

海浪谱估计最优设计平稳海浪过程

李陆平

(国家海洋局第一海洋研究所, 青岛)

提要 本文基于谱理论, 提出了使谱估计的相对均方误差为最小的确定滞后数 m 的理论依据; 建立了最优估计中相对均方误差 M 、滞后数 m 和波面记录有效波周期之间的关系。并以实测波面记录, 分别以 Bartlett 估计、矩形估计和 Tukey 估计作出的谱讨论了最优设计的使用效果。

在平稳海浪过程谱估计中, 一般使用以下两种谱估计方法: 以有限的样本长度通过对其自相关的估计, 并进而用此估计值求谱; 先求出周期图, 然后用一定的权函数对周期图作加权平均。由于以相关函数和周期图作出的谱估计是渐近无偏而非渐近一致的估计, 所以, 为了得到渐近无偏和渐近一致的估计, 就必须寻求对周期图进行平均的权函数以及相关函数的权函数, 并固定所涉及的参数 m 的数值。目前, 国内外常用的几种谱图估计中, 因估计的偏度 $b_N(\omega) \propto \frac{1}{m^2}$ 和方差 $D^2[\hat{S}(\omega)] \propto \frac{m}{N}$ 对 m 的要求是矛盾的, 故在平稳海浪过程的谱估计工作中, m 的选取问题一直受到重视。Carvalho 等^[2]和 Wilson 等^[3]曾对 m 的选取问题进行了较系统的研究, 但在对 m 的经验选取中手续很繁, 既缺乏理论依据, 又不是一种公认的办法。因此, 在理论上对 m 的选取问题至今未得到解决。

为探讨平稳海浪过程谱估计的相对均方误差 M 和选取滞后数 m 的客观标准, 本文将 Grenander 和 Rosenblatt^[3] 以及 Priestley^[5] 提出的使谱估计的均方误差为最小选取 m 的方法应用到海浪中来, 基于海浪谱的理论, 提出了以谱形宽度参量 $B_f(\omega)$ 表示的, 将谱估计的最大相对均方误差减少到最小的, 确定 M 和 m 的依据, 建立了最优估计中, M , m 和波面记录有效波周期之间的关系。并以实测波面记录, 分别以 Bartlett 估计、矩形 (FFT) 方法估计和 Tukey 估计作出的谱讨论了最优设计中不同谱估计方法的使用效果。

一、相对均方误差 M 及滞后数 m 的选取

在本文的讨论中, 海浪谱估计的质量是以 M 来量度的:

$$M = \frac{E\{\hat{S}(\omega) - S(\omega)\}^2}{S^2(\omega)} = \frac{\{b_N(\omega)\}^2}{S^2(\omega)} + \frac{D^2(\hat{S}(\omega))}{S^2(\omega)} \quad (1)$$

其中, $b_N(\omega)$ 为偏度; $D^2(\hat{S}(\omega))$ 为方差。

Grenander 和 Rosenblatt^[3] 已证明, 对于正态过程, 估计谱 $\hat{S}(\omega)$ 的方差为:

$$D^2(\hat{S}(\omega)) = \frac{4\pi S^2(\omega)}{N} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(\theta) d\theta \quad (2)$$

偏差为:

$$b_N(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \{S(\theta) - S(\omega)\} W(\theta - \omega) d\theta \quad (3)$$

其中, $W(\theta)$ 为权函数; $W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(N-1)}^{N-1} \lambda_{\tau} e^{i\tau\theta}$; λ_{τ} 为权序列。自式(3)看出, 若对 $S(\theta)$ 不作出某种假定的形式, 则无法估计谱的偏差。

最常采用的 Bartlett 估计、矩形估计和 Tukey 估计的权序列分别为:

$$\lambda_{\tau} = \begin{cases} 1 - \frac{|S|}{m} & |S| \leq m \\ 0 & |S| > m \end{cases} \quad (4)$$

$$\lambda_{\tau} = \frac{\sin \nu h}{\nu h} \quad \nu = 0, \pm 1, \dots, \pm N \quad (5)$$

$$\lambda_{\tau} = \begin{cases} 1 - 2a + 2a \cos \frac{\pi\tau}{m} & |\tau| < m \\ \frac{1}{2} - 2a & |\tau| = m \\ 0 & |\tau| > m \end{cases} \quad (6)$$

