高、低潮数据的调和分析*

王 骥
(国家海洋局科技情报研究所,天津)

方国洪
(中国科学院海洋研究所,青岛)

提要　本文给出了由高、低潮数据计算潮汐调和常数和由最大流速及转流数据计算潮流调和常数的方法。文章还讨论了不同频率分潮间的混淆效应，指出本方法用于混合型和全日型潮汐可获得比半日型潮汐好的效果。对两个港口实测高、低潮数据分析表明,所得调和常数与由逐时潮高分析所得的数值一般较接近，但对长周期分潮较差。本方法所得调和常数用于预报高、低潮或最大流速和转流时可得到很好的结果。

在计算潮汐的调和常数时,通常利用逐时潮位观测记录进行调和分析,但在某些海区有时只能得到高、低潮的潮高和潮时数据。例如,在某些潮汐观测记录报表中只列出高、低潮的数值而没有逐时观测值;再如,有时我们可能持有某个地点的包含高、低潮预报值的潮汐表,但不知道该地点的调和常数。对于这类数据,目前有两种分析方法：第一种是 Horn (1948)[5] 和 Doodson (1957)[4] 分别提出的方法，即把高潮和低潮、潮时和潮高的数据分别进行处理,求出各个数据序列的 Fourier 变换;第二种是 Doodson (1951)[3]提出的方法,这个方法目的仍是求出通常使用的调和常数。显然,第二种方法更优越一些。因为,第一种方法需要给出 4 组或 8 组调和常数，而第二种方法只需一组。更重要的是,第二种方法具有更明确的物理意义,而且如果调和常数算得准确,还可以把整个潮位变化过程推算出来。然而由于当时计算工具的限制，Doodson 给出的分析过程相当复杂，而且只能算出少数几个分潮，因而在实际工作中用得不多。本文将给出一个采用电子计算机对高、低潮数据进行调和分析的方法,比 Doodson 所用方法简便易行，并且可以达到较高的准确度。

另外,在某些测流站,除了有最大流速的数值和时刻之外,还可能有转流时刻(即流速等于零的时刻)。这个信息也可加以利用,并可以提高分析的准确度，本文亦将给出处理这种数据的方法。

一、分 析 方 法

假设潮位可用

$$\zeta = x_0 + \sum_{j=1}^{p} f_j H_j \cos(\sigma_j t + V_j - g_j) \tag{1}$$

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 1318 号。
焦宗凤同志为本文提供了计算和验证结果,谨此致谢。
收稿日期：1984 年 11 月 21 日。

表示。式中 x_0 表示平均海面高度; $V = v_0 + u$ 为 $t = 0$ 时刻的天文初相角; 其余为潮汐学惯用符号。设已知于时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_K$ 潮位达到高潮或低潮, 相应的潮高为 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_K$, 由此给出如下两组方程

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 + \sum\limits_{j=1}^{P} f_j H_j \cos(\sigma_j t_k + V_j - g_j) = \zeta_k \\ \sum\limits_{j=1}^{P} \sigma_j f_j H_j \sin(\sigma_j t_k + V_j - g_j) = 0 \\ \qquad (k = 1, 2, \cdots, K) \end{array}\right. \tag{2}$$

当 $K > P$ 时,可以对方程(2)进行最小二乘处理,以便确定各调和常数的数值。

一般式(2)中的两组方程应当具有不同的权,在处理时, 不妨对第二组方程乘上一个相同的权系数 w,这样便得到

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 + \sum\limits_{j=1}^{P} (\cos\sigma_j t_k) x_j + \sum\limits_{j=1}^{P} (\sin\sigma_j t_k) y_j = \zeta_k \\ \sum\limits_{j=1}^{P} (w\sigma_j \sin\sigma_j t_k) x_j - \sum\limits_{j=1}^{P} (w\sigma_j \cos\sigma_j t_k) y_j = 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

式中

$$\left\{\begin{array}{l} x_j \equiv f_j H_j \cos(g_j - V_j) \\ y_j \equiv f_j H_j \sin(g_j - V_j) \end{array}\right. \tag{4}$$

方程组(3)的法方程是

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{j=0}^{P} A_{ij} x_j + \sum\limits_{j=1}^{P} C_{ij} y_j = F_i, \ (i = 0, 1, \cdots, P) \\ \sum\limits_{j=0}^{P} D_{ij} x_j + \sum\limits_{j=1}^{P} B_{ij} y_j = G_i, \ (i = 1, 2, \cdots, P) \end{array}\right. \tag{5}$$

