第16卷 第1期 海洋与湖沼 Vol. 16, No. 1
1985年1月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA Jan., 1985

线性倾斜陆架上的不定常风海流

路季平
(山东海洋学院,青岛)

赵跃辰
(国家地震局地球物理所,北京)

提 要

本文研究线性斜底海域中的不定常风海流问题。在不考虑海面升降的情况下,利用拉氏变换求出精确的分析解,并进行了讨论。对于考虑海面升降的情况也进行了初步分析。

关于大陆架上的风海流,已有许多研究工作。对于平底海域分别研究了定常与不定常的沿岸风海流[1-3]。对于斜底海域讨论了沿岸陆架上的定常风海流[2,4],但对其不定常风海流问题,迄今尚未见报道。本文对于特殊的线性倾斜海底的不定常风海流问题进行了研究,利用逼近方法得到零阶和一阶逼近解,并讨论了零阶逼近解的性质。

一、问题的数学提法

假定海岸线为南北方向。直角坐标系的X轴在未扰动的海平面上指向东;Y轴沿海岸线指向北;Z轴铅直指向下(图1,2)。考虑如下略去非线性项的不定常运动方程:

$$\frac{\partial u}{\partial T}-\frac{A_h}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-\frac{A_v}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}-fv+g\frac{\partial \zeta}{\partial X}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial T}-\frac{A_h}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}-\frac{A_v}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial Z^2}+fu=0。 \tag{2}$$

连续方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial X}+\frac{\partial w}{\partial Z}=0。 \tag{3}$$

其中u, v, w分别为流速$\boldsymbol{V}$在X, Y, Z方向的分量;T为时间;ζ为海面升高;f为科氏参数;A_h, A_v分别为水平和垂直涡动粘滞系数;ρ为海水密度;g为重力加速度;假定ρ, g, A_h, A_v, f均为常数。

海面上有风的作用时,在坡度为K的倾斜海底$Z=KX$上,流速为零,在初始时刻流速和海面升高为零,于是边界条件和初始条件分别为:

收稿日期:1983年6月7日。

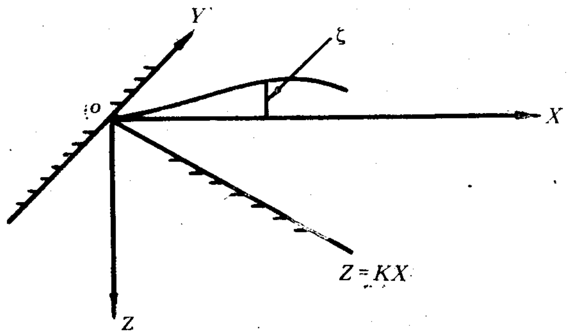

图 1

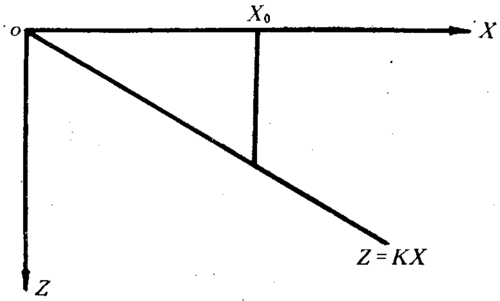

图 2

$$Z = 0:\ -A_v\frac{\partial u}{\partial Z} = \sigma_1(X, T),$$

$(Z = -\zeta)$

$$-A_v\frac{\partial v}{\partial Z} = \sigma_2(X, T)。 \tag{4}$$

$$Z = KX:\ u = v = w = 0。 \tag{5}$$

$$T = 0:\ u = v = w = \zeta = 0。 \tag{6}$$

其中 σ_1, σ_2 分别为海面风应力在 X, Y 方向的分量。

在所考虑的海域内,取由 $Z = 0$, $Z = KX$, $X = X_0$ 所包围的 Y 方向宽为 1 单位的空间水域来分析。在 X 方向有风应力、底摩擦力、科氏力和压强梯度力的作用,根据动量平衡,对任意 X_0 有:

$$\int_0^{X_0}\sigma_1(X)\,dX + \int_0^{X_0}A_v\left.\frac{\partial u}{\partial Z}\right|_{Z=KX}dX + \int_0^{X_0}dX\int_0^{KX}\rho f v\,dZ$$
$$-\int_0^{X_0}dX\int_0^{KX}\rho g\frac{\partial\zeta}{\partial X}dZ = \int_0^{KX_0}\rho u^2 dZ$$
$$+\int_0^{X_0}\rho u(X,-\zeta,T)\frac{\partial\zeta}{\partial T}dX + \int_0^{X_0}dX\int_0^{KX}\rho\frac{\partial u}{\partial T}dZ。$$