于是, 分别得到三种估计的相对均方误差^[2,3,6]:

$$\text{Bartlett 估计} \quad M = \frac{\partial^2 S(\omega)}{\partial \omega^2} / S(\omega) \cdot \frac{1}{m^2} + \frac{2m}{3N} \quad (7)$$

$$\text{矩形估计} \quad M = \left[\frac{\partial^2 S(\omega)}{\partial \omega^2} / S(\omega) \cdot \frac{\pi^2}{6m^2} \right]^2 + \frac{m}{N} \quad (8)$$

$$\text{Tukey 估计} \quad M = \left[\frac{\partial^2 S(\omega)}{\partial \omega^2} / S(\omega) \cdot \frac{0.23\pi^2}{m^2} \right]^2 + \frac{0.79m}{N} \quad (9)$$

m 的选取有两种方法:

(1) 根据 Grenander 和 Rosenblatt 的研究结果, m 具有以下形式:

$$m = KN^{\alpha} \quad (10)$$

其中, K 为常数, 在 Bartlett 估计中, α 的最优值为 $\frac{1}{3}$; 在矩形估计和 Tukey 估计中, α 的最优值为 $\frac{1}{5}$ 。将式(10)代入式(7—9), 并对 K 求导数, 即得使估计谱的相对均方误差为最小的 K 值, 再将 K 代入式(10)即得不同估计的最优 m 值。

(2) 基于 Priestley^[5] 和 Tayfun 等^[6] 在平稳随机(海浪)过程和非平稳随机(海浪)过程谱估计的研究结果, 取:

$$B_f(\omega) = \left| \frac{S(\omega)}{\partial^2 S(\omega)} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

并定义 $B_f(\omega)$ 为谱形宽度参量。将(11)式代入(7—9)式, 并对 m 求导数, 即得最优 m 值。

采用上述两种方法得到的最优 m 值和相对均方误差分别为:

$$\text{Bartlett 估计} \quad m_1 = \sqrt[3]{\frac{3N}{\{B_f(\omega)\}^2}}, \quad M_1 = 1.4422N^{-\frac{1}{3}}/\{B_f(\omega)\}^{\frac{1}{3}} \quad (12)$$

$$\text{矩形估计} \quad m_2 = 1.61N^{\frac{1}{2}}/\{B_f(\omega)\}^{\frac{1}{2}}, \quad M_2 = 2.012N^{-\frac{1}{2}}/\{B_f(\omega)\}^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$\text{Tukey 估计} \quad m_3 = 1.93N^{\frac{1}{2}}/\{B_f(\omega)\}^{\frac{1}{2}}, \quad M_3 = 1.866N^{-\frac{1}{2}}/\{B_f(\omega)\}^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

上式表示,在最优谱估计中, m 和 M 取决于 $B_f(\omega)$ 和样本个数;在样本个数确定的条件下, M 和 m 取决于 $B_f(\omega)$ 。又 $B_f(\omega)$ 是频率的函数,即在最优谱估计中, m 的选取和估计质量依赖于频率。这使得在对同一过程进行谱估计时,对不同点上的谱密度估计,由最小均方误差所确定的 m 值不一样,这将给具体的数字运算带来很大麻烦。然而,实际上,我们并不关心某一特定频率的谱值,而希望估计一个连续频率域上的谱。此时,必须选取 $W(\theta)$ 的宽度,使之若 $S(\omega)$ 在 ω_1 和 ω_2 有两个不同的峰,估计谱 $\hat{S}(\omega)$ 在 ω_1 和 ω_2 附近也有两个不同的峰。显然,必须保证选取的 $W(\theta)$ 的宽度不大于最窄的峰的宽度。