其中系数行列式的元素为

$$\left\{\begin{array}{l} A_{00} = K \\ A_{0j} = \sum\limits_{k=1}^{K} \cos\sigma_j t_k \\ A_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{K} \cos\sigma_i t_k \cos\sigma_j t_k + w^2\sigma_i\sigma_j \sum\limits_{k=1}^{K} \sin\sigma_i t_k \sin\sigma_j t_k \\ C_{0j} = D_{j0} = \sum\limits_{k=1}^{K} \sin\sigma_j t_k \\ C_{ij} = D_{ji} = \sum\limits_{k=1}^{K} \cos\sigma_i t_k \sin\sigma_j t_k - w^2\sigma_i\sigma_j \sum\limits_{k=1}^{K} \sin\sigma_i t_k \cos\sigma_j t_k \\ B_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{K} \sin\sigma_i t_k \sin\sigma_j t_k + w^2\sigma_i\sigma_j \sum\limits_{k=1}^{K} \cos\sigma_i t_k \cos\sigma_j t_k \\ \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, P) \end{array}\right. \tag{6}$$

方程右端项为

$$\begin{cases} F_0 = \sum_{k=1}^{K} \zeta_k \\ F_i = \sum_{k=1}^{K} \zeta_k \cos \sigma_i t_k \quad (i = 1, 2, \cdots, P) \\ G_i = \sum_{k=1}^{K} \zeta_k \sin \sigma_i t_k \end{cases} \tag{7}$$

法方程(5)可用一般的关于解线性代数方程的标准程序解出。求得 x_j, y_j 后,调和常数按下式计算

$$\begin{cases} H_j = \frac{1}{f_j}\sqrt{x_j^2 + y_j^2} \\ g_j = \begin{cases} V_j + \arcsin(y_j/f_jH_j), & \text{若 } x_j \geqslant 0 \\ V_j + \pi - \arcsin(y_j/f_jH_j), & \text{若 } x_j < 0 \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

由上所述看出,整个计算过程十分简单,不必分成半日潮、混合潮和全日潮三种情况来处理。

在大多数航道上,潮流属往复流性质。在这些地点,我们有时能得到最大流流速及其发生时刻的数据,并同样可以按上述方法分析。实际上,可把潮流达到正最大值理解为发生高潮,达到负最大值为低潮。另外,我们还常常可以得到转流时刻的数值。这时,我们可以把它们理解为潮位等于零的时刻。

设已知于时刻 t'_1, t'_2, $\cdots$, t'_L 潮位等于零,则原始方程组除了(3)之外,又增加了

$$x_0 + \sum_{j=1}^{P} (\cos \sigma_j t'_l) x_j + \sum_{j=1}^{P} (\sin \sigma_j t'_l) y_j = 0 \tag{9}$$

(3)和(9)联列构成方程组的法方程可写作如下形式

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{P} A'_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{P} C'_{ij} y_j = F_i, \ (i = 0, 1, \cdots, P) \\ \sum_{j=0}^{P} D'_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{P} B'_{ij} y_j = G_i, \ (i = 1, 2, \cdots, P) \end{cases} \tag{10}$$

其中

$$\begin{cases} A'_{00} = A_{00} + L \\ A'_{0j} = A_{0j} + \sum_{l=1}^{L} \cos \sigma_j t'_l \\ A'_{ij} = A_{ij} + \sum_{l=1}^{L} \cos \sigma_i t'_l \cos \sigma_j t'_l \\ C'_{0j} = D'_{j0} = C_{0j} + \sum_{l=1}^{L} \sin \sigma_j t'_l \\ C'_{ij} = D'_{ji} = C_{ij} + \sum_{l=1}^{L} \cos \sigma_i t'_l \sin \sigma_j t'_l \\ B'_{ij} = B_{ij} + \sum_{l=1}^{L} \sin \sigma_i t'_l \sin \sigma_j t'_l \end{cases} \tag{11}$$

方程的右端项不变[1]。

二、不同频率分潮的混淆

Doodson (1951) 曾指出，利用高、低潮数据进行分析时，一个至关重要的问题是四分日分潮与平均水位，六分日分潮与半日分潮之间互相不能分辨。这个问题在用上面的方法进行分析时，在一定程度上依然存在。下面来讨论这个问题。

对于半日潮港，高、低潮发生时间的间隔平均为 6 个太阴时。为此，首先讨论一种最简单的情况，即只存在两个分潮且假定样本的时间间隔 τ 为常数。这时原始方程(3)取形式

$$\begin{cases}(\cos k\sigma_1\tau)x_1+(\cos k\sigma_2\tau)x_2+(\sin k\sigma_1\tau)y_1+(\sin k\sigma_2\tau)y_2=\zeta_k & (12\text{-}1)\\ (w\sigma_1\sin k\sigma_1\tau)x_1+(w\sigma_2\sin k\sigma_2\tau)x_2-(w\sigma_1\cos k\sigma_1\tau)y_1 & \\ \qquad -(w\sigma_2\cos k\sigma_2\tau)y_2=w\lambda_k & (12\text{-}2)\end{cases}$$

