第14卷 第6期　　海 洋 与 湖 沼　　Vol. 14, No. 6
1983 年 11 月　　OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA　　Nov., 1983

关于潮汐不连续资料的分析算法*

戚安生　　高毓乾
（上海计算技术研究所）

潮汐不连续资料的分析算法可在文献[1]和[2]中找到。为使导出的方程组更加通用、更具有普遍性，本文给出一种技巧，使结果具有如下特点：

1. 正规方程组系数较原来的结果[1]更加具体、明确，系数矩阵的每个元素都由实在的表达式表示。

2. 当相邻各段资料之间的时间间距对称分布时，整个系数矩阵像连续资料的情况一样被约化为两个独立的矩阵。

3. 连续资料如果作为不连续资料的一种特款，被分段考虑时，所得正规方程组则与连续资料的结果完全一样。

除上述分析算法外，本文还讨论了正规方程组的求解问题。联系[1]中算法，我们还介绍了另一种克服矩阵病态的办法。

一、算法简介

若 S 段长度相等的资料（每段离散整点值的个数相同）中，第 i 段的实测值为 $h_n^{(i)}$（$n=0,1,\cdots,N$），其中 N 为偶数，相对于时间原点（$h_0^{(1)}$ 所在年份的 1 月 1 日 0 时），$h_0^{(i)}$ 观测时间的坐标为 $n_b^{(i)}$ 小时，现有

$$h_n^{(i)}=x_0+\sum_{q=1}^{Q}x_q^{(i)}\cos\left[\left(n-\frac{N}{2}\right)\sigma_q\right]+\sum_{q=1}^{Q}y_q^{(i)}\sin\left[\left(n-\frac{N}{2}\right)\sigma_q\right]+r_n^{(i)} \tag{1}$$

$$n=0,1,\cdots,N、i=1,2,\cdots,S。$$

其中

$$x_q^{(i)}=R_q\cos\left[\varphi_q-\left(n_b^{(i)}+\frac{N}{2}\right)\sigma_q\right],\quad y_q^{(i)}=R_q\sin\left[\varphi_q-\left(n_b^{(i)}+\frac{N}{2}\right)\sigma_q\right]。$$

根据最小二乘法，按照[1]中的矩阵形式我们有

$$\|\boldsymbol{R}\|_2^2=\|\bar{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z}-\bar{\boldsymbol{H}}\|_2^2=\min \tag{2}$$

其中
$$\boldsymbol{Z}^T=(\boldsymbol{X}^T,\boldsymbol{Y}^T),$$
而
$$\boldsymbol{X}^T=(x_0,x_1,\cdots,x_Q),\quad \boldsymbol{Y}^T=(y_1,y_2,\cdots,y_Q)。$$

T 为向量和矩阵的转置符号，(2)中 $\|\cdot\|_2$ 为 Euclid 范数。

假设

$$\boldsymbol{X}^{(i)T}=(x_0,x_1^{(i)},\cdots,x_Q^{(i)}),\quad \boldsymbol{Y}^{(i)T}=(y_1^{(i)},y_2^{(i)},\cdots,y_Q^{(i)}), \tag{3}$$

---

* 方国洪副教授对本文提出了宝贵意见，作者特此表示衷心感谢。
收稿日期：1982 年 6 月 20 日。

并取 $\Delta T^{(i)} = \Delta n_b^{(i)} - \frac{N(S-1)}{2} - dm$，则有

$$\begin{bmatrix} x_q^{(i)} \\ y_q^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Delta T^{(i)}\sigma_q) & \sin(\Delta T^{(i)}\sigma_q) \\ -\sin(\Delta T^{(i)}\sigma_q) & \cos(\Delta T^{(i)}\sigma_q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中

$$d_1 = 0,\ d_j = n_b^{(j)} - n_b^{(j-1)} - N,\ \ j = 2, 3, \cdots, S。$$

而

$$dm = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S} d_i,\quad \Delta n_b^{(i)} = n_b^{(i)} - n_b^{(1)},\ i = 1, 2, \cdots, S。$$

并有

$$x_q = R_q \cos\left[\varphi_q - \left(n_b^{(1)} + \frac{SN}{2} + dm\right)\sigma_q\right],$$

$$y_q = R_q \sin\left[\varphi_q - \left(n_b^{(1)} + \frac{SN}{2} + dm\right)\sigma_q\right]。$$

(2)中的$\boldsymbol{W}$为 $(2Q+1)\times S$ 行 $2Q+1$ 列的矩阵，其元素按(4)式的矩阵给出，从 1 到 S 对应于 $\boldsymbol{X}^{(i)T}$ 和 $\boldsymbol{Y}^{(i)T}$。