在式(12—14)所表示的最优估计中,当取 $B_{fs}(\omega) = \min\{B_f(\omega)\}$ 时,其估计质量是最优估计中最差的,而由 $B_{fs}(\omega)$ 所确定的 m 值,则是将最大相对均方误差减少到最小的设计参量。于是得出:

$$m_1^* = \sqrt[3]{\frac{3N}{\{B_{fs}(\omega)\}^2}}, \quad M_1^* = 1.4422N^{-\frac{1}{3}}/\{B_{fs}(\omega)\}^{\frac{1}{3}} \quad (15)$$

$$m_2^* = 1.61N^{\frac{1}{2}}/\{B_{fs}(\omega)\}^{\frac{1}{2}}, \quad M_2^* = 2.012N^{-\frac{1}{2}}/\{B_{fs}(\omega)\}^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

$$m_3^* = 1.93N^{\frac{1}{2}}/\{B_{fs}(\omega)\}^{\frac{1}{2}}, \quad M_3^* = 1.866N^{-\frac{1}{2}}/\{B_{fs}(\omega)\}^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

容易证明, $M_i \leq M_i^* (i = 1, 2, 3)$ 。这表明,以 m_1^*, m_2^*, m_3^* 为滞后数作出的谱估计是将最大相对均方误差减少到最小的最优估计,而估计的相对均方误差最大不超过 M_1^*, M_2^*, M_3^* 。

由式(7—9)和式(15—17)可得到最优估计中,其偏度误差和方差误差之比:

$$\text{Bartlett 估计} \quad \frac{m_1^*}{3N} : \frac{2m_1^*}{3N} \quad (18)$$

$$\text{FFT 估计} \quad 0.25 \frac{m_2^*}{N} : \frac{m_2^*}{N} \quad (19)$$

$$\text{Tukey 估计} \quad 0.24 \frac{m_3^*}{N} : \frac{m_3^*}{N} \quad (20)$$

这说明,在平稳海浪过程谱估计最优设计中,偏度误差较方差误差对 m 值的选取更加敏感。因此,在海浪谱估计中,应维持偏度和方差的适当平衡。但在常规谱估计中,完全忽略了偏度误差,谱估计设计只依赖于方差。采用本文提出的设计参量进行谱估计时,偏度和方差同时进行考虑,并达到了它们之间的平衡。

二、基于海浪谱理论导出的 $B_f(\omega)$

在平稳海浪过程谱估计最优设计中, m 的选取取决于 $B_f(\omega)$ 值。因此,为得到最优估计,必须在谱估计之前,预先了解 $B_f(\omega)$ 值。

许多作者基于大量实测资料证明,成长风浪谱和充分成长风浪谱其谱形满足谱的相似定律^[1,4]。因此,本文认为,基于谱的相似理论,近似估计出 $B_f(\omega)$,并将其应用于平稳海

浪过程谱估计, 确定 m 和 M , 在理论上是合理的。

在迄今已提出的许多风浪谱中, 尽管其谱形式各有不同, 但都是单峰谱, 并可表示为 Neumann 和 JONSWAP 谱形式。将 Neumann 谱形式 $S(\omega) = A\omega^{-p}e^{-B\omega^{-q}}$ 代入 (11) 式, 并令 $K = \frac{\omega}{\omega_*}$, 其中 ω_* 为峰频率, 无因次化后即得:

$$\frac{B_f(\omega)}{\omega_*} = K / \{ |(p+1)p - (2p+q+1)p/K^q + p^2/K^{2q}| \}^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

其无因次谱形宽度参量 $\frac{B_f(\omega)}{\omega_*}$ 与无因次频率 K 关系曲线如图 1 示。采用同样手续, 即可得到由 JONSWAP 谱形式导出 $\frac{B_f(\omega)}{\omega_*}$ 与 K 的关系式:

$$\frac{B_f(\omega)}{\omega_*} = K / \left\{ \left| 30 - 75/K^4 + 25/K^3 - \ln \gamma \cdot e^{-\frac{(K-1)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left[\frac{10(1-K) + K^3(2-K)}{\sigma^2} \dots \right] \right| \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