由于现在是等时间间隔取样的，故潮位对时间的一级微商不能保持都等于零，假设它等于 λ_k，这对研究分潮的混淆并无影响。同时为了讨论方便，我们选择时间零点时，使得取样时刻为 τ, 2τ, $\cdots$, $K\tau$。

如果 K 足够大，法方程(5)中的 C_{ij} 和 D_{ij} 将比系数行列式中的主要元素小很多，这时法方程(5)实际上分裂为关于 x_j 和 y_j 的两个方程组，我们可以研究其中的一个方程组，因为另一个具有相同的性质。以方程(5)的第一个方程组为例，当 K 很大时，它变为

$$\begin{cases}A_{11}x_1+A_{12}x_2=F_1\\ A_{12}x_1+A_{22}x_2=F_2\end{cases}\tag{13}$$

在通常的调和分析中，只给出条件(12-1)。这时方程(13)的系数行列式的元素为

$$\begin{cases}A_{11}=\sum_{k=1}^{K}\cos^2 k\sigma_1\tau\\ A_{22}=\sum_{k=1}^{K}\cos^2 k\sigma_2\tau\\ A_{12}=\sum_{k=1}^{K}\cos k\sigma_1\tau\cos k\sigma_2\tau\end{cases}\tag{14}$$

由此可知，当

$$\begin{cases}(\sigma_1+\sigma_2)\tau=m\cdot 2\pi,\ (m=1,2,\cdots)\ 或 & (15\text{-}1)\\ (\sigma_1-\sigma_2)\tau=m\cdot 2\pi,\ (m=\pm1,\pm2,\cdots) & (15\text{-}2)\end{cases}$$

则系数行列式为

$$\mathscr{D}=A_{11}A_{22}-A_{12}^2=0\tag{16}$$

这时方程(13)是奇异的，不可能解出 x_1 和 x_2. 如果取样间隔 $\tau=6$ 太阴时，则折叠频率为 2 周/太阴日，这时频率大于 M_2 的分潮就有可能与频率小于 M_2 的分潮相混淆。表 1

1) 这是由于(9)的右端为零，如果考虑更一般的情况，设(9)的右端是 ζ_l'，则(10)中右端应分别加 $\sum_{l=1}^{L}\zeta_l'\cos\sigma_i t_l'$ 和 $\sum_{l=1}^{L}\zeta_l'\sin\sigma_i t_l'$。

中列出了 Doodson (1928) 标准方法中的 60 个分潮。属于同一序号的分潮，在取样间隔为 6 太阴时的情况下，会互相混淆。带有括号的分潮在一年资料的分析中会与其它分潮互混，但如果资料为 4 年(约为月球近地点运行周期之半)以上，则它们不会与其它分潮互混。表中有的分潮一个序号下面有两行，表示同一行的分潮之间满足条件(15-2)，不同行的分潮则满足条件(15-1)。例如 $2MS_6$ 和 μ_2 及 S_2 和 μ_2 都满足(15-1)，而 S_2 和 $2MS_6$ 则满足(15-2)。因此，如利用间隔等于 6 太阴时的样本进行分析，对于每一序号，则只能选取一个分潮，这样就必须舍弃几乎所有的主要浅水复合分潮。

表 1 当取样间隔 $\tau=6$ 太阴时时，不同频率分潮的混淆

序 号	分 潮	序号	分 潮	序号	分 潮
1	$x_0,\ M_4$	15	π_1	28	$\begin{cases}N_2,\ 2MN_6\\ L_2\end{cases}$
2	S_a	16	P_1	29	$\begin{cases}\lambda_2, MSN_6\\ \nu_2\end{cases}$
3	S_{sa}	17	S_1	30	$\begin{cases}OP_2\\ Mk\bar{S}_2\end{cases}$
4	$\begin{cases}Mm\\ MN_4\end{cases}$	18	$\begin{cases}K_1\\ MO_3\end{cases}$	31	M_2, M_6
5	$M\bar{S}_f,\ MS_4$	19	Ψ_1	32	T_2
6	$M_f,\ Mk_4$	20	ϕ_1	33	R_2
7	$2Q_1$	21	θ_1	34	$\begin{cases}KJ_2\\ OQ_2\end{cases}$
8	$\begin{cases}\sigma_1\\ SK_3\end{cases}$	22	J_1	35	$2S\bar{M}_2, 2SM_6$
9	Q_1	23	$S\bar{O}_1$	36	SN_4
10	ρ_1	24	OO_1	37	S_4
11	$\begin{cases}O_1\\ MK_3\end{cases}$	25	$\begin{cases}MS\bar{N}_2\\ MN\bar{S}_2\end{cases}$	38	Sk_4
12	$\begin{cases}M\bar{P}_1\\ SO_3\end{cases}$	26	$\begin{cases}k_2,\ 2Mk_6\\ (2N_2)\end{cases}$	39	MSk_6
13	$\begin{cases}M_1\\ M_3\end{cases}$	27	$\begin{cases}S_2,\ 2MS_6\\ \mu_2\end{cases}$		
14	χ_1				

