

# 杭州湾二维盐度扩散问题的一种数值解法

胡方西 谷国传 潘定安  
汪礼初 徐钧涛 张九超  
(华东师范大学, 上海)

**提要** 本文给出了杭州湾二维盐度扩散问题的一种数值解法。数学模型选用二维流体动力学方程和扩散方程组成的偏微分方程组, 以二维特征偏心差分格式方法计算了两个潮周期的流速与盐度分布, 结果与实测值吻合较好, 可供研究较大海湾盐度及污染扩散问题时参考。

本文根据近期在杭州湾水域进行大规模同步、准同步的水文测验基础, 讨论了杭州湾(金山咀断面—南汇咀—镇海断面)(图1)的盐度扩散问题的数值解, 为研究该区域内水流与盐度分布的规律提供了数学模型, 也为进一步探讨污染物质的扩散问题提供了处理方法。

## 一、数学模型

描述盐度扩散问题的数学模型, 包括二维流体动力学方法<sup>[2]</sup>和扩散方程在内的偏微分方程组。Leedertse<sup>[3]</sup>, 韩曾萃<sup>[1]</sup>和林秉南等<sup>[4]</sup>分别在一种或几种物质的扩散问题及单纯的水流问题中采用过相应的模型。根据具体情况, 我们采用的是以下偏微分方程组

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + u \frac{\partial Z}{\partial x} + v \frac{\partial Z}{\partial y} + H \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial v}{\partial y} = u \frac{\partial Z_0}{\partial x} + v \frac{\partial Z_0}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{gu\sqrt{u^2 + v^2}}{C_s^2 H} + \alpha g H \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{gv\sqrt{u^2 + v^2}}{C_s^2 H} + \alpha g H \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(HS)}{\partial t} + \frac{\partial(HSu)}{\partial x} + \frac{\partial(HSv)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x H \frac{\partial S}{\partial x} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y H \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