将上式对 X_0 微分,并记 X_0 为 X。注意到 $\partial\zeta/\partial X$ 与 Z 无关,得:

$$\sigma_1(X) + A_v\left.\frac{\partial u}{\partial Z}\right|_{Z=KX} + \int_0^{KX}\rho f v\,dZ - \rho g K X\frac{\partial\zeta}{\partial X}$$

$$-2\rho\int_0^{KX} u\frac{\partial u}{\partial X}dZ-\rho u|_{Z=-\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial T}$$

$$-\int_0^{KX}\rho\frac{\partial u}{\partial T}dZ=0。\tag{7}$$

在实际风应力的作用下，流速和海面升高都是有界的，因此，在以下的讨论中假定 u, v, w, ζ 是有界函数。这样，问题即为在有界函数类中，在初边值条件(4)—(6)下由方程组(1)—(3),(7)确定流速 u, v, w 和海面坡度 $\partial\zeta/\partial X$。

引进记号:

$$\mu=\frac{2\pi^2}{f},\quad D_h=\sqrt{\frac{\mu A_h}{\rho}},\quad D_v=\sqrt{\frac{\mu A_v}{\rho}},$$

$$U=u+iv,\ i=\sqrt{-1}。$$

作变换:

$$x=\frac{X}{D_h},\ z=\frac{Z}{D_v},\ t=\frac{T}{\mu}。\tag{8}$$

则水平流速 u, v 的问题变换合并为:

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}-\Delta U+2i\pi^2U+D(x,t)=0,\\ t=0:\ U=0,\\ z=0:\ \dfrac{\partial U}{\partial z}=-\tau(x,t),\\ z=KMx:\ U=0。\end{cases}$$

其中:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};\quad D(x,t)=\frac{\mu g}{D_h}\frac{\partial\zeta}{\partial x};$$

$$\tau(x,t)=\tau_1+i\tau_2=\frac{D_v}{A_v}(\sigma_1+i\sigma_2);$$

$$M=\frac{D_h}{D_v}=\sqrt{\frac{A_h}{A_v}}。$$

连续方程变为:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+M\frac{\partial w}{\partial z}=0。\tag{9}$$

(7) 式也作相应的变换。

二、问题的解法

现在用拉普拉斯变换解问题 (I)。函数 $U(t)$ 的拉氏变换记为:

$$L[U]=\bar{U}(p)=\int_0^\infty U(t)e^{-pt}dt。$$

将问题 (I) 对变量 t 进行拉氏变换并记 $q=\sqrt{p+2i\pi^2}$ 得:

$$
\text{(II)}\begin{cases}\Delta\overline{U}-q^2\overline{U}=\overline{D}(x,p),\\ z=0:\ \dfrac{\partial\overline{U}}{\partial z}=-\overline{\tau}(x,p),\\ z=KMx:\ \overline{U}=0。\end{cases}
$$

为便于求解析解，在以下的讨论中，假定海底平面 $z=KMx$ 与海平面 $z=0$ 的夹角 θ 为

$$
\theta=\mathrm{tg}^{-1}(KM)=\frac{\pi}{2N}\ (N=1,2,\cdots),
$$

在这种情况下，问题 (II) 的格林函数为[4]：

$$
\overline{G}(x,z;x_0,z_0,p)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^kK_0\left(q\sqrt{(x-x_k)^2+(z-z_k)^2}\right)
$$

$$
+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^kK_0\left(q\sqrt{(x-x_k')^2+(z-z_k')^2}\right), \tag{10}
$$

这里，$K_0(x)$ 为第二类零阶虚宗量贝塞尔函数；

$$
x_k=r_0\cos(2k\theta+\varphi);\ z_k=r_0\sin(2k\theta+\varphi);
$$

$$
x_k'=r_0\cos(2k\theta-\varphi);\ z_k'=r_0\sin(2k\theta-\varphi);
$$

$$
r_0=\sqrt{x_0^2+z_0^2};\ \varphi=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{z_0}{x_0}\right)。
$$

