

具有负跃层等深度浅海中的平均声强

唐应吾 肖金泉
(中国科学院声学研究所)

海水中的声速分布常存在如图1所示的负梯度跃变层(简称负跃层或跃变层)。负跃层对声传播具有“屏蔽”作用:即若声源放在负跃层之上的某点处,则在负跃层之下且离声源较远的任意点处的声强极为微弱,反之亦然。这种负跃层的“屏蔽”作用常为潜艇的活动所利用,所以具有重要的战术意义。因此,找出具有负跃层浅海中的平均声强随距离的下降规律,不仅在理论上很有意义,而且是密切联系实际的重要课题。

一、实际情况的简化

图1所示的声速分布,上面一层是声速为 c_2 的等速水层,其次是厚度可以忽略的一个薄水层,这个层的负声速梯度很大,声速变化非常剧烈,在这个层的下面是一个声速为 c_1 的等速层。为了处理方便,我们用一个简化的模型(如图2所示)来代替实际情况:将如图1所示的跃变层简化为如图2所示的两个等速层。下面按图2所示的声速分布来处理问题。

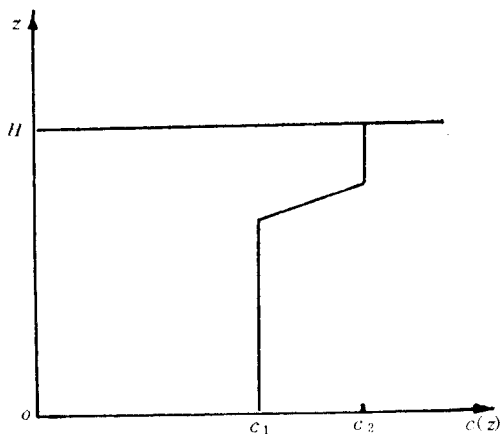


图1 声速随深度的分布

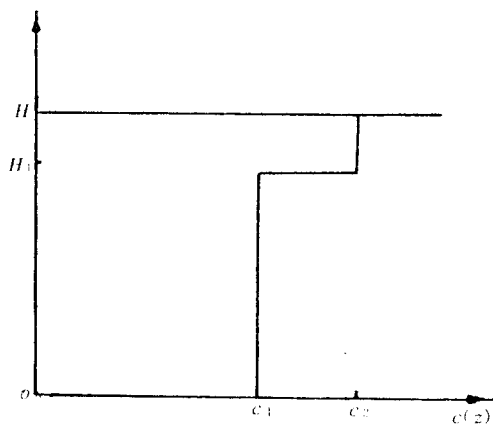


图2 声速剖面的简化模型

二、简正波的速度势

取坐标如图3。首先考虑声源在声速为 c_1 的下层内的情况。简谐点源的位置在 $(0, z_0)$ 处,接收器的位置在 (r, z) 处。若不考虑近场的特性,即在中场和远场范围内,简正

波速度势的场为^[3]：

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{H_1} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{i\frac{\pi}{4} - i\omega t} \times \left\{ \begin{aligned} & \sum_i \frac{[e^{-iq_1 z_0} + V_1 e^{iq_1 z_0}][e^{-iq_1 z} + V_1 e^{iq_1 z}] e^{i\mu_l r - \beta_l r}}{\left\{ 1 + \frac{iq_1}{2H_1 \nu_l} \left[\frac{1}{V_2} \left(\frac{dV_2}{d\nu} \right) + \frac{1}{V_1} \left(\frac{dV_1}{d\nu} \right) \right] \right\} \nu_l \cdot V_1 \cdot \nu_l^{1/2}}, & (D_1) \\ & \sum_i \frac{[e^{-iq_1 z_0} + V_1 e^{iq_1 z_0}][e^{-iq_2(H-z)} - e^{iq_2(H-z)}]}{\left\{ 1 + \frac{iq_1}{2H_1 \nu_l} \left[\frac{1}{V_2} \left(\frac{dV_2}{d\nu} \right) + \frac{1}{V_1} \left(\frac{dV_1}{d\nu} \right) \right] \right\} \nu_l} & (1) \\ & \times \frac{T_{21} e^{iq_1 H_1 + i\mu_l r - \beta_l r}}{\nu_l^{1/2} [e^{-iq_2 H_2} + R_{12} e^{iq_2 H_2}]}, & (D_2) \end{aligned} \right.$$