收稿日期: 1984年10月30日。

1) 韩曾萃、程杭平、联兆铨, 1983。秦山核电厂冷却循环废水的稀释计算。浙江省河口海岸研究所研究报告(讲义)。

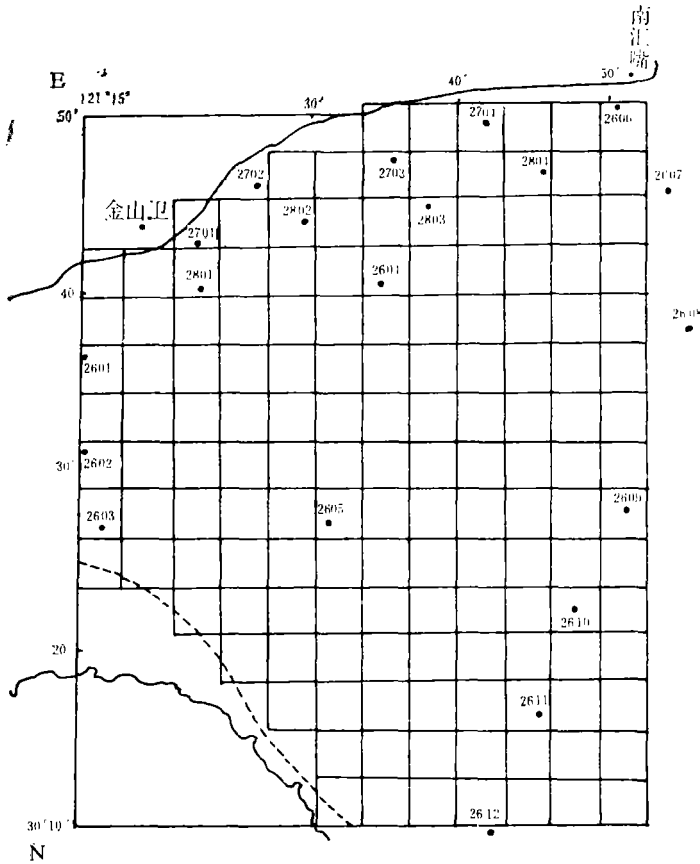


图1 计算区域与网格及测站示意图

我们采用的坐标系为： $xoy$  平面与选定的深度基准面重合， $x$  轴向东； $y$  轴向北； $Z$  轴向上。 $Z$  = 水位； $u$  =  $x$  轴方向流速分量； $v$  =  $y$  轴方向流速分量； $Z_0$  = 海底高程； $H$  = 水深 =  $Z - Z_0$ ； $f$  = 科氏力参数 =  $2\omega \sin \phi$ ； $\omega$  = 地球自转角速度； $\phi$  = 北纬纬度数； $g$  = 重力加速度； $\alpha$  取  $7.6-7.8 \times 10^{-4}$ ； $C_Z$  = 谢才系数； $S$  = 盐度； $D_x$  =  $x$  轴方向上扩散系数； $D_y$  =  $y$  轴方向上扩散系数。

**1. 初始条件**

对于给定的计算区域  $\mathcal{D}$ ：

$$\begin{cases} Z(x, y, t)|_{t=0} = \tilde{Z}(x, y), S(x, y, t)|_{t=0} = \tilde{S}(x, y) \\ u(x, y, t)|_{t=0} = v(x, y, t)|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

**2. 边界条件**

(1) 水-水交界面  $\Gamma_1$  上

$$\begin{cases} Z(x, y, t)|_{\Gamma_1} = Z_A(x, y, t) \\ S(x, y, t)|_{\Gamma_1} = S_A(x, y, t) \end{cases} \quad (6)$$

(1) 水-陆交界面  $\Gamma_2$  上

根据不同情况对流速和盐度扩散施加约束条件。

地形条件, 在计算区域  $\mathcal{D}$  内要给定海底高程  $Z_0(x, y)$ 。

## 二、计算方法和差分格式

由于计算海区盐度梯度很小, 可以近似地认为它们不影响水流的运动。因此, 我们先联立求解(1)–(3)得到  $Z, u, v$  后再代入(4)求出  $S$ 。

我们采用二维特征理论导出第一、第二特征关系式和双特征线法来计算  $Z, u, v$  (参见文献[2])。

### (一) 流体动力学方程组的特征偏心差分格式

采用定步长特征偏心差分格式。先把要计算的区域在坐标平面上标出, 令  $xoy$  坐标平面与深度基准面重合; 取垂直于  $xoy$  平面的  $t$  轴代表时间 (图 2)。

取  $x = i\Delta x, y = j\Delta y, t = k\Delta t$

$(i = 0, 1, \dots, l; j = 0, 1, \dots, j; k = 0, 1, \dots, k)$

我们采取  $\Delta x = \Delta y = \text{常数}; \Delta t = \text{常数}$ 。当  $u_{\pm} = u \pm c > 0$  或  $u > 0$  时用后差, 反之用前差; 当  $v \pm c > 0$  或  $v > 0$  时用后差, 反之用前差。对时间的偏导数用前差, 对其他项均用中心差分。

