

二维浅水环流问题的一个有限元模型*

于天常

(中国科学院海洋研究所)

许多学者早已把有限差分方法应用于二维浅水环流问题的计算上,其中有代表性的是 Dronkers 和 Leendertse^[2,3]。这一方法存在着网格不能弯曲,适应性差和边界条件难于满足的缺点。

自1973年有限元方法开始应用于解二维浅水环流方程^[3]以来,为了能模拟准确和得到一个稳定的解,学者们研究了各式各样的数字模型,著名的有 Norton^[9]和 King^[6], Wang和 Connor^[1], Taylor和 Lynch^[7]。但是 Weare^[10] 1976年指出对非定常问题有限元方法比有限差分方法用的计算时间更长。这一缺点导致空间的结点数不能太多。

Gray于1977年发展了一个新的模型^[4],使用四边形九结点二次等参数有限元,使模型是显式的,不需要解很费计算时间的矩阵。Gray和Lynch于1979年又提出一个半隐半显的模型^[5],改进了[9]中的结果。这两个模型都使用三层空间的蛙跃格式。结果显示:三角形单元存在着小的振荡,四边形单元不产生振荡,似乎四边形元比三角形元更好。

本文提出一个显式模型,主要特点是将连续性方程中的因变数——水位H的泰勒级数展开式取到二阶项,使用Lagrangian二次等参数有限元和Simpson积分公式。这一特定的单元型式和积分公式相联合,使系数矩阵变为对角矩阵,边界法向用[9]中的方法决定,对于任意形状的边界都适用,不需要边界线光滑连续。

本文给出三个计算实例,两个与理论结果相比较,一个与现场观测结果相比较,都符合得很好,不产生短波振荡。应用于边界反射影响大的海区,本模型的效果特别明显。

一、控制方程

连续性方程

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^m \delta(\bar{r} - \bar{r}_{\alpha}) \quad (1)$$

x-动量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uU) + \frac{\partial}{\partial y}(vU) = -\rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial x} + fV \\ + \tau_x^i - \tau_x^b + \sum_{\alpha} Q_{\alpha}^m \delta(\bar{r} - \bar{r}_{\alpha}) \end{aligned} \quad (2)$$

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第949号。
收稿日期: 1983年1月31日。

y -动量方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uV) + \frac{\partial}{\partial y}(vV) = -\rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial y} - fU + \tau_y^s - \tau_y^b + \sum_a Q_a^y \delta(\bar{r} - \bar{r}_a) \quad (3)$$

式中 x, y, z 是笛卡尔坐标系, xy 平面与平均海平面重合, x 指向东、 y 指向北、 z 轴向上为正。 ζ 为海面离开平均海平面的高度; $H = h + \zeta$ 为海底到海面的高度, h 是自平均海平面起算的深度, 为已知; U, V 分别为 x, y 方向上的体积流量; $(u, v) = \left(\frac{U}{H}, \frac{V}{H}\right)$ 为 x, y 方向上的平均速度; ρ 为海水的密度; $\bar{V} = u\bar{i} + v\bar{j}$, \bar{i}, \bar{j} 是 x, y 方向上的单位矢量; $\tau^s = (\tau_x^s, \tau_y^s)$ 为表面切应力; $\tau^b = (\tau_x^b, \tau_y^b)$ 为底面摩擦力; $f = 2\omega \sin \varphi$ 柯氏参数, φ 是纬度; g 为重力加速度; t 为时间; $\delta(\bar{r} - \bar{r}_a)$ 为 Dirac, Delta 函数; Q_a^m 为河流入海的流量; Q_a^x, Q_a^y 为河流入海在 x, y 方向上的动量。

初始条件:

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, 0) &= 0 \\ V(x, y, 0) &= 0 \\ \zeta(x, y, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \text{陆界上法向速度 } \bar{V}_n &= 0 \\ \text{水界上 } \zeta &= \zeta(t) \text{ 给定} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