当 $z_0=0$ 时，$x_k=x_k'=x_0\cos 2k\theta$；$z_k=z_k'=x_0\sin 2k\theta$，于是：

$$
\overline{G}(x,z;x_0,0,p)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^kK_0\left(q\sqrt{(x-x_k)^2+(z-z_k)^2}\right)。 \tag{11}
$$

这样，问题 (II) 的解可表示为：

$$
\overline{U}(x,z,p)=\int_0^\infty\overline{\tau}(x_0,p)\overline{G}(x,z;x_0,0,p)dx_0
$$

$$
-\int_0^\infty dx_0\int_0^{KMx_0}\overline{D}(x_0,p)\overline{G}(x,z;x_0,z_0,p)dz_0。 \tag{12}
$$

利用拉氏变换的性质和变换公式

$$
L^{-1}[K_0(\alpha^{1/2}p^{1/2})]=\frac{1}{2t}e^{-\alpha/4t}\ (\mathrm{Re}\alpha\geqslant 0,\ \alpha\neq 0),
$$

将(12)式进行拉氏逆变换后得：

$$
U(x,z,t)=\int_0^\infty dx_0\int_0^t\tau(x_0,t-t')G(x,z;x_0,0,t')dt'
$$

$$
-\int_0^\infty dx_0\int_0^{KMx_0}dz_0\int_0^t D(x_0,t-t')G(x,z;x_0,z_0,t')dt'
$$

$$
=U_\tau(x,z,t)+U_\zeta(x,z,t)。 \tag{13}
$$

这里 U_τ，U_ζ 分别表示 U 的第一项和第二项，G 的表达式如下：

$$
G(x,z;x_0,z_0,t)=\sum_{k=0}^{2N-1}\frac{(-1)^k}{4\pi t}\left[e^{-\frac{(x-x_k)^2+(z-z_k)^2}{4t}}\right.
$$

$$
\left.+e^{-\frac{(x-x_k')^2+(z-z_k')^2}{4t}}\right]e^{-2i\pi^2t}。 \tag{14}
$$

考虑到边界条件，垂直流速可利用连续方程确定为:

$$w(x,z,t) = -\frac{1}{M}\int_{KMx}^{z}\frac{\partial u}{\partial x}dz。 \tag{15}$$

在变换(8)下，(7)式变为:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{Kgx}\Bigg[&\frac{fD_v}{2\pi^2}\left(\tau_1 + \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=KMx}\right) + fD_v\int_0^{KMx} v dz \\ &- \frac{2}{M}\int_0^{KMx} u\frac{\partial u}{\partial x}dz - \frac{f}{2\pi^2}u\,\big|_{z=-\zeta/D_v}\frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ &- \frac{fD_v}{2\pi^2}\int_0^{KMx}\frac{\partial u}{\partial t}dz\Bigg]。\end{aligned} \tag{16}$$

据上所述，对于所提出的特殊线性倾斜海底的不定常风海流问题，记 $U^{(0)} = U_\tau$， 零阶逼近解取为:

$$\begin{aligned}u^{(0)} &= \mathrm{Re}U^{(0)} \\ &= \int_0^\infty dx_0\int_0^t\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k\frac{1}{2\pi t'}e^{-\frac{(x-x_k)^2+(z-z_k)^2}{4t'}}(\tau_1(x_0, t-t')\cos 2\pi^2 t' \\ &\quad + \tau_2(x_0,t-t')\sin 2\pi^2 t')dt',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v^{(0)} &= \mathrm{Im}U^{(0)} \\ &= \int_0^\infty dx_0\int_0^t\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k\frac{1}{2\pi t'}e^{-\frac{(x-x_k)^2+(z-z_k)^2}{4t'}}(\tau_2(x_0, t-t')\cos 2\pi^2 t' \\ &\quad - \tau_1(x_0,t-t')\sin 2\pi^2 t')dt',\end{aligned}$$

$$w^{(0)} = -\frac{1}{M}\int_{KMx}^{z}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x}dz,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial x} = \frac{1}{Kgx}\Bigg[&\frac{fD_v}{2\pi^2}\left(\tau_1 + \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z=KMx}\right) + fD_v\int_0^{KMx} v^{(0)}dz \\ &- \frac{2}{M}\int_0^{KMx} u^{(0)}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial x}dz - \frac{fD_v}{2\pi^2}\int_0^{KMx}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial t}dz\Bigg]。\end{aligned}$$