当然，实际观测值中还包含着更多的分潮，特别是，还有许多浅水分潮都可与表 1 中的分潮之间以及它们自己之间产生混淆。对于它们也可作类似的分析。

在引入已知条件(12-2)后，式(14)由下式代替:

$$\begin{cases}A_{11}=\sum\limits_{k=1}^{K}\cos^2 k\sigma_1\tau+w^2\sigma_1^2\sum\limits_{k=1}^{K}\sin^2 k\sigma_1\tau\\ A_{22}=\sum\limits_{k=1}^{K}\cos^2 k\sigma_2\tau+w^2\sigma_2^2\sum\limits_{k=1}^{K}\sin^2 k\sigma_2\tau\\ A_{12}=\sum\limits_{k=1}^{K}\cos k\sigma_1\tau\cos k\sigma_2\tau+w^2\sigma_1\sigma_2\sum\limits_{k=1}^{K}\sin k\sigma_1\tau\sin k\sigma_2\tau\end{cases}\tag{17}$$

现在$\mathscr{D}=0$ 的情况不会发生了。在 K 很大的条件下，当 $(\sigma_1\pm\sigma_2)\tau=m\cdot 2\pi$ 时，近似有

$$\begin{cases} A_{11} = \dfrac{K}{2}(1 + w^2\sigma_1^2), \quad A_{22} = \dfrac{K}{2}(1 + w^2\sigma_2^2) \\ A_{12} = \dfrac{K}{2}(1 \mp w^2\sigma_1\sigma_2) \end{cases} \tag{18}$$

因而

$$\mathscr{D} = \frac{K^2}{4} w^2(\sigma_1 \pm \sigma_2)^2 \tag{19}$$

虽然这时 $\mathscr{D} \neq 0$，但系数行列式的对角元素优势不如当条件(15)不满足时那么明显。将满足条件(15-1)的分潮和满足(15-2)的分潮相比较，则对满足第一条件的分潮，其系数行列式的状态较好。亦即，表 1 中同一序号中不同行的分潮之间分离较好，然而同一行中的分潮却仍然会分离得不够好，因为这时虽然 $\mathscr{D}$ 不等于零，但式(18)中 A_{12} 却很接近 $\sqrt{A_{11}A_{22}}$。

前面讨论的是取样间隔 τ 等于固定数值的情况。在实际的高、低潮分析中，是按高、低潮发生时间来取样的，即取样的时间与 $k\tau$ 有一定的偏离。我们把偏离的时间差记作 ε_k。如果欲分析的地点 M_2 分潮占很大的优势，则 ε_k 值的变动范围就不大，若其它分潮也相当重要，则 ε_k 的变动范围就会较大。下面简单讨论一下由于 ε_k 的存在所带来的好处。

这时式(14)应修改为

$$\begin{cases} A_{11} = \sum\limits_{k=1}^{K} \cos^2\sigma_1(k\tau + \varepsilon_k) \\ A_{22} = \sum\limits_{k=1}^{K} \cos^2\sigma_2(k\tau + \varepsilon_k) \\ A_{12} = \sum\limits_{k=1}^{K} \cos\sigma_1(k\tau + \varepsilon_k)\cos\sigma_2(k\tau + \varepsilon_k) \end{cases} \tag{20}$$

以 A_{12} 为例，可写为

$$\begin{aligned} A_{12} = \sum_{k=1}^{K} [& \cos k\sigma_1\tau \cos k\sigma_2\tau \cos\sigma_1\varepsilon_k \cos\sigma_2\varepsilon_k \\ & + \sin k\sigma_1\tau \sin k\sigma_2\tau \sin\sigma_1\varepsilon_k \sin\sigma_2\varepsilon_k \\ & - \cos k\sigma_1\tau \sin k\sigma_2\tau \cos\sigma_1\varepsilon_k \sin\sigma_2\varepsilon_k \\ & - \sin k\sigma_1\tau \cos k\sigma_2\tau \sin\sigma_1\varepsilon_k \cos\sigma_2\varepsilon_k] \end{aligned}$$