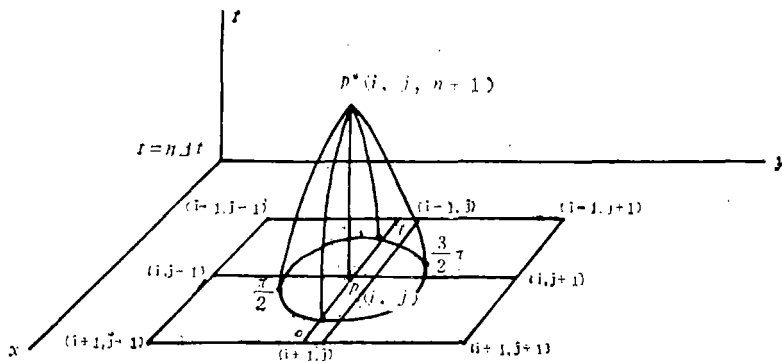


图 2 差分网格图

现将内点、边界点的差分计算公式列示如下。

#### 1. 内点公式

$$\begin{aligned}
 Z_{i,j}^{n+1,(1)} &= Z_{i,j}^n - \frac{u_{i,j}^n}{2} \Delta Z_x + \frac{|u_+| + |u_-|}{4} \Delta^2 Z_x - \frac{H_{i,j}^n}{2} \Delta u_x \\
 &+ \sqrt{\frac{H_{i,j}^n}{g}} \frac{|u_+| - |u_-|}{4} \Delta^2 u_x + N_1 \Delta t - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \\
 &\times H_{i,j}^n (v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} v_{i,j}^n (Z_{i,j+1}^n - Z_{i,j-1}^n) \quad (7) \\
 u_{i,j}^{n+1,(1)} &= u_{i,j}^n - \frac{u_{i,j}^n}{2} \Delta u_x + \frac{|u_+| + |u_-|}{4} \Delta^2 u_x - g \frac{\Delta Z_x}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sqrt{\frac{g}{H_{i,j}^n}} \frac{|u_+| - |u_-|}{4} \Delta^2 Z_x - \frac{\Delta t}{2\Delta y} v_{i,j}^n (u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n) \\
 & + N_2 \Delta t
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 v_{i,j}^{n+1,(1)} & = v_{i,j}^n - \frac{u_{i,j}^n}{2} \Delta v_x + \frac{|u_{i,j}^n|}{2} \Delta^2 v_x - \frac{\Delta t}{2\Delta y} v_{i,j}^n (v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n) \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta y} g (Z_{i,j+1}^n - Z_{i,j-1}^n) + N_3 \Delta t
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{i,j}^{n+1,(2)} & = Z_{i,j}^n - \frac{v_{i,j}^n}{2} \Delta Z_y + \frac{|v_+| + |v_-|}{4} \Delta^2 Z_y - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \\
 & \times u_{i,j}^n (Z_{i+1,j}^n - Z_{i-1,j}^n) - \frac{H_{i,j}^n}{2} \Delta v_y + \sqrt{\frac{H_{i,j}^n}{g}} \\
 & \times \frac{|v_+| - |v_-|}{4} \Delta^2 v_y - \frac{\Delta t}{2\Delta x} H_{i,j}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) + N_1 \Delta t
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{n+1,(2)} & = u_{i,j}^n - \frac{v_{i,j}^n}{2} \Delta v_y + \frac{|v_{i,j}^n|}{2} \Delta^2 u_y - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i,j}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} g (Z_{i+1,j}^n - Z_{i-1,j}^n) + N_2 \Delta t
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 v_{i,j}^{i+1,(2)} & = v_{i,j}^n - \frac{v_{i,j}^n}{2} \Delta v_y + \frac{|v_+| + |v_-|}{4} \Delta^2 v_y \\
 & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{i,j}^n (v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n) - g \frac{\Delta Z_y}{2} \\
 & + \sqrt{\frac{g}{H_{i,j}^n}} \frac{|v_+| - |v_-|}{4} \Delta^2 Z_y + N_3 \Delta t
 \end{aligned} \tag{12}$$

其中所用符号的含义见韩曾萃<sup>1)</sup>的讲义,但其中  $N_1, N_2, N_3$  分别为:

$$\begin{aligned}
 N_1 & = u \frac{\partial Z_0}{\partial x} + v \frac{\partial Z_0}{\partial y} \\
 N_2 & = -\frac{gu\sqrt{u^2 + v^2}}{C_x^2 H} + fv - \alpha g H \frac{\partial S}{\partial x} \\
 N_3 & = -\frac{gv\sqrt{u^2 + v^2}}{C_x^2 H} - fv - \alpha g H \frac{\partial S}{\partial y}
 \end{aligned}$$

所对应的差分公式。

利用公式(7)–(12)可得:

$$\begin{cases}
 Z_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (Z_{i,j}^{n+1,(1)} + Z_{i,j}^{n+1,(2)}) \\
 u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^{n+1,(1)} + u_{i,j}^{n+1,(2)}) \\
 v_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} (v_{i,j}^{n+1,(1)} + v_{i,j}^{n+1,(2)})
 \end{cases} \tag{13}$$