一般，对一段连续的 $NS+1$ 个实测值，其正规方程组的系数矩阵[1]为

$$\boldsymbol{M}^T\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

元素为

$$F_{pq} = \frac{1}{2}(C_{pq} + D_{pq}),\ \ G_{pq} = \frac{1}{2}(C_{pq} - D_{pq}),$$

其中

$$C_{pq} = \frac{\sin\left[\frac{NS}{2}(\sigma_p - \sigma_q)\right]}{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}(\sigma_q - \sigma_q)\right]},$$

$$D_{pq} = \frac{\sin\left[\frac{NS}{2}(\sigma_p + \sigma_q)\right]}{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}(\sigma_p + \sigma_q)\right]}。$$

然而(2)相对于 x_q 和 y_q 求偏导数，则得

$$\boldsymbol{AZ} = \boldsymbol{P}, \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^* & \boldsymbol{T}^* \\ \boldsymbol{S}^* & \boldsymbol{G}^* \end{bmatrix}, \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{F}^*$ ($Q+1$ 行 $Q+1$ 列)，$\boldsymbol{G}^*$ (Q 行 Q 列)，$\boldsymbol{S}^*$ (Q 行 $Q+1$ 列) 和 $\boldsymbol{T}^*$ ($Q+1$ 行 Q 列)的元素分别为

$$\begin{cases} F_{pq}^* = C_{pq}\sum_{i=1}^{S}\cos[\Delta T^{(i)}(\sigma_p - \sigma_q)] + D_{pq}\sum_{i=1}^{S}\cos[\Delta T^{(i)}(\sigma_p + \sigma_q)], \\ G_{pq}^* = C_{pq}\sum_{i=1}^{S}\cos[\Delta T^{(i)}(\sigma_p - \sigma_q)] - D_{pq}\sum_{i=1}^{S}\cos[\Delta T^{(i)}(\sigma_p + \sigma_q)], \\ S_{pq}^* = C_{pq}\sum_{i=1}^{S}\sin[\Delta T^{(i)}(\sigma_p - \sigma_q)] + D_{pq}\sum_{i=1}^{S}\sin[\Delta T^{(i)}(\sigma_p + \sigma_q)], \\ T_{pq}^* = -C_{pq}\sum_{i=1}^{S}\sin[\Delta T^{(i)}(\sigma_p - \sigma_q)] + D_{pq}\sum_{i=1}^{S}\sin[\Delta T^{(i)}(\sigma_p + \sigma_q)], \end{cases} \tag{8}$$

而 $\boldsymbol{P}^T = (\boldsymbol{L}^T, \boldsymbol{K}^T)$，向量 $\boldsymbol{L}^T, \boldsymbol{K}^T$ 的分量为

$$\begin{cases} L_p = \sum_{i=1}^{S}\sum_{n=0}^{N}{}'' h_n^{(i)}\cos\left[\left(n + \Delta n_b^{(i)} - \frac{SN}{2} - dm\right)\sigma_p\right], \\ K_p = \sum_{i=1}^{S}\sum_{n=0}^{N}{}'' h_n^{(i)}\sin\left[\left(n + \Delta n_b^{(i)} - \frac{SN}{2} - dm\right)\sigma_p\right]。 \end{cases} \tag{9}$$

上面各式中，$p, q = 1, 2, \cdots, Q$。

当资料为连续观测值，则

$$d_i = 0,\ \Delta n_b^{(i)} = N(i-1)。$$

显然，由此得

$$\begin{cases} F_{pq}^* = (C_{pq} + D_{pq})/2,\ G_{pq}^* = (C_{pq} - D_{pq})/2, \\ S_{pq}^* = T_{pq}^* = 0。 \end{cases} \tag{10}$$

此时(7)与(5)完全一样。这就是说，不连续资料的分析算法包含了对连续资料的分析算法。(5)仅仅是(7)的一种特殊形式。

特别，当 $d_i = d$（常数）时，导出的系数矩阵仍有

$$S_{pq}^* = T_{pq}^* = 0,$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 被约化为两个独立的矩阵。更一般地，当所有的两个相邻段之间的时间间距对称分布时，同样可得

$$S_{pq}^* = T_{pq}^* = 0。$$

显然，从(8)式可看出，这是由于正弦函数的奇函数性质决定的。

二、正规方程组的求解技巧

首先，我们研究一个周日资料的正规方程组。其矩阵 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{G}$ 的元素为

$$F_{pq} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[12(\sigma_p - \sigma_q)]}{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}(\sigma_p - \sigma_q)\right]} + \frac{\sin[12(\sigma_p + \sigma_q)]}{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}(\sigma_p + \sigma_q)\right]}\right], \tag{11}$$

$$G_{pq} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin[12(\sigma_p - \sigma_q)]}{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}(\sigma_p - \sigma_q)\right]} - \frac{\sin[12(\sigma_p + \sigma_q)]}{\mathrm{tg}\left[\frac{1}{2}(\sigma_p + \sigma_q)\right]}\right]。 \tag{12}$$