我们所关心的是条件(15)满足的情况，当 $(\sigma_1 \pm \sigma_2)\tau = m \cdot 2\pi$ 时，有

$$\begin{aligned} A_{12} = \sum_{k=1}^{K} \Big\{ & \cos^2 k\sigma_1\tau \left[\frac{1}{2}\cos(\sigma_1 - \sigma_2)\varepsilon_k + \frac{1}{2}\cos(\sigma_1 + \sigma_2)\varepsilon_k\right] \\ & \mp \sin^2 k\sigma_1\tau \left[\frac{1}{2}\cos(\sigma_1 - \sigma_2)\varepsilon_k - \frac{1}{2}\cos(\sigma_1 + \sigma_2)\varepsilon_k\right] \\ & - \cos k\sigma_1\tau \sin k\sigma_1\tau \sin(\sigma_1 \pm \sigma_2)\varepsilon_k \Big\} \end{aligned}$$

ε_k 的取值实际上与 $\cos k\sigma_1\tau$ 或 $\sin k\sigma_1\tau$ 没有一定关系，而且 ε_k 的平均值为零，因此上式近似为

$$A_{12} \approx \sum_{k=1}^{K} \left\{ \frac{1}{2}(a+b)\cos^2 k\sigma_1\tau \mp \frac{1}{2}(a-b)\sin^2 k\sigma_1\tau \right\}$$

$$= \begin{cases} \frac{b}{2}K + \frac{a}{2}\sum_{k=1}^{K}\cos 2k\sigma_1\tau, & \text{若 } (\sigma_1+\sigma_2)\tau = m\cdot 2\pi \\ \frac{a}{2}K + \frac{b}{2}\sum_{k=1}^{K}\cos 2k\sigma_1\tau, & \text{若 } (\sigma_1-\sigma_2)\tau = m\cdot 2\pi \end{cases} \quad (21)$$

其中 a 和 b 分别代表 $\cos(\sigma_1-\sigma_2)\varepsilon_k$ 和 $\cos(\sigma_1+\sigma_2)\varepsilon_k$ 的平均值。如果 K 足够大，且 $2\sigma_1\tau \neq m\cdot 2\pi$，则上式还可进一步化为

$$A_{12} \approx \begin{cases} \frac{b}{2}K, & \text{若 } (\sigma_1+\sigma_2)\tau = m\cdot 2\pi \\ \frac{a}{2}K, & \text{若 } (\sigma_1-\sigma_2)\tau = m\cdot 2\pi \end{cases} \quad (22)$$

同样地，近似有

$$A_{11} \approx A_{22} \approx \frac{K}{2} \quad (23)$$

这样，在满足(15)的条件下，方程(13)的系数行列式的状态主要决定于 $\cos(\sigma_1\mp\sigma_2)\varepsilon_k$ 的平均值 a 或 b。当 ε 取很小的数值时，它们接近于 1，行列式接近于病态。当 ε 取值范围相当宽，以致 $\cos(\sigma_1\mp\sigma_2)\varepsilon_k$ 的平均值明显小于 1 时，行列式的状态便会是良好的。最好的条件是 $a=0$ 及 $b=0$，而这要求角度 $(\sigma_1\mp\sigma_2)\varepsilon_k$ 的分布范围不小于 $(-\pi,\pi)$。

在 τ 取为 6 太阴时的情况下，条件(15)为 $\sigma_1\pm\sigma_2 = m\cdot 2\sigma_{M_2}$。这时，要满足 $(\sigma_1\pm\sigma_2)\varepsilon$ 分布范围不小于 $(-\pi,\ \pi)$，就需要求 ε 分布范围不小于 $\pm\frac{3}{|m|}$ 太阴时。所以，对于满足(15)的分潮对，$|m|$ 越大，则越容易分离开。例如表 1 中 S_2 和 $2MS_6$（此时 $\sigma_1-\sigma_2 = 2\sigma_{M_2}$）及 S_2 和 μ_2（此时 $\sigma_1+\sigma_2 = 2\sigma_{M_2}$）比较不容易分离开；而 μ_2 跟 $2MS_6$（此时 $\sigma_1+\sigma_2 = 4\sigma_{M_2}$）则容易分离得多。不过如果增加了极值条件(12-2)，则前两对也有所不同。由于 S_2 跟 μ_2 满足(15-1)，因而会比 S_2 跟 $2MS_6$ 分离得好些，这在前面已讨论过了。