其中, γ 为升高因子; σ 为峰形参量。当 $\gamma = 1$ 时, 式(22)化为 p - M 谱的结果。

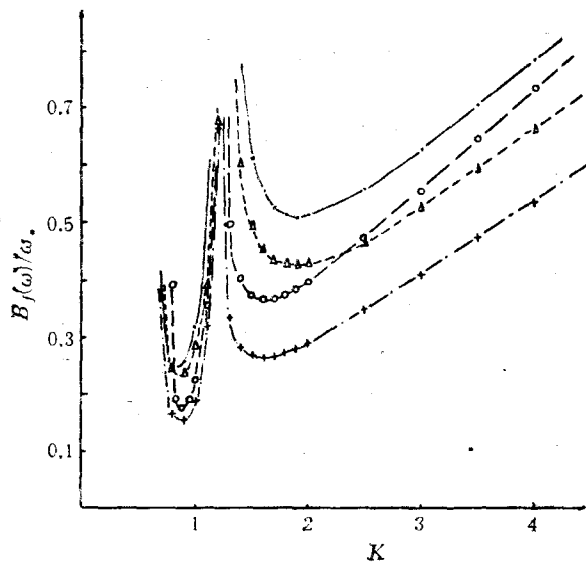


图 1 Neumann 谱形式中无因次谱形宽度参量与无因次频率关系曲线

Fig. 1 The relation between non-dimensional spectrum bandwidth parameter and non-dimensional frequency in the form of Neumann spectra

● 国家科委波浪组; ○ p - M ; △ 文圣常; + Стрекачов-Крылов. Bretschneider

图 1 表示, 不同 p, q , 由式(21)表示的 $\frac{B_f(\omega)}{\omega_*}$ 随 K 的变化趋势大致相似, 在峰频率附近, $\frac{B_f(\omega)}{\omega_*}$ 取最小值, 取值范围为 0.157—0.243, 平均值为 0.196。对充分成长谱, 一

般取 p - M 谱形式,此时, $\frac{B_{fs}(\omega)}{\omega_*} = 0.174$ 。在不了解海浪过程的背景时,本文建议取 $\frac{B_{fs}(\omega)}{\omega_*} = 0.196$ 。此时,为得到 $B_{fs}(\omega)$ 值,问题归结为求峰频率。基于 TOBA^[7] 的经验结果,取 $\omega_* = \frac{2\pi}{1.05T_s} \doteq 6T_s^{-1}$, T_s 为有效波周期。于是,给定海浪过程,即可求出 $B_{fs}(\omega)$ 值。

三、谱估计最优设计

基于 Neumann 谱形式导出的 $B_{fs}(\omega)$ 值,即可确定上述三种最优估计的 m 和 M 。

Bartlett 估计	$m_1^* = 1.5N^{\frac{1}{3}}T_s^{\frac{2}{3}} \sim 1.12N^{\frac{1}{3}}T_s^{\frac{2}{3}}$
	$M_1^* = 1.5N^{-\frac{2}{3}}T_s^{\frac{2}{3}} \sim 1.12N^{-\frac{2}{3}}T_s^{\frac{2}{3}}$
矩形估计	$m_2^* = 1.69N^{\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}} \sim 1.19N^{\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}}$
	$M_2^* = 2.11N^{-\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}} \sim 1.49N^{-\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}}$
Tukey 估计	$m_3^* = 2.02N^{\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}} \sim 1.43N^{\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}}$
	$M_3^* = 1.95N^{-\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}} \sim 1.33N^{-\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}}$

由此可得最优估计中, M , m 和波面记录有效波周期之间的关系(图2)。图中还附有以 $m = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ 作出的最优估计中,相对均方误差与有效波周期关系曲线。