一阶逼近解为:

$$u^{(1)} = u^{(0)} + \mathrm{Re}U_{\zeta^{(0)}},$$

$$v^{(1)} = v^{(0)} + \mathrm{Im}U_{\zeta^{(0)}},$$

$$w^{(1)} = -\frac{1}{M}\int_{KMx}^{z}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}dz = w^{(0)} + w_{\zeta^{(0)}},$$

$$w_{\zeta^{(0)}} = -\frac{1}{M}\int_{KMx}^{z}\frac{\partial u_{\zeta^{(0)}}}{\partial x}dz,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial x} = \frac{1}{Kgx}\Bigg[&\frac{fD_v}{2\pi^2}\left(\tau_1 + \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=KMx}\right) + fD_v\int_0^{KMx} v^{(1)}dz \\ &- \frac{2}{M}\int_0^{KMx} u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x}dz - \frac{f}{2\pi^2}u^{(1)}\bigg|_{z=-\zeta^{(0)}/D_v}\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial t} \\ &- \frac{fD_v}{2\pi^2}\int_0^{KMx}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}dz\Bigg]。\end{aligned}$$

式中 $u_{\zeta^{(0)}} = \mathrm{Re}U_{\zeta^{(0)}}$，可以类似地作出高阶逼近解。

特殊情况，当风不随地点变化，$\tau=\tau(t)$，且 $\theta=\pi/4N(N=1,2,\cdots)$ 时，有[4]：

$$\bar{U}_\tau=\int_0^\infty \bar{\tau}(p)\bar{G}(x,z;x_0,0,p)dx_0$$

$$=\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k\frac{\bar{\tau}}{q}e^{-qR_k},$$

$$R_k=\left|x\sin\frac{k\pi}{2N}-z\cos\frac{k\pi}{2N}\right|,\ k=0,1,\cdots,2N-1。$$

利用拉氏变换公式

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\alpha\sqrt{p}}\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\alpha^2/4t},\ \alpha>0$$

与平移、卷积定理得：

$$U_\tau=\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k\int_0^t\tau(t-t')\frac{1}{\sqrt{\pi t'}}e^{-\frac{R_k^2}{4t'}-2i\pi^2t'}dt'。\tag{17}$$

在这种情况下，各阶逼近解均可得到更简洁的表达式。

上述逐次逼近法的根据是(13)，(15)式，U_τ 是漂流项，U_ζ 是 U 的补充项。利用压缩映射原理，可以证明此逐次逼近法的收敛性，所给出的零阶和一阶逼近解是合理的，并能描述不定常流场的主要特征。

三、讨　　论

对于所研究的特殊线性倾斜海底的不定常风海流问题，利用得到的解式可以推出如下一些结论。

1. 流速 $\boldsymbol{V}$ 是由两项组成，即 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_\tau+\boldsymbol{V}_\zeta$，其中 $\boldsymbol{V}_\tau$ 是由风引起的漂流；$\boldsymbol{V}_\zeta$ 是由于海面倾斜而产生的梯度流。这一结论可由(13)，(15)式得出。

2. 在 $\tau=\tau(t)$，$\theta=\pi/4N(N=1,2,\cdots)$ 的情况下，U_τ 可分为两项和：

$$U_\tau=\int_0^t\tau(t-t')\frac{1}{\sqrt{\pi t'}}e^{-\frac{z^2}{4t'}-2i\pi^2t'}dt'$$

$$+\sum_{k=1}^{2N-1}(-1)^k\int_0^t\tau(t-t')\frac{1}{\sqrt{\pi t'}}e^{-\frac{R_k^2}{4t'}-2i\pi^2t'}dt'。$$

第一项为无限深海的漂流；第二项是由于海底影响而产生的补偿漂流，这一项在近岸处不能被忽视，但在远离海岸处 $(x\to\infty)$ 趋于零。

3. 对于任意点 (x,z)，时刻 t 的流速 $\boldsymbol{V}$ 仅依赖于时间间隔 $[0,t]$ 内的风应力和海面坡度，这个明显的因果关系由(13)，(15)式推出。