表 1 中分潮对 $(MS_4, \overline{M}S_f)$、(M_f, Mk_4)、$(k_2, 2Mk_6)$、$(S_2, 2MS_6)$、$(N_2, 2MN_6)$、(λ_2, MSN_6) 及 $(2S\overline{M}_2, 2SM_6)$ 都是满足条件(15-2)的。对这些分潮对，如欲使 $(\sigma_1-\sigma_2)\varepsilon$ 的分布范围不小于 $(-\pi,\pi)$，则要求 ε 的分布范围是 ±3 太阴时，这等于高低潮之间平均时间间隔的一半，对于半日潮港这是不可能的。典型的半日潮港，ε 约在 ±1 小时之内，此时 $\cos(\sigma_1-\sigma_2)\varepsilon_k$ 平均约为 $\frac{3}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx = 0.83$。当然，与准确地按 6 太阴时取样的情况相比，已有了实质性的改进，但行列式的状态仍不很好。对于混合潮港，特别是全日潮港，ε 的变动范围可能相当大，系数行列式的状态可能得到很大的改善。这时即使对于满足(15-2)的分潮对，也会分离得比较好。不过对于全日潮显著的地点，也要分两类情况：一种是回归潮平均高潮间隙与分点潮平均高潮间隙相差 3，9，15 或 21 太阴时左右的，系数行列式的状态会相当好；另一种是这两种平均间隙相差 0，6，12 或 18 太阴时左右的，这时系数行列式就不如前一种情况好，但比半日潮港的仍然会好得多。这样看来，原先 Doodson 认为比较棘手的全日潮和混合潮高、低潮数据，实际上要比半日潮高、低

潮数据好得多。

对于潮流测站，如果引入转流时刻，即已知条件(9)，则意味着把取样间隔从 6 太阴时缩小到 3 太阴时左右。这时折叠频率为 4 周/太阴日。这时，表 1 中除了分潮对 ($2N_2$, $2Mk_6$)、(μ_2, $2MS_6$)、(L_2, $2MN_6$) 和 (ν_2, MSN_6) 之外，其余的分潮都不会混淆。如前所述，上列分潮对是比较容易分离的。另一方面，由于长周期和全日分潮对零值发生时刻的影响比对极值发生时刻的影响要大，故半日潮性质的潮汐或潮流的零值发生时间的可变性比极值要大，这使得上述几对分潮也总是能分离得较好。

表 2 是加拿大哈利法克斯 (Halifax) 和维多利亚 (Victoria) 两港高、低潮实测值的分析结果，所用资料长度约为一年。为了比较，表中还列出由实测逐时潮高分析得出的调和常数，这些调和常数的数值引自文献 [6]。哈利法克斯是一个半日潮港，维多利亚则属

表 2　哈利法克斯和维多利亚高低潮观测值的分析结果及其与逐时潮高分析结果的比较

分　潮	哈利法克斯 (63°36′W, 44°39′N)				维多利亚 (123°22W, 48°25′N)			
	高低潮结果 (1973 年观测值)		逐时潮高结果 (23 年平均)		高低潮结果 (1972 年观测值)		逐时潮高结果 (1936 年观测值)	
	H(cm)	g(°)	H(cm)	g(°)	H(cm)	g(°)	H(cm)	g(°)
S_a	4.48	286.7	4.39	255.1	8.53	289.6	5.30	321.2
S_{sa}	2.07	10.7	2.10	131.1	4.21	272.9	6.37	223.7
Mm	3.26	171.8	0.67	150.0	1.92	293.9	1.13	112.0
MS_f	1.58	126.8	0.30	225.0	4.42	254.2	0.34	117.8
M_f	0.73	240.3	0.70	151.2	1.25	143.4	1.77	54.9
Q_1	0.70	39.8	0.49	50.0	5.88	116.9	6.34	126.6
ρ_1					1.77	122.9	1.31	112.6
O_1	5.12	31.7	4.72	40.1	37.43	135.3	37.22	136.0
M_1					1.49	168.6	2.38	141.9
ρ_1	3.35	61.9	3.29	60.7	20.79	143.6	19.93	143.9
S_1	0.46	1.1	0.64	35.0	3.51	268.7	2.10	273.4
K_1	10.21	61.2	10.27	62.1	62.64	147.9	63.00	148.6
J_1	0.85	61.6	0.61	78.7	4.02	156.0	3.32	153.2
OO_1	0.64	97.8			1.77	167.8	1.89	188.7
$2N_2$	1.95	194.6	2.01	201.4	1.71	36.8	1.40	357.6
μ_2	1.77	221.9	1.95	216.1	2.19	358.1	2.83	22.7
N_2	14.30	211.1	14.14	214.6	9.39	53.8	8.69	56.8
ν_2	2.90	221.8	3.66	217.5	1.40	80.0	1.95	65.1
M_2	63.03	234.8	63.09	234.0	37.43	82.4	36.82	84.6
L_2	2.32	274.4	1.98	254.9	1.37	192.4	0.91	181.0
T_2	1.04	252.5	1.31	241.1	1.89	67.5	1.07	131.1
S_2	13.90	262.4	14.17	261.7	11.25	88.1	9.78	92.0
k_2	3.69	258.8	4.05	260.9	2.62	92.4	2.19	104.3
MO_3	0.27	340.9	0.27	49.0	2.16	5.9	2.07	37.2
M_3	0.27	324.0			1.10	64.8	0.43	58.6
MK_3	0.12	146.9	0.43	102.0	1.52	353.4	2.07	22.9
MN_4	1.65	17.5	1.77	343.1	1.04	6.2	0.85	320.2
M_4	4.39	53.7	3.44	41.8	2.04	359.3	1.95	349.2
MS_4	2.13	169.1	1.92	171.9	0.64	9.0	1.13	7.9