式中 $q_1 = \sqrt{k_1^2 - \nu_l^2}$; $q_2 = \sqrt{k_2^2 - \nu_l^2}$;

$$k_1 = \omega/c_1; k_2 = \omega/c_2; H = H_1 + H_2;$$

$$V_2 = \frac{R_{21} - e^{2iq_2 H_2}}{1 - R_{21} e^{2iq_2 H_2}}; R_{21} = \frac{q_1 - q_2}{q_1 + q_2}; T_{21} = \frac{2q_1}{q_1 + q_2};$$

$$D_1 \equiv (0 < z_0 < H_1, 0 < z < H_1);$$

$$D_2 \equiv (0 < z_0 < H_1, H_1 < z < H).$$

V_1 为平面波在海底上的反射系数, $\nu_l = \mu_l + i\beta_l$ 是极点方程

$$V_1 V_2 e^{2iq_1 H} = 1 \quad (2)$$

的第 l 个复根, β_l 为第 l 号简正波的衰减系数, ω 为声波的角频率。

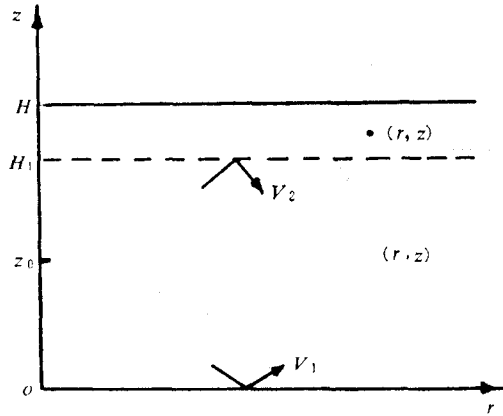


图 3 计算坐标示意图

在通常情况下, $dV_1/d\nu$, $dV_2/d\nu$ 和 $\frac{q_1}{2H_1 \nu}$ 都很小;同时,在小掠射角 α_l 的情况下, T_{21} 可在 $\alpha = 0$ 附近展开,有

$$T_{21} = 2\alpha_l/i \sqrt{1 - c_1^2/c_2^2}, \quad (3)$$

如此, (1) 式可以简写为:

$$\varphi(r, z) = \frac{\sqrt{\pi}}{H_1} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}-i\omega t}}{\sqrt{2r}} \sum_l e^{i\mu_l r - \beta_l r} \times \begin{cases} G(z_0, \nu_l) G(z, \nu_l), & (D_1) \\ 2G_1(z_0, \nu_l) G_2(z, \nu_l), & (D_2) \end{cases} \quad (4)$$

这里

$$G(z, \nu_l) = \frac{[e^{-iq_1 z} + V_1 e^{iq_1 z}]}{V_1^{1/2} \nu_l^{1/4}},$$

$$G_1(z_0, \nu_l) = \frac{[e^{-iq_1 z_0} + V_1 e^{iq_1 z_0}] e^{iq_1 H_1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\nu_l^{1/4} [e^{-iq_1 H_1} + R_{12} e^{iq_2 H_2}]^{1/2} (1 - c_1^2/c_2^2)^{1/4}},$$

$$G_2(z, \nu_l) = \frac{[e^{-iq_2(H-z)} - e^{iq_2(H-z)}] \alpha_1^{1/2} e^{iq_1 H_1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\nu_l^{1/4} [e^{-iq_2 H_2} + R_{12} e^{iq_2 H_2}]^{1/2} (1 - c_1^2/c_2^2)^{1/4}}.$$

再考虑声源和接收器都在负跃层之上的情况，这时坐标的原点应移至两个水层之间的界面上，而场的表达式应根据负跃层之上的等速层中的参数来表示：即在表达式 (4) 的第一式中的 H_1 和 q_1 换为 H_2 和 q_2 ，而 V_2 换为 -1 ， V_1 换为

$$V^* = \frac{R_{12} + V_1 e^{iq_1 H_1}}{1 + R_{12} V_1 e^{iq_1 H_1}}. \quad (5)$$

