRANSPORT IN BOHAI BAY*

Yu Tianchang

(*Institute of Oceanology, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, an upwinding finite elements model was given, sewage distribution was modeled for Bohai Bay, the maximum discharge of Tianjin south sewage river and north sewage river permissible by the water quality standard in the gulf was computed and a guidance for disposing sewage was given.

Conclusion: Considering the remaining tidal current as the only self-purifying process of Bohai Bay, the maximum discharge of Tianjin south sewage river and north sewage river counted by chemical oxygen demand (COD) should be smaller than 200 tons/day in dry season and smaller than 300 tons/day in wet season.

* Contribution No. 649 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.