于混合全日潮港。由表可看到，对于主要分潮，如 M_2, S_2, N_2, K_2, K_1, O_1, P_1, Q_1 等，高、低潮分析结果与逐时潮高分析结果颇接近。但长周期分潮不够理想，主要是由于低频噪声比较强，且四分日潮与长周期分潮的混淆效应比较严重。总的看来，高、低潮分析结果是有意义的。

三、关于权 w

现在讨论方程组(3)中权 w 的大小与分析结果准确度之间的关系。

虽然在高、低潮数据中给出的是高、低潮时刻的潮高，但实际上包含着误差。如果没有误差，在所给的时刻，潮高可能不是这些值，这时潮高对时间的微商就可能不是零。因此，假定式(12)中 ζ_k 和 λ_k 并不能准确地由等号左边的式子来代表，而分别包含着误差 r_k 和 s_k。此时分析结果，例如 x_1，其误差为

$$\Delta x_1 = \frac{1}{\mathscr{D}}\left[A_{22}\left(\sum_{k=1}^{K} r_k \cos k\sigma_1\tau - w^2\sigma_1\sum_{k=1}^{K} s_k \sin k\sigma_1\tau\right)\right.$$
$$\left. - A_{12}\left(\sum_{k=1}^{K} r_k \cos k\sigma_2\tau - w^2\sigma_2\sum_{k=1}^{K} s_k \sin k\sigma_2\tau\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\mathscr{D}}\left[\sum_{k=1}^{K}(A_{22}\cos k\sigma_1\tau - A_{12}\cos k\sigma_2\tau)r_k\right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{K}(A_{22}w^2\sigma_1\sin k\sigma_1\tau - A_{12}w^2\sigma_2\sin k\sigma_2\tau)s_k\right]$$

如果所有各个 r 或 s 值之间以及 r 和 s 间都互不相关，而且各个 r^2 具有相同的数学期望值 v_ζ，各个 s^2 具有相同的期望值 v_λ，则 Δx_1^2 的数学期望值 v_{x_1} 便等于

$$v_{x_1} = \frac{1}{\mathscr{D}^2}\left[\sum_{k=1}^{K}(A_{22}\cos k\sigma_1\tau - A_{12}\cos k\sigma_2\tau)^2 v_\zeta\right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{K}(A_{22}w^2\sigma_1\sin k\sigma_1\tau - A_{12}w^2\sigma_2\sin k\sigma_2\tau)^2 v_\lambda\right] \tag{24}$$

当 K 足够大，且条件(15)不满足，则有

$$v_{x_1} = \frac{v_\zeta + w^4\sigma_1^2 v_\lambda}{\frac{K}{2}(1 + w^2\sigma_1)^2} \tag{25}$$

不过我们最关心的是那些满足关系(15)，即算不准确的分潮。这时 $(\sigma_1 \pm \sigma_2)\tau = m \cdot 2\pi$，如果 K 足够大，则有

$$v_{x_1} = \frac{1}{\mathscr{D}^2}\left[\frac{K}{2}(A_{22} - A_{12})^2 v_\zeta + \frac{K}{2} w^4 (A_{22}\sigma_1 \pm A_{12}\sigma_2)^2 v_\lambda\right]$$

将(18)代入，可得

$$v_{x_1} = \frac{\sigma_2^2 v_\zeta + v_\lambda}{\frac{K}{2}(\sigma_1 \pm \sigma_2)^2} \tag{26}$$