因而可以写出：

$$\varphi(r, z) = \frac{1}{H_1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2r}} e^{i\frac{\pi}{4}-i\omega t} \sum_l \Psi(z_0, \nu_l) \Psi(z, \nu_l) e^{i\mu_l r - \beta_l r}, \quad (6)$$

这里

$$\Psi(z, \nu_l) = \frac{e^{-iq_2 z} + V^* e^{iq_2 z}}{\nu_l^{1/4} V^{*1/2}}.$$

若声源在负跃层之上，而接收器在负跃层之下时，根据互易原理可知，在接收点处的声场可用式 (4) 中的第二项来计算。

三、简正波的衰减系数

第 l 号简正波的衰减系数 β_l 可以从

$$\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2} = \text{Re}(\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2}) + i \text{Im}(\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2})$$

中解出为：

$$\beta = -\mu_l^{-1} \text{Re}(\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2}) \text{Im}(\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2}), \quad (7)$$

其中 $\text{Re}(\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2})$ 和 $\text{Im}(\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2})$ 可由极点方程 (2) 来确定。方程 (2) 与下面的两个方程等效：

$$|V_1| |V_2| e^{-2H_1 \text{Im}(\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2})} = 1, \quad (8)$$

$$\arg(V_1) + \arg(V_2) + 2H_1 \text{Re}(\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2}) = 2(l-1)\pi. \quad (9)$$

从式 (8) 和 (9) 中可得：

$$\text{Im}(\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2}) = (2H_1)^{-1} \ln(|V_1| |V_2|), \quad (8')$$

$$\text{Re}(\sqrt{k_1^2 - \nu_l^2}) = (2H_1)^{-1} [2(l-1)\pi - \arg(V_1) - \arg(V_2)]. \quad (9')$$

为讨论方便，按 μ_l 的值将简正波分为两类：第 I 类简正波 ($k_2 < \mu_l < k_1$)；第 II 类简正波 ($\mu_l < k_2$ ，这类简正波也称为穿透波)。对于第 I 类简正波 $\arg(V_2)$ 为零。这时式 (9') 可近似写为：

$$\operatorname{Re}(\sqrt{k_1^2 - \nu_1^2}) \approx l\pi/H_{10} \quad (10)$$

到此,求 β_l 主要在求 μ_l . 显然,求 μ_l 的精确值是困难的,下面只给出其近似值。

因为 $\operatorname{Re}(\sqrt{k_1^2 - \nu_1^2})$ 和 $\operatorname{Im}(\sqrt{k_1^2 - \nu_1^2})$ 可以写为:

$$\operatorname{Re}(\sqrt{k_1^2 - \nu_1^2}) = (2)^{-1/2} [(k_1^2 - \mu_l^2) + \sqrt{(k_1^2 - \mu_l^2)^2 + 4\mu_l^2\beta_l^2}]^{1/2}, \quad (11)$$

$$\operatorname{Im}(\sqrt{k_1^2 - \nu_1^2}) = (2)^{-1/2} [(\mu_l^2 - k_1^2) + \sqrt{(k_1^2 - \mu_l^2)^2 + 4\mu_l^2\beta_l^2}]^{1/2}. \quad (12)$$

在通常情况下,强不等式 $(k_1^2 - \mu_l^2) \gg 2\mu_l\beta_l$ 总是成立的。如此,(11)式可近似地写为:

$$\operatorname{Re}(\sqrt{k_1^2 - \nu_1^2}) = (k_1^2 - \mu_l^2)^{1/2}. \quad (13)$$

由(10)式和(13)式,可以算出 μ_l 的近似表达式:

$$\mu_l = \sqrt{k_1^2 - (l\pi)^2/H_1^2}. \quad (14)$$

把式(8'),(10)和(14)代入(7)式中,就可得出第 l 号简正波衰减系数的近似表达式:

$$\beta_l = -\frac{l\pi \ln(|V_1||V_2|)}{2H_1\sqrt{k_1^2H_1^2 - l^2\pi^2}}. \quad (15)$$