表面应力

$$\tau^s = \rho_{\text{air}} D |W| W \quad (6)$$

ρ_{air} ——空气密度; W ——风速。

系数

$$D = (1.1 + 0.0536W) \times 10^{-3} \quad (7)$$

底部摩擦力:

$$\tau_x^b = \frac{n^2}{H^{\frac{1}{3}}} \rho g \frac{U(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{H^2} \quad (8)$$

$$\tau_y^b = \frac{n^2}{H^{\frac{1}{3}}} \rho g \frac{V(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}}}{H^2} \quad (9)$$

n 是 Manning 系数。

二、模型公式

首先将控制方程在时间域上变成显式的前差商格式, 将连续性方程展成二阶泰勒级数。

$$\begin{aligned} H^{n+1} &= H^n - \Delta t \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^n - \frac{1}{2} \Delta t^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial t} \right\}^n \\ &\quad + \Delta t \cdot \sum_a Q_a^m \cdot \delta(\bar{r} - \bar{r}_a) \end{aligned} \quad (10)$$

$$U^{n+1} = U^n - \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x}(uU) + \frac{\partial}{\partial y}(vU) \right]^n + \Delta t B_x^n \quad (11)$$

$$V^{n+1} = V^n - \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x} (uV) + \frac{\partial}{\partial y} (vV) \right]^n + \Delta t B_y^n \quad (12)$$

式中

$$B_x = \tau_x^i - \tau_x^b - \rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial x} + fV + \sum_a Q_a^x \delta(\bar{r} - \bar{r}_a) \quad (13)$$

$$B_y = \tau_y^i - \tau_y^b - \rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial y} - fU + \sum_a Q_a^y \delta(\bar{r} - \bar{r}_a) \quad (14)$$

Δt : 时间步长; $()^n = t^n$ 时刻的值。

其次, 在空间域上离散成四边形九结等参数元。对局部坐标 ξ, η

$$x = \sum_{i=1}^9 x_i N_i(\xi, \eta) \quad (15)$$

$$y = \sum_{i=1}^9 y_i N_i(\xi, \eta) \quad (16)$$

$$\zeta = \sum_{i=1}^9 \zeta_i(t) N_i(\xi, \eta) \quad (17)$$

$$U = \sum_{i=1}^9 U_i(t) N_i(\xi, \eta) \quad (18)$$

$$V = \sum_{i=1}^9 V_i(t) N_i(\xi, \eta) \quad (19)$$

N_i 为 Lagrange 插值函数。

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} (\xi \cdot \xi_i + \xi^2) \cdot (\eta \cdot \eta_i + \eta^2) / 4 & \text{当 } (\xi_i, \eta_i) = (\pm 1, \pm 1) \\ (\xi \cdot \xi_i + \xi^2) \cdot (1 - \eta^2) / 2 & \text{当 } (\xi_i, \eta_i) = (\pm 1, 0) \\ (\eta \cdot \eta_i + \eta^2) \cdot (1 - \xi^2) / 2 & \text{当 } (\xi_i, \eta_i) = (0, \pm 1) \\ (1 - \xi^2) \cdot (1 - \eta^2) & \text{当 } (\xi_i, \eta_i) = (0, 0) \end{cases} \quad (20)$$

(x_i, y_i) 是局部结点 i 上的整体坐标。

应用 Galerkin 方法, (10)–(12) 变为

$$\int_R N_i H^{n+1} dR = \int_R H^n N_i dR - \Delta t \int_R N_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^n dR - \frac{1}{2} \Delta t^2 \cdot \int_R N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial t} \right]^n dR \Delta t \int_R N_i \sum_a Q_a^m \delta(\bar{r} - \bar{r}_a) dR \quad (21)$$

$$\int_R N_i U^{n+1} dR = \int_R N_i U^n dR - \Delta t \int_R N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} (uU) + \frac{\partial}{\partial y} (vV) - B_x \right]^n dR \quad (22)$$

$$\int_R N_i V^{n+1} dR = \int_R N_i V^n dR - \Delta t \int_R N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} (uV) + \frac{\partial}{\partial y} (vV) - B_y \right]^n dR \quad (23)$$

利用 Green 定理加上边界条件, 并代入 (2), (3), (21) 式变为

$$\begin{aligned} \int N_i H^{n+1} dR = & \int_R N_i H^n dR - \Delta t \int_R N_i \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^n dR + \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ & \cdot \int_R \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[-\frac{\partial}{\partial x} (uU) - \frac{\partial}{\partial y} vU + B_x \right] \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left[-\frac{\partial}{\partial x} (uV) - \frac{\partial}{\partial y} (vV) + B_y \right] \right\}^n dR \end{aligned}$$

$$+ \Delta t \int_R N_i \sum_a Q_a^* \delta(\bar{r} - \bar{r}_a) dR \quad (24)$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_{\min}}{\sqrt{2gh_{\max}}} \quad (25)$$

三、应用实例

例1 将方程(1)–(3)简化成

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \nabla \cdot \bar{v} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + g \nabla \zeta + \tau \bar{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