这表明，所得结果的误差方差值与 w 无关。也即是说，不可能通过调节 w 值的办法来提高

这些分潮之间的可分辨性。从这个意义上来讲，方程(3)不必引入权系数 w。我们在实际计算中均取 $w=1$，而 σ 的单位用弧度/小时表示。

四、高、低潮分析方法的某些实际应用

本方法除了用于对实测高、低潮的分析外，一个较重要的用途是用于编制潮汐、潮流表。当我们只有某些港口的历史的潮汐、潮流表，而没有调和常数时，可用本方法对历史潮汐、潮流表的数据进行分析，然后预报未来的潮汐和潮流。下面是几个实际应用情况的效果比较。

1. 潮流预报　用来分析的数据不但包括最大流的发生时间和流速，而且有转流时刻。

我们曾对许多潮流表上所载的数据进行分析，并预报以后的年份，与用原调和常数预报的结果相比较，都非常接近。表 3 是几个站的两种预报值的偏差，偏差值非常小。

表 3　潮流预报准确度的比较

地　点		马六甲海峡 (长沙洲) 1°30′N 102°54′E	巽他海峡 5°58′S 105°55′E	下关海峡 33°58′N 130°58′E
被分析数据的年份		1976	1976	1977
预报年份		1979	1979	1976
转流时间偏差 (min)	≤10	100%	100%	100%
最大流时间偏差 (min)	≤10	100%	98.6%	100%
	≤20	100%	100%	100%
最大流流速偏差 (kt)	=0.0	96.6%	95.9%	83.1%
	≤0.1	100%	100%	100%

表 4　潮汐预报准确度的比较

地　点		仁　川 37°29′N 126°37′E	伦敦桥 51°30′N 0°05′W	釜石港 39°16′N 141°54′E	雅加达 6°06′S 106°52′E
分析所用资料年份		1978	1978	1978	1976
预报年份		1979	1979	1975	1979
潮　汐　类　型		半日潮 (%)	浅海半日潮 (%)	半日混合潮 (%)	全日潮 (%)
高低潮潮时偏差 (min)	≤10	100	97.3	98.8	80.0
	≤20	100	100	99.9	91.7
	≤30	100	100	100	96.7
高低潮潮高偏差 (m)	=0.0	85.3	50.4	91.6	96.7
	≤0.1	100	95.6	100	100
	≤0.2	100	100	100	100

2. 潮汐预报 用来分析的数据为高、低潮的时间和高度预报值。分析结果被用来预报其它年份的高、低潮。表 4 列出了用本方法对几个不同类型的港口进行预报和用原调和常数预报的偏差情况。可以看出，即便对于受浅水影响较大的港口，其效果也是十分满意的。

参 考 文 献

[1] 王骥、方国洪，1981。不完整逐时潮汐观测记录的分析。海洋学报 **3**: 193—210。
[2] Doodson, A. T., 1928. The analysis of tidal observations. *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A227**: 223—279.
[3] Doodson, A. T., 1951. The analysis of high and low waters. *Intern. Hydrogr. Rev.* **28**(1): 13—77.
[4] Doodson, A. T., 1957. The analysis and prediction of tides in shallow water. *Intern. Hydrogr. Rev.* **33**(1): 85—126.
[5] Horn, W., 1948. Über die darstellung der Gezeiten als funktion der zeit. *Deutsche Hydrgraphische Zeitschrift* **1**(4): 124—140.
[6] International Hydrographic Bureau, 1936. Tides List of Harmonic Constants. Monaco. pp. 560—772.

THE EXTRACTION OF HARMONIC TIDAL CONSTANTS FROM HIGH AND LOW WATERS*

Wang Ji

(Institute of Marine Scientific and Technological Information, SOA Tianjin)

Fang Guchong

(Institute of Oceanology, Academia Sinica, Qingdao)

ABSTRACT

With the application of electronic computers, the extraction of harmonic constants from high and low waters becomes an extremely simple process compared with Doodson's technique. The phenomenon of aliasing is examined by supposing the samples are taken at intervals of exactly 6 lunar hours. The constituents with frequencies satisfying the relation $(\sigma_1 \pm \sigma_2) = 2\sigma_{M_2}$ are inseparable and the coefficient determinant of the normal equations will be singular if the heights only are used. When the values of the first derivatives and the irregularity of the sampling are taken into consideration the condition of the determinant is improved. Large diurnal tides can cause irregularity of sampling and so we are in favour of the separation of the aliased constituents. For tidal current data, if the slack times are available, the results of analysis can be much improved. The results for major constituents derived from the observed high and low waters agree satisfactorily with those from hourly data.

*Contribution No. 1318 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.