1) 见本文 329 页脚注。

## 2. 边界点公式

根据不同的边界情况, 对基本方程作相应的简化, 然后取与微分方程对应的差分方程。

### (二) 盐度扩散方程的差分格式

#### 1. 内点格式

$$\begin{aligned}
 S_{i,j}^{n+1} = & S_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x \cdot H_{i,j}^n} [-u_{i,j}^{n+1}(S_{i+1,j}^n H_{i+1,j}^n - S_{i-1,j}^n H_{i-1,j}^n) \\
 & + |u_{i,j}^{n+1}| (S_{i+1,j}^n H_{i+1,j}^n - 2S_{i,j}^n H_{i,j}^n + S_{i-1,j}^n H_{i-1,j}^n)] \\
 & + \frac{\Delta t}{2\Delta y \cdot H_{i,j}^n} [-v_{i,j}^{n+1}(S_{i,j+1}^n H_{i,j+1}^n - S_{i,j-1}^n H_{i,j-1}^n) \\
 & + |v_{i,j}^{n+1}| (S_{i,j+1}^n H_{i,j+1}^n - 2S_{i,j}^n H_{i,j}^n + S_{i,j-1}^n H_{i,j-1}^n)] \\
 & + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} D_1 [u_{i,j}^{n+1}(S_{i+1,j}^n - 2S_{i,j}^n + S_{i-1,j}^n) \\
 & + \frac{1}{4} (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1})(S_{i+1,j}^n - S_{i-1,j}^n)] H_{i,j}^n \\
 & + \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} D_2 [v_{i,j}^{n+1}(S_{i,j+1}^n - 2S_{i,j}^n + S_{i,j-1}^n) \\
 & + \frac{1}{4} (v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1})(S_{i,j+1}^n - S_{i,j-1}^n)] H_{i,j}^n \\
 & + \frac{\Delta t}{4(\Delta x)^2} D_1 u_{i,j}^{n+1} (H_1 - H_2)(S_{i+1,j}^n - S_{i-1,j}^n) \\
 & + \frac{\Delta t}{4(\Delta y)^2} D_2 v_{i,j}^{n+1} (H_3 - H_4)(S_{i,j+1}^n - S_{i,j-1}^n)
 \end{aligned}$$

其中:  $H_1 = Z_{i+1,j}^{n+1} - Z_{0i+1,j}$ ;  $H_2 = Z_{i-1,j}^{n+1} - Z_{0i-1,j}$ ;  $H_3 = Z_{i,j+1}^{n+1} - Z_{0i,j+1}$ ;  $H_4 = Z_{i,j-1}^{n+1} - Z_{0i,j-1}$ ;  $D_1, D_2$  为常数。

#### 2. 边点格式

(1) 水-陆边界: 由于  $u, v$  为零或其中之一值为零, 适当修改内点格式中的中心差分为前后差分, 可得相应公式, 参见文献[1]。

(2) 水-水边界: 边界数据输入。

## 三、水流计算

### (一) 输入资料

#### 1. 深度基准面的确定

原海图所标明的海底高程与理论计算所要求的坐标系下的值含义不同。为计算方便, 以金山咀的深度基准面作为水位的起算标准面。

#### 2. 初始条件的处理

流速分量  $u$  和  $v$  的初始值, 我们按照习惯令其为零。对水位  $z$  的初始值不采取习惯上令其为零的做法, 而是以初始时刻给定的、边界上的水位值进行线性插值, 来求得整个