域是等深矩形,域及单元示于图1。

边界条件:

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad 0 \leq y \leq A \quad \zeta(t) &= \zeta_0 \cos \omega t \\ x=L, \quad 0 \leq y \leq A \quad u(t) &= 0 \\ y=0 \text{ 及 } y=A \quad 0 \leq x \leq L \quad v(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

初始条件:

$$t=0, \quad \zeta=0, \quad \bar{v}=0 \quad (28)$$

$\zeta_0 = 10\text{cm}$; $\omega = 1.4544 \times 10^{-4}/\text{s}$, 相当于一个半日潮; $L = 8.723 \times 10^7\text{cm}$; $A = 1.586 \times 10^7\text{cm}$; $H = 2 \times 10^3\text{cm}$; 线性阻力系数 $\tau = 5 \times 10^{-5}/\text{s}$ 。

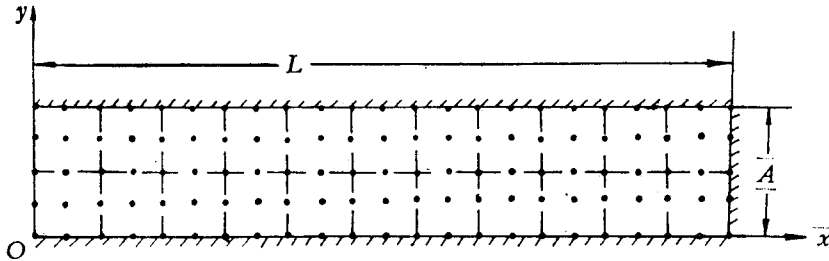


图1 矩形域单元分布

等深矩形域时这个方程的解析解为

$$\left. \begin{aligned} \zeta(x, y, t) &= R_e \left\{ \zeta_0 \frac{\cos \beta(L-x)}{\cos \beta L} e^{j\omega t} \right\} \\ u(x, y, t) &= R_e \left\{ \frac{j\omega \zeta_0}{\beta H} \cdot \frac{\sin \beta(L-x)}{\cos \beta L} e^{j\omega t} \right\} \\ v(x, y, t) &= 0 \\ \beta^2 &= \frac{1}{gH} (\omega^2 - j\omega\tau), \quad j = \sqrt{-1} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

这种等深的矩形域,存在着摩擦损耗,比较容易模拟。计算结果:整个域里 $v=0$ 。 ζ, u 在 y 方向上都是一致的,不产生小的振荡。图2,3 给出 ζ, u 振幅理论值与计算值的

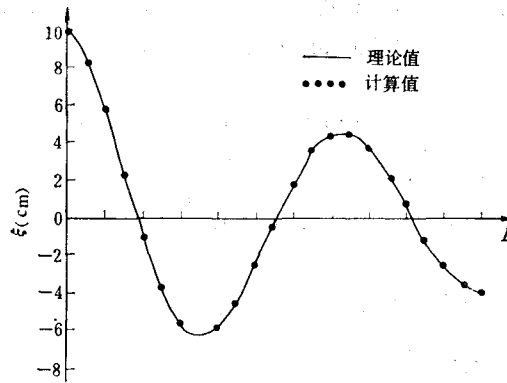


图2 水位理论值与计算值比较

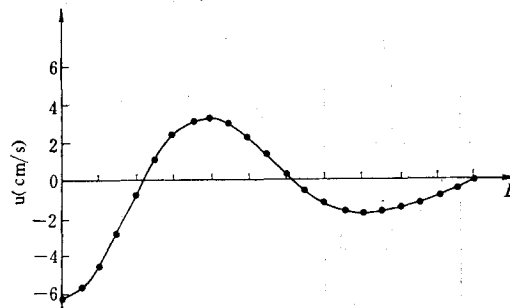


图3 速度理论值与计算值比较

比较。连续性方程中,取或不取二阶项,计算结果看不出什么差别。

例2 将方程(1)–(3)简化成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \nabla \cdot \bar{v} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + g \nabla \zeta &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

空间域也是等深的直渠,型式与图1同,只是尺寸大小不同。边界条件和初始条件分别与(27),(28)相同。 $L = 200\text{m}$; $A = 120\text{m}$; $H = 4\text{m}$; $\zeta_0 = 1\text{cm}$; $T = 600\text{s}$ 。