4. 当时间进行充分久之后 $(t\to\infty)$，若风应力趋于定常状态，则斜底不定常风海流问题的解趋于相应定常问题的解。事实上，因为：

$$\int_0^\infty G(x,z;x_0,z_0,t)dt=\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k\int_0^\infty\frac{1}{4\pi t}\Big[e^{-\frac{(x-x_k)^2+(z-z_k)^2}{4t}}$$

$$+e^{-\frac{(x-x'_k)^2+(z-z'_k)^2}{4t}}\Big]e^{-2i\pi^2t}dt$$

$$= \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k \frac{1}{2\pi} [K_0\left(q\sqrt{(x-x_k)^2+(z-z_k)^2}\right) + K_0\left(q\sqrt{(x-x'_k)^2+(z-z'_k)^2}\right)]$$

$$\equiv G(x, z; x_0, z_0),$$

式中 $q=\sqrt{2i\pi^2}$, $G(x, z; x_0, z_0)$ 为定常问题的格林函数[4]，故当 $t\to\infty$: $\tau(x, t)\to \tau(x)$ 时有:

$$\lim_{t\to\infty} U^{(0)}(x, z, t) = \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty \tau(x_0) G(x, z; x_0, 0, t) dt$$

$$= \int_0^\infty \tau(x_0) G(x, z; x_0, 0) dx_0$$

$$\equiv U^{(0)}(x, z)\ (\text{定常问题的零阶逼近}),$$

且 $t\to\infty$: $\partial U^{(0)}/\partial t\to 0$。根据逐次逼近法知:

$$t\to\infty: \frac{\partial\zeta^{(0)}(x,t)}{\partial x} \to \frac{\partial\zeta^{(0)}(x)}{\partial x}(\text{定常问题的零阶逼近})。$$

进而推知:

$$t\to\infty: \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}(x, z, t) \\ \dfrac{\partial\zeta(x, t)}{\partial x} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}(x, z) \\ \dfrac{\partial\zeta(x)}{\partial x} \end{pmatrix}。$$

上式右端为相应定常问题的解向量。

5. 流速 $\boldsymbol{V}$ 的零阶逼近仅是漂流部分。特殊情况，若 $\tau = i\tau_0 =$ 常数(沿岸风); $\theta = \pi/4$ (相当于 $KM=1$) 时，则水平零阶复流速 $U^{(0)}$ 为:

$$U^{(0)} = U_\tau = \int_0^t \frac{i\tau_0}{\sqrt{\pi t'}} (e^{-z^2/4t'} - e^{-x^2/4t'})\, e^{-2i\pi^2 t'} dt'。$$

将实虚部分开得:

$$u^{(0)} = \int_0^t \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi t'}} e^{-z^2/4t'} \sin 2\pi^2 t' dt' - \int_0^t \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi t'}} e^{-x^2/4t'} \sin 2\pi^2 t' dt',$$

$$v^{(0)} = \int_0^t \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi t'}} e^{-z^2/4t'} \cos 2\pi^2 t' dt' - \int_0^t \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi t'}} e^{-x^2/4t'} \cos 2\pi^2 t' dt'。$$

$u^{(0)}$ 和 $v^{(0)}$ 的第一项为深海漂流；第二项为补偿漂流，与 z 无关。随着 t 的增长，水平流速向量 $(u^{(0)}, v^{(0)})$ 无限摆动地趋于定常值。

参 考 文 献

[1] 张庆华，1981。定常沿岸有限深海的风海流。海洋与湖沼 **12**(2): 152—171。
[2] 张庆华，1982。计算陆架风海流的一种模式。海洋与湖沼 **13**(2): 105—116。
[3] 胡敦欣，1979。风生沿岸上升流及沿岸流的一个非稳态模式。海洋与湖沼 **10**(2); 93—102。
[4] 赵跃辰、路季平，1983。线性倾斜陆架上的定常风海流。海洋湖沼通报 **2**: 7—15。
[5] 路季平、赵跃辰，1983。倾斜陆架上的定常风海流。海洋湖沼通报 **4**: 1—8。

NON-STEADY WIND-DRIVEN SEA CURRENT ON LINEAR SLOPING CONTINENTAL SHELF

Lu Jiping
(Shandong College of Oceanology, Qingdao)
and
Zhao Yuechen
(Geophysics Institute, State Bureau of Seismology, Beijing)

ABSTRACT

The sea current on continental shelf is a difficult phenomenon to study. Non-steady current is even more difficult than steady one. But in some cases if certain boundary conditions of the steady current are solved, the non-steady one can also be solved with Laplace Transform.

This paper deals with the non-steady wind-driven current on continental shelf with its bottom slopes at one of a series special values. The solution includes velocity $V(x, z, t)$ and corrdinate of sea surface $-\zeta(x, t)$. It reveals some interesting properties of the flowing field.