对于第 I 类简正波不等式 $k_1^2H_1^2 \gg l^2\pi^2$ 成立,故上式可进一步简化为

$$\beta_l = -\frac{l\pi \ln(|V_1| \cdot |V_2|)}{2k_1H_1^2}. \quad (16)$$

若令 $\mu_l = k_1 \cos \alpha_l$ 代入(10)式,可得:

$$\alpha_l \approx l\pi/k_1H_{10} \quad (17)$$

再注意到跨度 S_l 与 α_l 的关系:

$$S_l = 2H_1/\alpha_l, \quad (18)$$

以及 $|V_2| = 1$, 则(16)式变为

$$\beta_l = -\frac{\ln|V_1|}{S_l}. \quad (19)$$

如果利用布列霍夫斯基赫的单参量模型来描述海底,则有^[1]:

$$|V_1| = e^{-2P\alpha}, \quad (20)$$

式中 α 为平面波在海底上的掠射角; P 为 $m/\sqrt{n^2 - 1}$ 的实部, m 为海底密度对海水密度的比值; n 为海水中的声速对海底中的声速的比值。将(20)代入(19)式中,得

$$\beta_l = \frac{l^2P\pi^2}{k_1^2H_1^3}. \quad (19')$$

对于第 II 类简正波有:

$$l \geq l_1 \equiv \left[\frac{(k_1^2 - k_2^2)^{1/2}H_1}{\pi} \right]_{\text{整数部分}}. \quad (21)$$

同时相角 $\arg(V_2) = 2\sqrt{k_2^2 - \mu_l^2}H_2$ 显得重要,不能忽略;如果在负跃层浅海中 $H_1 \gg H_2$, 则可忽略。这时第 II 类简正波的 β_l 可以近似地用公式(15)来计算,但其中的 H_1 要换为 H , 而 $|V_1| = |V_{1b}|$ 是一个与掠射角近似无关的常数,即 $|V_{1b}| = e^{-2Pl_1\pi/k_1H}$, $|V_2| = 1$.

如果 $H_1 \gg H_2$ 不成立,(15)式则不适用。这时,必须考虑 $\arg(V_2)$ 的贡献,而第 II 类简正波的衰减系数可求得为:

$$\beta_l \approx \frac{-\ln |V_{1b}|}{\frac{2H_1}{\sqrt{2(1-c_1^2/c_2^2) + l'^2\pi^2/k_1^2H_1^2}} + \frac{2k_2H_2^2}{l'\pi}} \quad (22)$$

式中 $l' = l - l_1 + 1$ 。

四、声源在负跃层之下时的平均声强

声强正比于 $|\varphi|^2$ ，故求平均声强的关键在于求均方值 $\overline{|\varphi|^2}$ 。现将 $|\varphi|^2$ 在等速水层的厚度范围内对发射深度与接收深度进行平均。为便于讨论，设 $H_1 \gg H_2$ ，并略去相干项，有：

$$\overline{|\varphi|^2} = \frac{\pi}{2H_1^2r} \sum_{l=1}^{\infty} \overline{|G(z_0, \nu_l)|^2} \cdot \overline{|G(z, \nu_l)|^2} e^{-2\beta_l r}, \quad (D_1) \quad (23)$$

$$\overline{|\varphi|^2} = \frac{2\pi}{H_1^2r} \sum_{l=l_1}^{\infty} \overline{|G_1(z_0, \nu_l)|^2} \cdot \overline{|G_2(z, \nu_l)|^2} e^{-2\beta_l r}, \quad (D_2) \quad (24)$$

这里

$$\overline{|G(z, \nu_l)|^2} = \frac{1}{H_1} \int_0^{H_1} |G(z, \nu_l)|^2 dz \approx \frac{1 + |V_1|^2}{\nu_l'^2 |V_1|} \approx \frac{1 + 1}{k_1'^2} = \frac{2}{k_1'^2},$$

$$\begin{aligned} \overline{|G_1(z_0, \nu_l)|^2} &= \frac{1}{H_1} \int_0^{H_1} |G_1(z_0, \nu_l)|^2 dz \\ &\approx \frac{(1 + |V_1|)l\pi}{H_1 k_1'^2 (1 - c_1^2/c_2^2)^{1/2}} = \frac{2l\pi}{H_1 k_1'^2 (1 - c_1^2/c_2^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

$$\overline{|G_2(z, \nu_l)|^2} = \frac{1}{H_2} \int_{H_1}^H |G_2(z, \nu_l)|^2 dz \approx \frac{2l\pi}{H_1 k_1'^2 (1 - c_1^2/c_2^2)^{1/2}}.$$