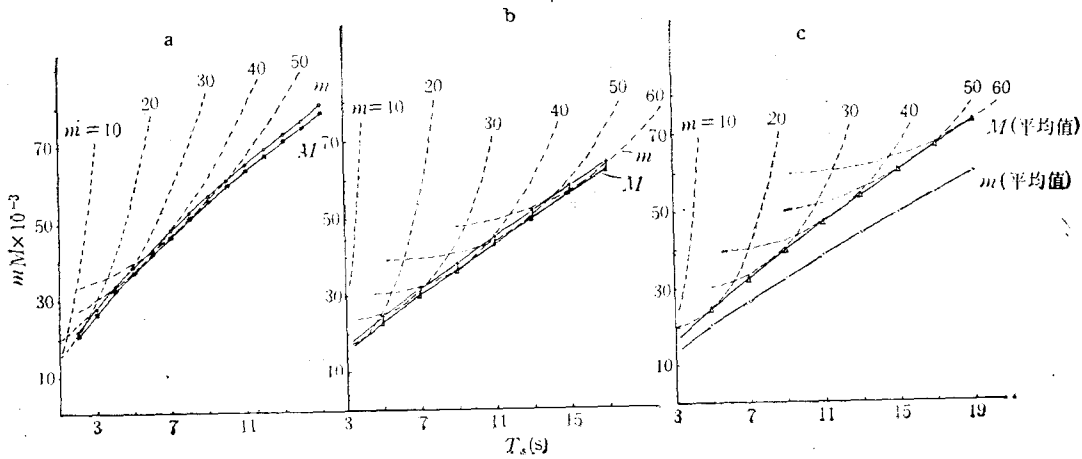


图2 $\Delta t = 1s$ 时,三种谱估计中滞后数 m 和相对均方误差 M 与有效波周期关系
 Fig. 2 The relation between the relative mean square error M , the lag number m , and the significant wave period T_s ($\Delta t = 1s$)
 a. Bartlett 估计; b. Tukey 估计; c. 矩形估计。

由(1)–(9)式容易看出,上述的结果是在 $|\omega| < \pi$, 即 $\Delta t = 1$ 时导出的。将比尺进行适当的变换则可得到 $\Delta t = h$, 即 $|\omega| < \frac{\pi}{h}$ 的情形了。

在 $\Delta t = h$ 的情况下, 即 $|\omega| < \frac{\pi}{h}$ 时, 谱估计的偏度和方差为^[3]:

$$E\hat{S}_h(\omega) - S_h(\omega) = hb_N(\omega h)$$

$$E[S_h(\omega) - E\hat{S}_h(\omega)]^2 = h^2 D^2(\hat{S}(\omega h))$$

根据(7—9)式即可得到 $\Delta t = h$ 时三种谱估计的相对均方误差。再利用(10),(11), 图1和 TOBA 的经验关系, 则可得到三种最优估计的滞后数 m , 其结果如下:

$$\text{Bartlett 估计} \quad m_1^* = 1.5N^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}T_s^{\frac{2}{3}} \sim 1.12N^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}T_s^{\frac{2}{3}}$$

$$\text{矩形估计} \quad m_2^* = 1.69N^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}} \sim 1.19N^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{Tukey 估计} \quad m_3^* = 2.02N^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}} \sim 1.43N^{\frac{1}{2}}h^{-\frac{1}{2}}T_s^{\frac{4}{3}}$$

四、最优设计使用效果的比较和讨论

下面以实测波面记录, 分别用 Bartlett 估计、矩形估计、Tukey 估计的最优设计作谱比较并且讨论三种谱估计最优设计的使用效果。波面记录有效波周期 $T_s = 6.3s$, $N = 1024$, 取样间隔 $\Delta t = 1s$ 。根据本文的研究结果, 在最优设计中, m 的取值范围: Bartlett 估计, 38—52; 矩形估计, 21—30; Tukey 估计, 25—34。以 Bartlett 估计 $m = 38.52$, 矩形估计 $m = 21.30$, Tukey 估计 $m = 25.34$, 作出的谱估计绘于图3中。图3表明, 采用不同的谱估计方法, 由最优设计作出的谱, 其谱形基本趋于一致, 谱峰频率位置大致