(30)式的精确解为

$$\left. \begin{aligned} \zeta(x, y, t) &= \zeta_0 \cos \frac{\omega}{\sqrt{gH}} (L - x) \cos \omega t / \cos \frac{\omega}{\sqrt{gH}} L \\ u(x, y, t) &= -\zeta_0 \sqrt{\frac{g}{H}} \frac{\sin \frac{\omega}{\sqrt{gH}} (L - x)}{\cos \frac{\omega}{\sqrt{gH}} L} \sin \omega t \\ v(x, y, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

这个解是由入射波和反射波叠加而成的驻波。方程中既无底摩擦项,也无粘性项,能量全部反射回来;驻点在域的两端之外。这种反射影响强的问题是数字模拟的一种困难

问题,因为它极难稳定。解决它的一种办法是对因变数进行泰勒级数展开,取的阶数愈高愈好。应用有限元方法,结合二次 Lagrange 插值函数,使我们可以取到二阶项,比通常高一阶。

$$\left. \begin{aligned} \zeta^{n+1} &= \zeta^n + \Delta t \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right)^n \\ &= \zeta^n - \Delta t H(\nabla \cdot \bar{V})^n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 g H(\nabla^2 \zeta)^n \\ V^{n+1} &= V^n - \Delta t g(\nabla \zeta)^n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 g H(\nabla^2 \bar{V})^n \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

将全域分为 10 个单元, 55 个结点。

用这一方法处理后,稳定性很好。全域上 $v = 0$, 在 y 方向上各点的 ζ, u 值相同。水位最大误差小于 1%, 速度最大误差为 5%。结果列于表 1, 2。

表 1 水位理论值与计算值比较

结点号 $\left(\frac{L}{11}\right)$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
理论值		1.0000	1.0111	1.0210	1.0298	1.0374	1.0439	1.0492	1.0533	1.0563	1.0580	1.0586
计算值	4T 时	1.0000	1.0124	1.0244	1.0339	1.0436	1.0503	1.0573	1.0611	1.0653	1.0665	1.0680
	4½T 时 (绝对值)	1.0000	1.0113	1.0230	1.0317	1.0412	1.0475	1.0545	1.0583	1.0626	1.0638	1.0654
最大误差			1‰	3‰	4‰	6‰	6‰	8‰	8‰	9‰	7‰	9‰

表 2 速度理论值与计算值比较

结点号 $\left(\frac{L}{11}\right)$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
理论值		0.544	0.491	0.438	0.384	0.330	0.275	0.221	0.166	0.111	0.055	0
计算值	4¼T 时 (绝对值)	0.531	0.512	0.434	0.401	0.337	0.288	0.223	0.173	0.112	0.058	0
	4¾T 时	0.533	0.514	0.436	0.402	0.332	0.289	0.224	0.174	0.113	0.058	0
	5¼T 时 (绝对值)	0.525	0.506	0.428	0.395	0.326	0.383	0.219	0.170	0.110	0.057	0
最大误差		3%	5%	2%	5%	1%	5%	1%	5%	2%	5%	

例 3 一个小的不规则港湾里的流动

香港的吐露港是一个狭长海湾, 最长只有 16 km。水深从 2.8 m 到 20 m。岸线弯弯曲曲, 要认真确定岸线法向。将全域分成 27 个单元, 151 个结点(见图 4)。