(23) 式与 (24) 式中的求和已将 l 扩展到 $l = \infty$ ，这种作法的合理性是在于不考虑近场的特性。(23) 与 (24) 也可改写为：

$$\overline{|\varphi|^2} = \frac{2\pi}{k_1 H_1^2 r} \left[\sum_{l=1}^{l_1} e^{-2\beta_l r} + \sum_{l=l_1+1}^{\infty} e^{-2\beta_l r} \right], \quad (D_1) \quad (25)$$

$$\overline{|\varphi|^2} = \frac{8\pi}{k_1^3 H_1^3 (1 - c_1^2/c_2^2) r} \sum_{l=l_1+1}^{\infty} l^2 e^{-2\beta_l r}, \quad (D_2) \quad (26)$$

利用 Euler 求和公式，从 (25) 与 (26) 两式中可求得：

$$\begin{aligned} \overline{|\varphi|^2} &= \frac{2\pi}{k_1 H_1^2 r} \left[\int_0^{l_1} \exp \left\{ -2P \left(\frac{l\pi}{k_1 H_1} \right)^2 \frac{r}{H} \right\} dl + \int_{l_1}^{\infty} e^{-2\beta l r} dl \right] \\ &\approx \frac{2\pi}{\sqrt{H_1} r} \left[\frac{1}{2 \sqrt{2\pi P r}} \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{2\pi^2 P r}{k_1^2 H_1^3}} l_1 \right) - \frac{\sqrt{H_1}}{\pi r} \frac{e^{-2\beta l_1 r}}{\ln |V_{1b}|} \right], \quad (D_1) \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{|\varphi|^2} &= \frac{8H^6 (-\ln |V_{1b}|)^{-3}}{r^4 H_1^4 \pi^2 (1 - c_1^2/c_2^2)} e^{-2\beta l_1 r} \left[l_1^2 \left(-\frac{\pi r \ln |V_{1b}|}{k_1 H^2} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{l_1 \pi r \ln |V_{1b}|}{k_1 H^2} \right)^2 + 2l_1 \frac{\pi r (-\ln |V_{1b}|)}{k_1 H^2} + 2 \right], \quad (D_2) \quad (28) \end{aligned}$$

以上

$$\bar{\beta}_{l_1} = \frac{(l_1\pi)^2 P}{k_1^2 H^3}, \quad \beta = -\frac{\pi \ln |V_{1b}|}{2k_1 H^2}, \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

公式 (27) 是下发下收的声强表达式; (28) 则是下发上收 (或上发下收) 的声强表达式。

五、声源在跃变层之上时的平均声强

当声源在跃变层之上时, 根据互易原理可知, 在跃变层之下的声强可按公式 (28) 来计算。

当声源和接收器都在跃变层之上时, 则其平均声强可表示为:

$$\overline{|\varphi|^2} = \frac{\pi}{2H_2^2 r} \sum_{l=l_1+1}^{\infty} \overline{|\Psi(z_0, \nu_l)|^2} \overline{|\Psi(z, \nu_l)|^2} e^{-2\beta_l r}, \quad (29)$$

这里

$$\overline{|\Psi(z, \nu_l)|^2} = \frac{1}{H} \int_0^H |\Psi(z, \nu_l)|^2 dz \approx \frac{1 + |V^*|}{\nu_l^{1/2} |V^*|} \approx \frac{2}{k_2^{1/2}}.$$

因此, 式 (29) 可写为:

$$\overline{|\varphi|^2} = \frac{2\pi}{k_2 H_2^2 r} \sum_{l=l_1+1}^{\infty} e^{-2\beta_l r}, \quad (30)$$

这里的 β_l 就是第 II 类简正波的衰减系数。仿前, 利用求积代替求和来计算 (30) 式, 得

$$\overline{|\varphi|^2} = \frac{2H^2 k_1}{H_2^2 r^2 (-\ln |V_{1b}|) k_2} e^{-2\bar{\beta}_{l_1} r}. \quad (31)$$