计算域上的初始水位值。这样,使计算结果收敛得较快。

### 3. 边界条件的处理

(1) 以水位  $z$  的东、南、西边界每小时 (在计算时间间隔内) 的值作为输入数据,按照

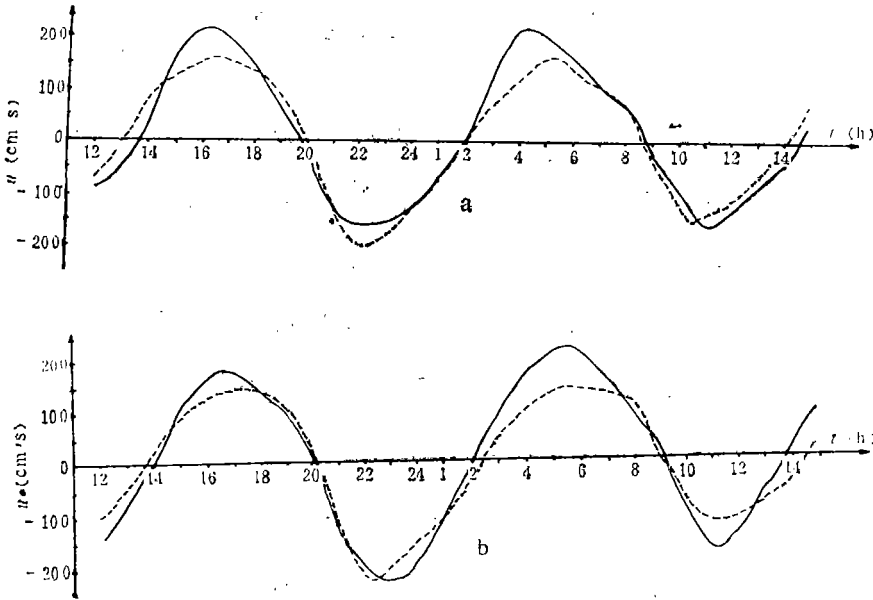


图3 两站流速过程线 (1982.7.21—22)

a. 2605 站 b. 2604。 —— 实测曲线; ----- 计算曲线。

选定的时间步长将时间分段,并对每个时间段进行抛物线型插值;(2)在由水位求流速的过程中,在边界点上采用松弛迭代法,以保证差分方程的解逼近微分方程的解。

### 4. 谢才系数的选择

经过计算和适当调整,该计算区域的谢才系数  $C_z$  取 120—150 左右。

### (二) 水流速度的验证

在仅给定边界水位值的条件下,我们选用 1982 年 7 月 21 日 7 时至 7 月 22 日 9 时的两个潮进行流速的验证计算。根据 Lax 的差分格式稳定性必要条件,选取的时间步长和空间步长分别为

$$\Delta t = 300s, \Delta x = \Delta y = 5km$$

以 2604 及 2605 两个测站的实测流速与计算流速的结果作比较 (图 3), 可以看出: (1) 有 86% 的点计算值与实测值相对误差在 20% 以下; (2) 由于 2604 靠近北边界受长江流影响较大, 故误差大的点以 2604 与 2605 作比较, 前者居多; (3) 流速的绝对值较小时计算值与实测值符合得较好, 反之就符合得较

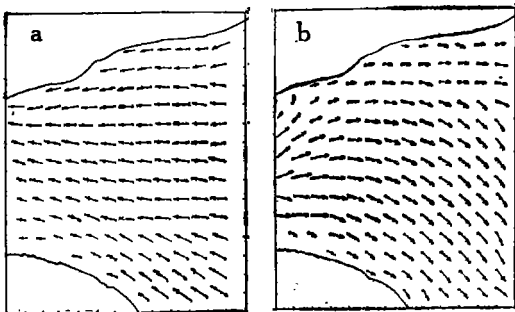


图4 流速分布图

a. 涨潮 (1982年7月21日23时);  
b. 退潮 (1982年7月22日5时)。

差;(4)涨潮时计算值与实测值符合得较好,退潮时符合得较差;(5)第一个潮(7月21日13时30分至7月22日2时左右)时计算值与实测值符合得较好,第二个潮符合得较差。

以西边界金山断面作为标准,我们选择了7月21日23时(涨潮流速最大时刻)和7月22日5时(退潮流速最大时刻)两个时刻,根据计算值描绘了流场图(图4)。由图可知:(1)涨潮时,流向基本上与岸边平行。北部与南部的潮流速度均比中间小,中间潮流速度由东向西递增;(2)退潮时,主流为东南方向。靠近西边界处以东北方向退潮为主,随着点的由西向东移动,退潮流方向则由东北转为东再转为东南。退潮流速也是中间大,两旁逐渐降低(图4)。

## 四、盐度计算

### 1. 初始条件的处理与边界条件的选取

我们以初始时刻边界上给定的盐度值进行线性插值的方法,来得到整个计算区域盐度  $S$  的初始值,使计算结果收敛的速度加快。 $S_A(x, y, t)$  均采用实测值加以线性插值得到。