水界处是振幅为 1.7m 的半日潮; 时间步长 $\Delta t = 5s$; Manning 系数 $n = 0.04$ 。

$t = 0.5T, 1.5T, 2.5T$ 三个时刻的计算结果的差别均小于 1%, 也就是说在 $t = 0.5T$

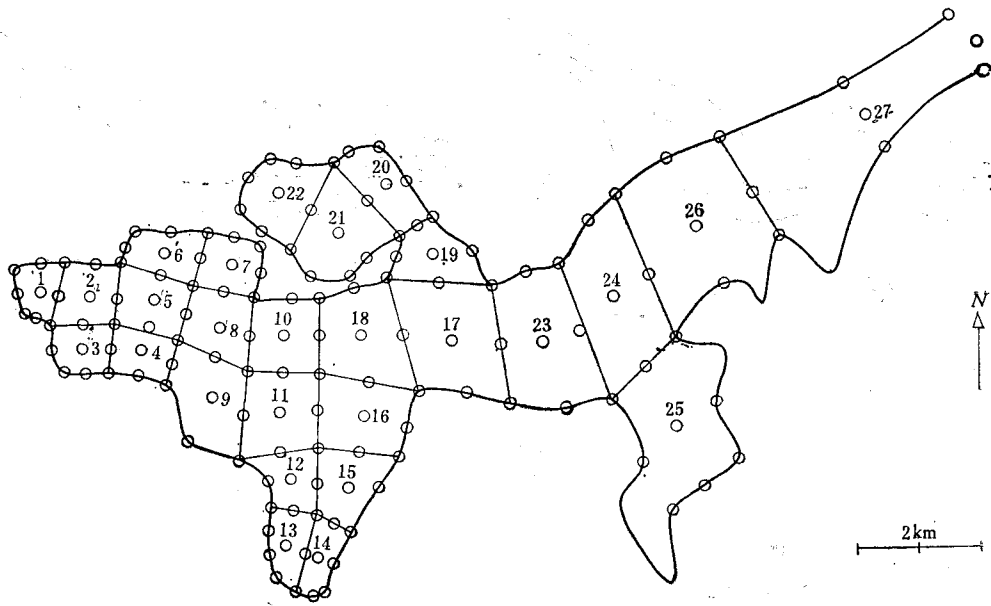


图 4 有限单元格式

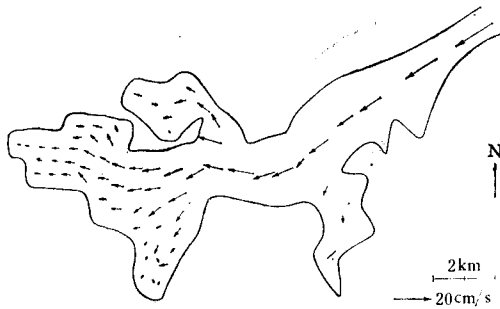


图 5 $\frac{1}{4}T$ 时的计算流场

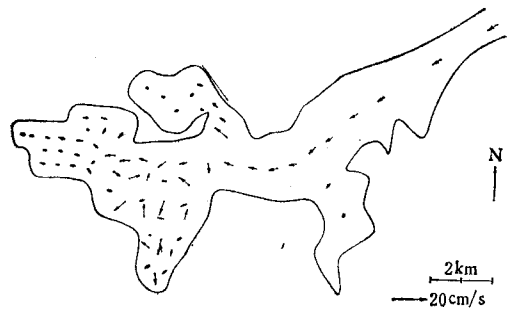


图 6 $\frac{1}{2}T$ 时的计算流场

时的流场已达到稳定。水位场和速度场都没产生振荡。相当于水界处 $\frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T$ 和 $1T$ 的速度场分别示于图 5—8, 水位示于图 9。均与现场观测符合良好。

我们也做了不取二阶项的试验, 计算结果稳定不了。

边界条件法向速度为零, 首先要确定边界的法向。如图 10 所示, A, B, D, E 点处曲线连续, 法向是唯一的, 容易确定。 C 点的法向不是唯一的, 由下式决定。

设 C 点法向与 x 轴的夹角为 θ

$$\cos\theta = \frac{\int_R \frac{\partial N_c}{\partial x} dA}{\left[\left(\int_R \frac{\partial N_c}{\partial x} dA \right)^2 + \left(\int_R \frac{\partial N_c}{\partial y} dA \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (33)$$