这表明, 当声源和接收器在跃变层之上时, 声强随距离的下降按“球面指数规律”进行。

六、声场结构

从 (27) 与 (28) 两式中可以看出, 具有负跃层浅海中的声场有明显的结构, 且随着距离的增大而变得更加明显。下面分三种情况来讨论。

1. 声源在负跃层之下的情况

将 (27) 式除以 (28) 式, 得比值 $K(r)$ 为

$$\begin{aligned} K(r) = E r^3 e^{-2\bar{\beta}_{l_1} r} & \left[\frac{1}{2\sqrt{2\pi P r}} \text{erf} \left(\sqrt{\frac{2\pi^2 P r}{k_1^2 H_1^3}} l_1 \right) - \frac{\sqrt{H_1}}{\pi r} \frac{e^{-2\bar{\beta}_{l_1} r}}{\ln |V_{1b}|} \right] \\ & \times \left[l_1^2 \left(-\frac{\pi r \ln |V_{1b}|}{k_1 H^2} \right)^3 + \left(-\frac{l_1 \pi r \ln |V_{1b}|}{k_1 H^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2l_1 \frac{\pi r (-\ln |V_{1b}|)}{k_1 H^2} + 2 \right]^{-1}, \quad (32) \end{aligned}$$

这里

$$E = \frac{\pi^3 (-\ln |V_{1b}|)^3 (1 - c_1^2/c_2^2) H_1^4}{4\sqrt{H_1} H^6}.$$

显见, $K(r)$ 随 r 的变化比较复杂, 总的趋势是随着 r 的增加而变大。

2. 声源在负跃层之上的情况

用 (31) 式除以 (28) 式, 得比值 $K_1(r)$ 为

$$K_1(r) = E_1 r^2 \left[2 + l_1 \left(\frac{\pi r \ln |V_{1b}|}{k_1 H^2} \right)^3 + \left(-\frac{l_1 \pi r \ln |V_{1b}|}{k_1 H^2} \right)^2 \right]$$

$$+ 2l_1 \frac{\pi r (-\ln |V_{1b}|)}{k_1 H^2} \Big]^{-1}, \quad (33)$$

其中 $E_1 = \frac{\pi^2}{4} (1 - c_1^2/c_2^2) \frac{H_1^4}{H_2^2 H^4} (-\ln |V_{1b}|)^2 k_1 k_2^{-1}$ 。

(33) 式显示着 $K_1(r)$ 随 r 的变化也比较复杂, 开始 $K_1(r)$ 随着 r 的增加而变大, 然后又随着 r 的增加而减小。

3. 水平结构

具有负跃层浅海的声场还具有明显的水平结构。下面只估计第一过渡距离: 声强偏离球面衰减规律的距离 r_1 。

由于我们一开始就不考虑近场特性, 所以在简正波求和时已将 l 扩展到 $l = \infty$ 。这就使所得结果不能用于与声源邻近的球面自由场相衔接, 从而使第一过渡距离的确定变得困难了。但可以想象, 在球面衰减区域内, 强不等式