### 2. 扩散系数 $D_x, D_y$ 的选择

经过计算过程中的比较分析,我们利用如下扩散系数的公式

$$D_x = D_1 u H, D_y = D_2 v H$$

在计算区域内部选  $D_1$  为 600 左右,  $D_2$  为 1000 左右;在北部边界受长江流影响的点上选  $D_1$  为 450 左右,  $D_2$  为 800 左右;靠近东部扩散系数选得大些,向中间向西扩散系数选得小些。计算表明这样选取的扩散系数较能符合实际情况。

### 3. 盐度的验证

我们选择有代表性的 2610 和 2611 两个测站的实测盐度与计算所得的盐度值作比

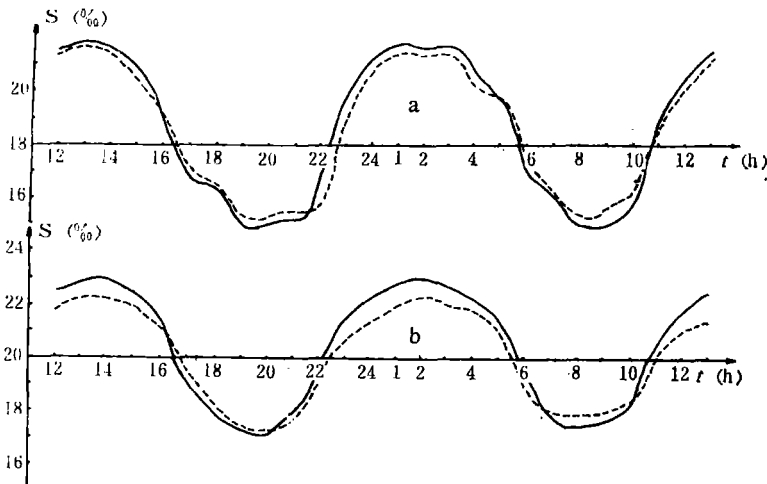


图5 两站盐度变化曲线

a. 2610 站(落潮, 1982 年 7 月 21 日 17 时); b. 2611 站(涨潮, 1982 年 7 月 22 日 2 时)

—— 实测曲线; ----- 计算曲线。

较。以 1982 年 7 月 21 日 12 时至 7 月 22 日 13 时的两个潮周期内的盐度随时间的变化曲线作验证, 见图 5。由图可知: (1) 盐度随潮汐的变化而呈现周期性的变化, 其变化周

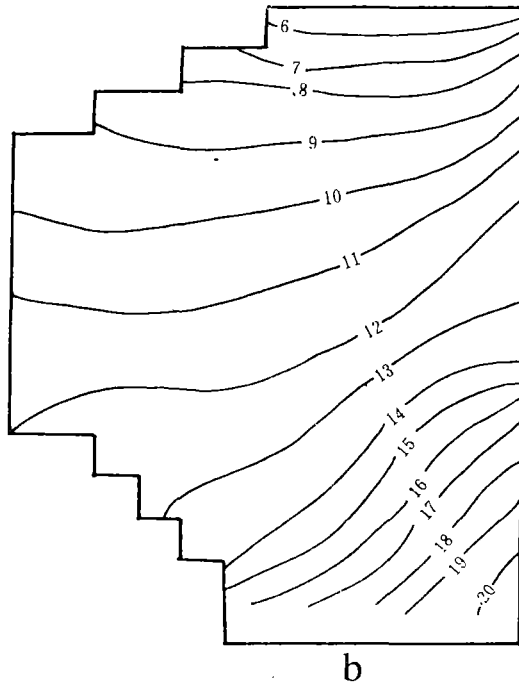
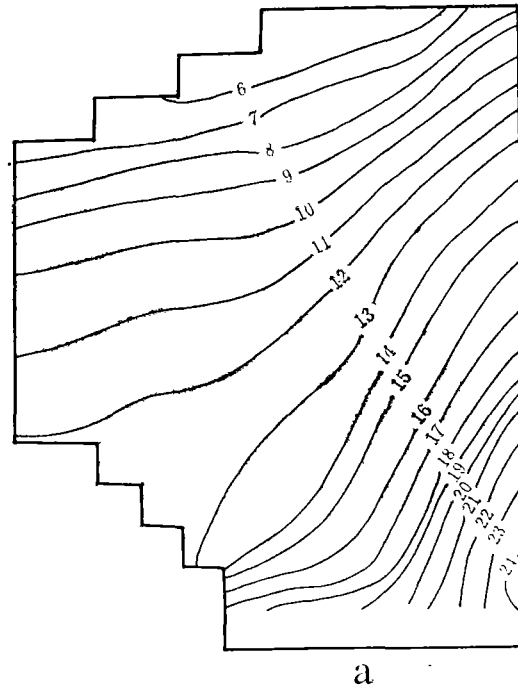