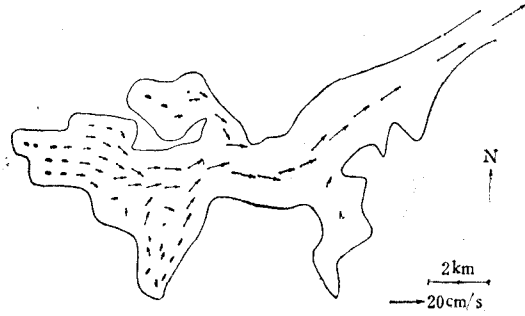


图7 $\frac{3}{4}T$ 时的计算流场

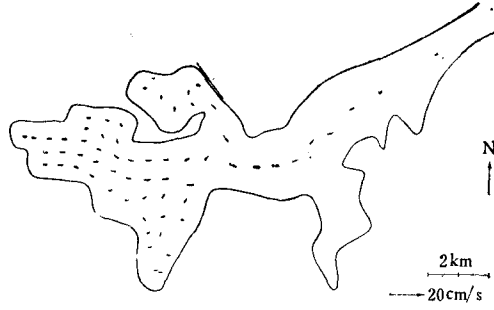


图8 $1T$ 时的计算流场

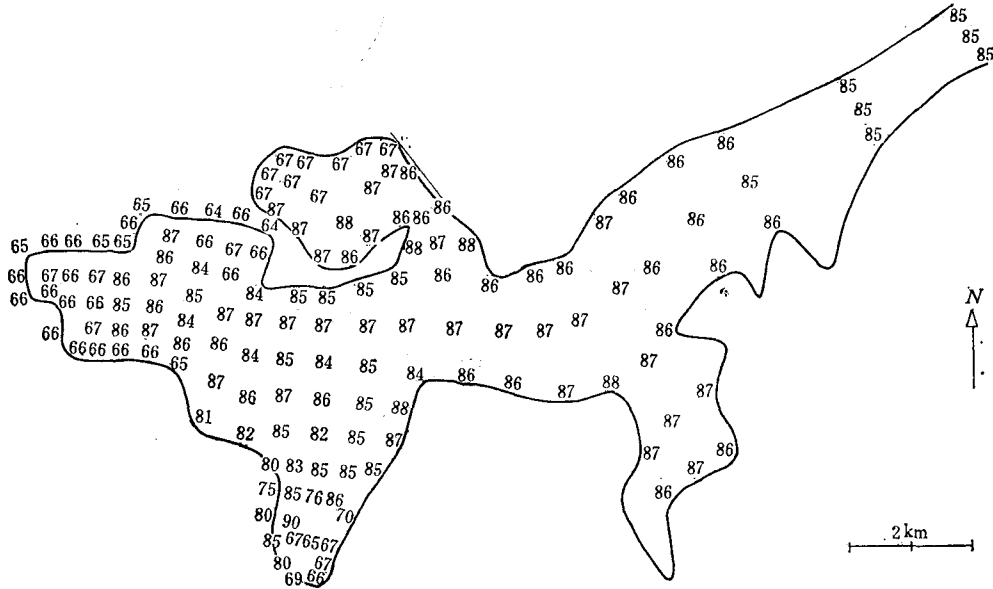


图9 水界处低潮后 $\frac{1}{2}T$ 时刻的计算潮位场 (cm)

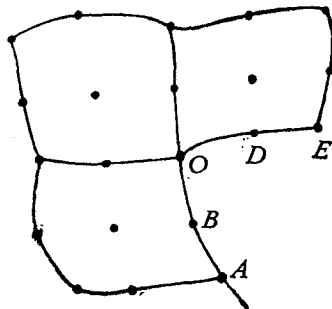


图10 边界C点所含的单元

$$\sin \theta = \frac{\int_R \frac{\partial N_c}{\partial y} dA}{\left[\left(\int_R \frac{\partial N_c}{\partial y} dA \right)^2 + \left(\int_R \frac{\partial N_c}{\partial x} dA \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (34)$$

(详细推导见文献 [9])。式中 R 是与 C 点有关的三个单元的区域。

参 考 文 献

- [1] Connor, J. J. and J. D. Wang, 1974. Finite element modelling of hydrodynamic circulation. *Numerical Method in Fluid Dynamics*.
- [2] Dronkers, J. J., 1964. *Tidal Computations*. North Holland, Amsterdam.
- [3] Grotkop, G., 1973. Finite element analysis of long period water waves. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.* 2: 147.
- [4] Gray, W. G., 1977. An efficient finite element scheme for two-dimensional surface water computation. *Finite Elements in Water Resources*.
- [5] Gray, W. G. and D. R. Lynch, 1979. On the control of noise in finite element tidal computation: a semi-implicit approach. *Comp. and Fluids* 7: 47.
- [6] King, I. P., W. R. Norton and K. R. Iceman, 1975. A Finite element solution for two-dimensional stratified flow problems. *Finite Element in Fluid* Vol. 1.
- [7] Taylor, C. and J. M. Davis, 1975. Tidal and long-wave propagation: a finite element approach. *Comp. and Fluids* 3: 125.
- [8] Leendertse, J. J., 1967. Aspects of a computational model for long period water wave propagation. RAND Memorandum, RM-5294-PR.
- [9] Norton, W. R., I. P. King and G. T. Orlop, 1973. A Finite Element Model for Lower Grante Reservoir.
- [10] Weare, T. J., 1976. Finite element or finite difference methods for the two-dimensional shallow water equations. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.* 7: 351.

A FINITE ELEMENT MODELLING OF TWO-DIMENSIONAL SHALLOW WATER CIRCULATION*

Yu Tianchang

(Institute of oceanology, Academia Sinica)

ABSTRACT

Numerical solution of the two-dimensional shallow water equations is achieved by finite element method. In our development, the second order term of Taylor's series expansion is used for the continuity equation to eliminate the computational instability caused by wave reflection.

This model has been applied to three examples.

* Contribution No. 949 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.