$$2\bar{\beta}_1 r \ll 1 \quad (34)$$

应当成立, 由此, 可以估计出第一过渡距离

$$r_1 < 1/2\bar{\beta}_1 \quad (35)$$

七、理论与实验的比较

实验是 1975 年 8 月 11 日在 $38\text{m} \pm 1\text{m}$ 水深的海区内进行的。声源的发射深度为 7m

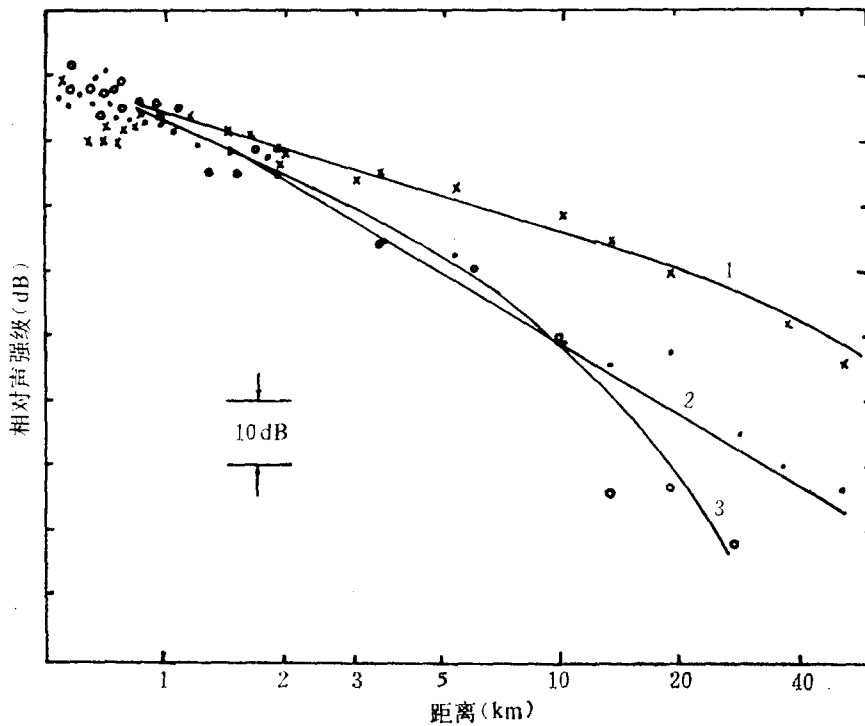


图 4 声强随距离的下降规律

和 25m 两种,接收深度亦为 7m 和 25m, 频率 $f = 1000\text{Hz}$, $c_1 = 1490.5\text{m/s}$, $c_2 = 1526.0\text{m/s}$, $H_1 = 28\text{m}$, $H_2 = 10\text{m}$ 。负跃层的厚度小于 2.5 m。实验结果示于图 4。图中的“×”代表 25 m 发射和接收的实验值,“1”为相应的理论曲线;“·”代表 25m 发射、7m 接收 (或 7m 发射、25m 接收) 的实验值,“2”为相应的理论曲线;“○”代表 7m 发射和接收的实验值,“3”为相应的理论曲线。图 5 示出了声场的深度结构函数 $K(r)$ 和 $K_1(r)$ 对 r 的变化关系的理论与实验的比较。在作数值计算时,参看了文献 [2] 和本文图 4 (小圆圈所示) 的实验数据选定 P 值为: $P = 0.444$ 。从图 4 和图 5 中可以看出,理论与实验符合得较好。

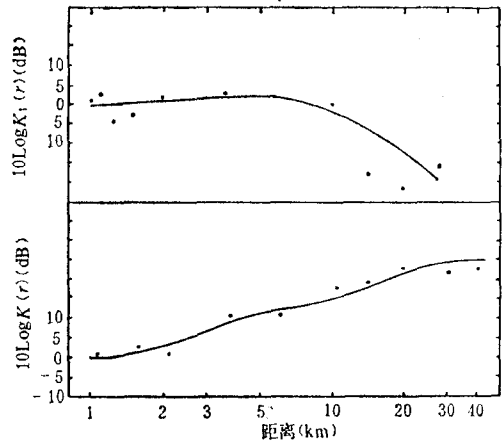


图 5 声场的深度结构

参 考 文 献

- [1] 布列霍夫斯基赫, JI. M. (杨训仁译, 1960), 1957. 分层介质中的波. 科学出版社, 276 页。
 [2] 张仁和、肖金泉、龚敏, 1980. 浅海中单个简正波的分析. 声学学报 5 (2): 73—85。
 [3] Bucker, H. P. and H. E. Morris, 1965. Normal-mode intensity calculations for a constant-depth shallow water channel. *J. Acoust. Soc. Am.* 38(6): 1010—1017.

AVERAGED SOUND INTENSITY IN LEAP-LAYER
SHALLOW-WATER

Tang Yingwu and Xiao Jinqun
 (Institute of Acoustics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

The leap-layer is assumed to consist of two isovelocity water-layers. The expressions of the decay law of the averaged sound intensity with range are derived when the source and receiver are laid in the same isovelocity water-layer or in two different isovelocity water-layers respectively. The results show that there is apparent depth-constitution in the sound field in leap-layer. The theoretical results agree quite well with the practical data.