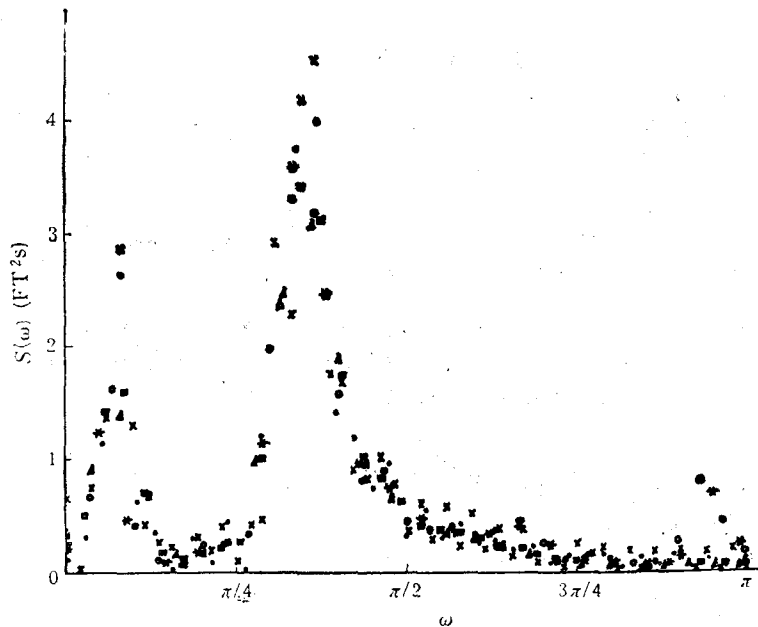


图3 平稳海浪过程谱估计最优设计 Bartlett 估计、矩形估计、Tukey 估计的比较

Fig. 3 Comparison of the optimal design of spectral estimates for stationary wave processes

* $m = 21$ FFT; Δ $m = 25$ Tukey; \bullet $m = 38$ Bartlett.
 \circ $m = 30$ FFT; \square $m = 34$ Tukey; \times $m = 52$ Bartlett.

相同;由谱方法作出的平均波高、平均周期和谱宽度参量结果基本符合。矩形估计和 Tukey 估计作出的峰频谱值大致相等,而 Bartlett 估计作出的峰频谱值较其它两种谱估计方法偏高。在高频部分, Tukey 估计较矩形估计和 Bartlett 估计更趋于稳定。在矩形估计中,高频部分出现明显次峰;而在 Bartlett 估计中,高频部分出现锯齿形。本文认为,在最优估计中,由不同谱估计方法作出的谱在谱峰高度、谱的高频部分出现这种差异是容易理解的。因为,在最优设计中,不同谱估计方法的偏度误差和方差误差之间的比例不同。如在 Bartlett 估计中,其最优设计中偏度和方差之比为 1:2,从而与矩形估计(偏度和方差之比为 1:4)和 Tukey 估计(偏度和方差之比为 1:4.2)比较时,方差对 m 的选取显得较为敏感,这就使得用 Bartlett 估计时,谱峰值估计高于其它两种方法的估计值,而高频部分也显示出较大的方差。

图 4 则以相同滞后数,不同估计方法作出的谱比较各种谱估计方法的使用效果。结果表明,三种估计方法作出的谱曲线趋势一致。

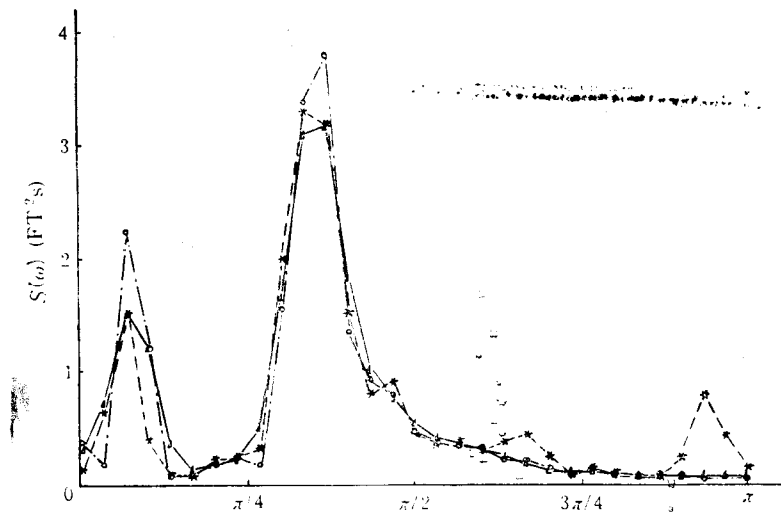


图 4 Bartlett 估计、矩形估计、Tukey 估计的比较 ($m = 30$)

Fig. 4 Comparison of Bartlett, Rectangular and Tukey estimates ($m = 30$)

○ Bartlett; * FFT; △ Tukey.