图 6 等盐度线图 (‰)

a. 涨潮(1982年7月22日2时); b. 退潮(1982年7月21日17时)。



期与潮周期大致相同;(2)盐度的计算值与实测值符合得很好,其最大相对误差在 10% 以内。因此可以认为:本模型适合于作短期盐度预报的数学模型。

图 6 描绘了 1982 年 7 月 21 日 17 时(退潮)与 1982 年 7 月 22 日 2 时(涨潮)两个有代表性时刻的整个计算区域内的等盐度线。由图可知:(1)涨潮时,等盐度线有向西北方向凸出的趋势;退潮时,等盐度线有或向东南方向凸出或将曲线展平的趋势。(2)涨潮时,整个区域的盐度值增加;退潮时,整个区域的盐度值降低。(3)在靠近北部边界受长江径流影响较大的条形区域内,等盐度线的分布规律与其他区域不一样,退潮时这个条形区域的盐度值有东低西高的趋势,与实际观测基本符合。

## 五、小 结

1. 由于盐度浓度很小,对水流影响也很小。在计算步骤上,先求解水力学方程,再求解盐度的对流扩散方程是可行的。在计算方法上,区域内部采用特征偏心差分格式,在边界点上用松弛迭代法来调整。计算结果表明,精度是可以保证的。在盐度扩散方程的计算中,没有引进交替方向法,而是采用与水位、流速同步计算的简化方法,对计算结果无多大影响。

2. 虽然水流对盐度的影响处于主要地位,但二阶扩散项也有不可忽视的影响, $D_1$  和  $D_2$  的取值要在一定范围之内。计算表明在其他条件相同的情况下,如果  $D_1$  和  $D_2$  超出一定范围,就会影响计算精度。

3. 由于杭州湾是强混合区域,因此本文仅采取 5m 层进行验证计算,结果表明,本文采用的水力学-扩散偏微分方程组及相应的计算方法和差分格式,对处理杭州湾内部区域上的水流和盐度分布问题是适用的。但靠近北边界狭长区域(受长江流影响较大)的计算与实际情况有差别,尚待今后作进一步的探讨。

## 参 考 文 献

- [1] 林秉南、赵雪华、施麟宝,1980。河口建坝对毗邻海湾潮波影响的计算(二维特征理论法)。水利学报 3: 16—25。
- [2] Danbert, A. et O. Graff, 1967. Quelques aspects des Ecoulement presque horizontaux u'deux dimensions en plan et non permanents. *Application aux Estuaries la Howille Blanche* 8: 847—859.
- [3] Leendertse, J. J., 1970. A Water-quality Simulation Model for Well-mixed Estuaries and Coastal Seas. Vol. I. Principles of computation. Rand Corporation, RM-6230-RC. pp. 1—69.

## A NUMERICAL SOLUTION FOR TWO-DIMENSION SALINITY DIFFUSION IN HANGZHOU BAY

Hu Fangxi, Gu Guochuan, Pan Dingan Wang Lireng,

Xu Juntao and Zhang Jiuchao

*(East China Normal University, Shanghai)*

### ABSTRACT

This Paper intends to advance a numerical solution for two-dimension salinity diffusion in the Hangzhou Bay. The mathematical model selected employs partial differential equations consisting of two-dimension fluid dynamical equations and diffusion equations and calculates velocity and salinity distributions within two tidal cycles by using a partially differencing scheme. The calculation results coincide with observation values. The model and calculation method may be used as reference on problems concerning the salinity and pollution diffusion in larger estuaries.