现取 11 个分潮，其分潮角速度排列次序为

$$\sigma_{M_2},\ \sigma_{S_2},\ \sigma_{N_2},\ \sigma_{K_2},\ \sigma_{K_1},\ \sigma_{O_1},\ \sigma_{P_1},\ \sigma_{Q_1},\ \sigma_{M_4},\ \sigma_{MS_4},\ \sigma_{M_6},\ \sigma_0,$$

其中角速度下标用分潮记号表示，而 $\sigma_0 = 0$。现将上述角速度值代入(11)，则 $\boldsymbol{F}$ 部分元

素的数值如下：

$$\begin{bmatrix} 11.62739145 & 11.72267378 & 11.50496811 & 11.72264259 & \cdots \\ 11.72267378 & 12 & 11.49989101 & 12.01428354 & \cdots \\ 11.50496811 & 11.49989101 & 11.4386757 & 11.49205799 & \cdots \\ 11.72264259 & 12.01428354 & 11.49205799 & 12.02969186 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{13}$$

用 Crout 约化，矩阵 $\boldsymbol{F}$ 可分解为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{L}_f\boldsymbol{U}_f$$

其中 $\boldsymbol{L}_f$ 为下三角矩阵，而 $\boldsymbol{U}_f$ 为单位上三角矩阵。$\boldsymbol{L}_f$ 的对角元均为主元。如果对角元中有小的，那么 $\boldsymbol{L}_f^{-1}$ 作为逆矩阵则是大的，因而完全可能 $\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{U}_f^{-1}\boldsymbol{L}_f^{-1}$ 也是大的，所以 $\boldsymbol{F}$ 为病态。正如 Stewart[3] 所指出：对大多数矩阵来说，按 $\boldsymbol{L}$ 的对角元大小来研究矩阵是一种相当可靠的病态判别法。这种判别是相当充分的，反例是极少的。

我们对(13)进行约化，相应的下三角矩阵有如下形式：

$$\boldsymbol{L}_f=\begin{bmatrix} 11.62739145 & & & \boldsymbol{O} & \\ \vdots & 0.181263082 & & & \\ \vdots & \vdots & 0.000381562 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & -0.000010881 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{14}$$

从 $\boldsymbol{L}_f$ 的对角元大小可看出，当求 $\boldsymbol{L}_f^{-1}$ 时，第四个方程右端的误差被放大了差不多 10^5 倍。因此，$\boldsymbol{F}$ 是病态的。同样，对 $\boldsymbol{G}$，Crout 约化的结果也能说明 $\boldsymbol{G}$ 是病态的。

为克服矩阵病态，当然可增加观测值的个数，使有足够的长度保证正规方程组是可解的，如果实测资料满足 Rayleigh 准则[2]，则矩阵完全是良态的。然而，实际计算表明，对资料并不要求这样苛刻。通常只要有一定的长度或用某些技巧消除矩阵的病态，如此求得有一定精确度的解，往往即可实际应用(如一个月或数周日，甚至一个周日的分析)。

在[1]中，我们曾给出约束条件下的最小二乘解，并且构造了一个变换矩阵使线性方程组降阶，这样最后消除了病态。其实带有 Lagrange 乘子的约束条件作为线性关系可理解为分潮的变量 x 和 y 之间的代入。而通过矩阵变换后原方程组降阶，实际是把二相近分潮角速度对应的方程组合起来，并以约束条件作为新的关系加以引入。这是极为有效的用以消除病态的办法。例如对若干周日的观测值，无论观测时间怎样选取，只要应用上述方法，矩阵病态都能得到改善和消除，事后的验算证明这一算法效果很好，在实用上满足了对精度的要求。

当然要取得好的计算结果，除了方程组系数矩阵的条件外，还要求右端项有较小的误差。正如[3]中所述，方程组的误差与逆矩阵及右端向量的扰动有关，这种扰动在潮汐分析中，就是指观测值质量决定的非潮汐的影响。一般如果观测时间不够长，并在潮汐现象很微弱、潮差几乎和随机的离差同一个数量级的情况下，分析的方法再好也是不可能计算出可靠的结果的。