总的说来,矩形估计和 Tukey 估计作出的谱在峰频附近更加接近,而 Bartlett 估计的谱值偏高;但高频部分, Tukey 估计和 Bartlett 估计作出的谱值更加接近,而矩形估计(FFT 方法)作出的谱表现出较大的方差。

必须指出,本文的结果是假定谱形有 Neumann 谱形式和 TOBA $\omega_* = 6T_s^{-1}$ 的经验关系得到的。加上这两个假定必然要引进新的误差。这是本文提出的最优谱估计的缺陷。但随着观测和分析方法的改进,以及对谱的某些特征的了解,可以预期谱的形式将日益完善,峰频率和有效波周期之间的关系也会更加可靠,从而本文提出的海浪谱估计最优设计的可靠性也会得到提高。

参 考 文 献

- [1] 文圣常、余宙文, 1984。海浪理论与计算原理。科学出版社, 228—251 页。
- [2] Carvalho, M. M., F. S. Ramos and C. C. Moraes, 1970. Spectral Computations on Pressure Wave Gauge Records Proc. 12th Coastal Eng. Conf., Vol. 1, Chapter 5. N. Y., 65—83.
- [3] Grenander, U. and M. Rosenblatt, 1957. Statistical Analysis of Stationary time Series. JOHN WILEY & SONS, INC. 300pp.
- [4] Moscowitz, L., 1964. Estimates of the power spectrum for fully developed seas for wind speeds of 20 to 40 Knots. *Jour. Geophys. Res.* 69(24): 5161—5179.
- [5] Priestley, M. B., 1962. Basic consideration in the estimation of spectra. *Technometrics* 4(4): 551—564.
- [6] Tayfun, M. A., C. Y. Yang and G. C. Hsiao, 1974. Optimal Design for Wave Spectrum Estimates. *Proc. 14th Coastal Eng. Conf.*, Vol. 1, Chapter 15. N. Y., 280—297.
- [7] Toba, Y., 1972. Local balance in the air-sea boundary processes 1. On the growth process of wind waves. *Jour. Oceanogr. Soc. Japan.* 28(3): 109—120.
- [8] Wilson, B. W., S. K. Chakrabarti and R. H. Snider, 1974. Spectrum analysis of ocean wave records. *Proc. Intern. Symp. Ocean Wave Measur. and Analy.* Vol. 1. N. Y., 87—106.

THE OPTIMAL DESIGN OF WIND-WAVE SPECTRUM ESTIMATES STATIONARY WAVE PROCESSES

Li Luping

(First Institute of Oceanography, SOA, Qingdao)

ABSTRACT

This article deals with the optimal design of spectral estimates for stationary wave processes. The quality of spectral estimates is measured with the relative mean square error: $M = \frac{\{b_N(\omega)\}^2}{S^2(\omega)} + \frac{D^2(\hat{S}(\omega))}{S^2(\omega)}$. The method for choosing the lag number m minimizing the relative mean square error of spectral estimates, which is presented by Grenander et al and Priestley, is applied to wind-wave spectrum estimates. In this optimal design of spectral estimates the lag number m depends on the spectral bandwidth parameter: $B_f(\omega) = \left| S(\omega) / \frac{\partial^2 S(\omega)}{\partial \omega^2} \right|^{\frac{1}{2}}$, therefore, the spectral bandwidth parameter $B_f(\omega)$ (or at least $B_{fs}(\omega) = \min B_f(\omega)$) must be known before spectra are estimated in order to get optimal estimates. On the basis of the similarity of spectra, it is considered to be reasonable that the spectral bandwidth parameter $B_f(\omega)$ is estimated using Neumann spectra: $\frac{B_f(\omega)}{\omega_*} = K / \{ |(p+1)p - (2p+q+1)p / K^q + p^2 / K^{2q} | \}^{1/2}$ (ω_* is spectral peak frequency). Then, the relation among the relative mean square error M of spectral estimates, the significant wave period T_s of wave surface records, and the lag number m can be obtained using the empirical formulae $\omega_* = \frac{2\pi}{1.05T_s}$ proposed by TOBA.

In this paper, three optimal designs for estimating wind-wave spectra: Bartlett, Rectangular, and Tukey estimates are presented. Plot of the relation between non-dimensional spectrum bandwidth parameter and non-dimensional frequency in the forms of Neumann spectra, plot of the relation among the relative mean square error of spectral estimates, the significant wave period of wave surface records, and the lag number m in the three estimates, and plots of comparison of the optimal designs of spectral estimates made by the three methods are given. The effect of application for the optimal design is discussed.