关于消除正规方程组病态的问题，现介绍另一种基于罚方法的技巧。[1]中约束条件下的正规方程组为

$$
\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ O \end{bmatrix}。 \tag{15}
$$

考虑到约束条件 $BZ = O$ 是由两两成对的分潮间的恒等式组成，不过其中用到主港调和常数的振幅比和位相差，因而这些恒等式本身就是近似的，带有误差。为此，我们适当选用一个小量 ε，并取单位矩阵 I，用 $BZ - \varepsilon I\Lambda = O$ 替代 $BZ = O$。于是(15)式即为

$$
\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -\varepsilon I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ O \end{bmatrix} \tag{16}
$$

由(16)可得

$$
(A + \varepsilon^{-1}B^TB)Z = P \tag{17}
$$

其中

$$
B^TB = \left[\begin{array}{cccccccccc}
D_1^2 & & & & \overbrace{0\cdots0}^{Q-2b+1} & D_1E_1 & & & & \overbrace{0\cdots0}^{Q-2b} \\
 & D_2^2 & O & & 0\cdots0 & & D_2E_2 & O & & 0\cdots0 \\
O & & \ddots & & \vdots\cdots\vdots & O & & \ddots & & \vdots\cdots\vdots \\
 & & & D_b^2 & 0\cdots0 & & & & D_bE_b & 0\cdots0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots0 \\
E_1D_1 & & & & 0\cdots0 & E_1^2 & & & & 0\cdots0 \\
 & E_2D_2 & O & & 0\cdots0 & & E_2^2 & O & & 0\cdots0 \\
O & & \ddots & & \vdots\cdots\vdots & O & & \ddots & & \vdots\cdots\vdots \\
 & & & E_bD_b & 0\cdots0 & & & & E_b^2 & 0\cdots0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} Q-2b+1 \\ \\ \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} Q-2b
\end{array} \tag{18}
$$

式中 D_i，$E_i(i = 1, 2, \cdots, b)$ 为[1]中引入的分潮间 x 和 y 的变换矩阵。如果根据经验适当选取 ε，则矩阵 $(A + \varepsilon^{-1}B^TB)$ 具有良好的性质。从(18)的非 O 元素的分布，可以看出原有矩阵 A 只是在其四个块矩阵的三对角上加上了新的量，尽管 A 病态，但在相应于非常接近的两个分潮角速度的方程当中处于对角元的矩阵元素被修正后，矩阵性质完全可能得到改善，因而只要使用得当，这样的新方程组就是可解的。在实际应用中，需要作些试验，并进行比较。

三、结束语

对于潮汐不连续资料的分析，我们提出了一些具体而有用的算法，特别涉及克服正规方程组的病态问题，除了[1]中的方法，我们又提供了另一种技巧。然而，在实际应用中，我们事先要求观测值的质量要高，而事后再进一步验算均方差，这就能使精度更有保证。如要预报，必须认真考虑水位的季节订正或余流的变化。

参 考 文 献

[1] 成安生，1975。潮汐调和分析的算法。科学通报 **11**: 524—528。
[2] Godin, W., 1972. The Analysis of Tides. University of Toronto Press. pp. 113—115.
[3] Stewart. G. W., 1973. Introduction to Matrix Computions. Academic Press, INC. pp. 192—199.

ON THE ALGORITHMS FOR THE ANALYSIS OF TIDAL DISCONTINUOUS RECORDS

Cheng Ansheng and Gao Yiqian

(Shanghai Institute of Computing Technology)

Abstract

The algorithms for the analysis of tidal discontinuous records may be found in the references [1] and [2]. In this paper, a common system of linear equations about tidal continuous and discontinuous records is derived. If the spans of time between every two adjacent segments of records are distributed symmetrically, the matrix of the normal equations can be reduced to two independent matrices, which accords with the result from analysing continuous records. On the other hand, the normal equations for continuous records are considered as a special result due to discontinuous records.

The Rayleigh criteria may be chosen so that the system of linear equations possesses the solvability. However, it is a harsh criteria. In fact, we can use the algorithms given in the reference [1] to overcome the ill-condition of the systems for many records segments without satisfying the Rayleigh criteria. It is effective to analyse any number of 25-hour segments by applying the above algorithms. In this paper, we discuss the solution if the system and present another technique in eliminating the ill-condition of the normal equations.