

潮汐响应分析及非线性输入函数的研究

李红岩 黄祖珂 陈宗镛
(青岛海洋大学)

摘要 本文采用对不同潮族进行带通滤波而后进行响应分析的方法对潮汐进行分析。引用第一级预报水位构成的非线性输入函数分析非线性潮。给出了预报水位4至6级的组合公式。较好地分析了8,10两族。本文还以坎门和金山咀为例研究了各种输入函数的分析效果,并以预报方差和谱结构来考察输入函数的合理性。

一、滤波器的选用

Amin^[3] 1976年对19年的水位观测值进行调和分析时,使用了带通滤波器对水位进行了预处理。他选用的滤波长度:

$$2m + 1 = 289, \text{对 } 0-4 \text{ 族;} \\ 2m + 1 = 145, \text{对 } 5-8 \text{ 族。}$$

我们在进行预处理时,选用的滤波运算公式^[3]为

$$\zeta_0(t) = \frac{1}{2m} \sum_{k=-m}^m \left(1 + \cos \frac{\pi k}{m}\right) \zeta(t - k\Delta t), \text{当 } n = 0 \text{ 时;}$$

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{m} \sum_{k=-m}^m \left(1 + \cos \frac{\pi k}{m}\right) \zeta(t - k\Delta t) \cos\left(2\pi k\Delta t \frac{n}{T}\right), \text{当 } n \geq 1 \text{ 时。}$$

式中, $\Delta t = 1$ 小时; $T = 1$ 太阴日 = 24.8412 太阳时; n 为族数。当 $m \geq 24$ 时可将潮族分离出来。 $\left(1 + \cos \frac{\pi k}{m}\right)$ 为“cos-taper”, 用来消除由时间序列的截断而产生的边带效应。该滤波器的谱为: 当 $n \neq 0$ 时,

$$F_n(\nu) = \frac{1}{2m} \cdot \frac{\sin[\pi(2m+1)\Delta t(\nu - n/T)]}{\sin[\pi(\nu - n/T)\Delta t]} + \frac{1}{4m} \\ \cdot \frac{\sin\left[\pi(2m+1)\Delta t\left(\nu - n/T - \frac{1}{2m\Delta t}\right)\right]}{\sin\left[\pi\left(\nu - n/T - \frac{1}{2m\Delta t}\right)\Delta t\right]} \\ + \frac{1}{4m} \cdot \frac{\sin\left[\pi(2m+1)\Delta t\left(\nu - n/T + \frac{1}{2m\Delta t}\right)\right]}{\sin\left[\pi\left(\nu - n/T + \frac{1}{2m\Delta t}\right)\Delta t\right]}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2m} \cdot \frac{\sin [\pi(2m+1)\Delta t(\nu+n/T)]}{\sin [\pi(\nu+n/T)\Delta t]} + \frac{1}{4m} \\
& \quad \cdot \frac{\sin \left[\pi(2m+1)\Delta t \left(\nu + n/T - \frac{1}{2m\Delta t} \right) \right]}{\sin \left[\pi \left(\nu + n/T - \frac{1}{2m\Delta t} \right) \Delta t \right]} \\
& + \frac{1}{4m} \cdot \frac{\sin \left[\pi(2m+1)\Delta t \left(\nu + n/T + \frac{1}{2m\Delta t} \right) \right]}{\sin \left[\pi \left(\nu + n/T + \frac{1}{2m\Delta t} \right) \Delta t \right]}.
\end{aligned}$$

当 $n = 0$ 时,

$$\begin{aligned}
F_0(\nu) &= \frac{1}{2m} \cdot \frac{\sin [\pi(2m+1)\Delta t\nu]}{\sin (\pi\nu\Delta t)} + \frac{1}{4m} \\
& \cdot \frac{\sin \left[\pi(2m+1)\Delta t \left(\nu - \frac{1}{2m\Delta t} \right) \right]}{\sin \left[\pi \left(\nu - \frac{1}{2m\Delta t} \right) \Delta t \right]} + \frac{1}{4m} \cdot \frac{\sin \left[\pi(2m+1)\Delta t \left(\nu + \frac{1}{2m\Delta t} \right) \right]}{\sin \left[\pi \left(\nu + \frac{1}{2m\Delta t} \right) \Delta t \right]}.
\end{aligned}$$

该带通滤波器中心频率为太阴潮频率, 有效带域为 $(n/T - 1/m\Delta t, n/T + 1/m\Delta t)$ 。

本文取 $m = 24$, 可以得到良好的滤波效果。

二、方程组的建立及非线性输入函数的构造

1. 方程组的建立

设预报时用 M 个权, 则预报水位

$$\hat{\zeta}(t) = \sum_{i=1}^M w_i c_i(t) \quad (1)$$

式中 w_i 表示 $u_i^m(s)$ 或 $v_i^m(s)$; $c_i(t)$ 表示 $a_i^m(t - s\Delta\tau)$ 或 $b_i^m(t - s\Delta\tau)$ 或表示非线性输入函数。

设 $\zeta(t)$ 表示实测水位, 采样间隔 $\Delta t = k$ 小时; 样本序列总长为 $N + 1$; 预报水位 $\hat{\zeta}(t)$ 与观测值拟合的均方误差为:

$$\sigma^2 = \langle [\zeta(t) - \hat{\zeta}(t)]^2 \rangle;$$

式中 $\langle \rangle$ 表示整体平均。根据正交原理, 当权 $\{w_i\}$ 满足关系 $\langle (\zeta(t) - \sum_i w_i c_i(t)) c_j(t) \rangle = 0$, $j = 1, M$, 此时均方误差取得最小值, 则(1)式为最佳预报公式。最小均方误差为:

$$\sigma_{\min}^2 = \left\langle \left(\zeta(t) - \sum_i w_i c_i(t) \right) \zeta(t) \right\rangle \quad (2)$$

将上式改写为 $\sigma_{\min}^2 = \langle \zeta^2(t) \rangle - \sigma_m^2$, 式中

$$\sigma_m^2 = \sum_i w_i \langle c_i \zeta(t) \rangle = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots;$$

称之为预报方差, $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots$ 分别表示 0, 1, 2 等族的预报方差。响应权由 M 维方程组解出, 即:

$$\sum_{i=1}^M w_i \langle c_i(t) c_j(t) \rangle = \langle \zeta(t) \cdot c_j(t) \rangle, \quad i = 1, M. \quad (3)$$

2. 非线性输入函数的构造

Munk 和 Cartwright^[6]在 1966 年提出响应分析方法的同时,就提出了几种非线性输入函数。因非线性潮是在当地形成的,所以将第一级预报水位组成的函数作为输入函数显然要比使用由天文变量组合的函数合理。第一级预报水位的预报公式为:

$$\xi^l(t) = \sum_{m,n} \sum_i [a_n^m u_i + b_n^m v_i + i(a_n^m v_i - b_n^m u_i)], \quad n = 2, \quad 0 \leq m \leq 2. \quad (4)$$

Cartwright 和 Rossiter^[7]曾提出了由该预报水位组成的 1—6 族的非线性输入函数,我们考虑到我国海区非线性效应较强这一特点,提出了 8 族和 10 族的输入函数。下面列出了由第一级预报水位构成的部分非线性输入函数。设:

$$\xi_0^l = P_0 + iQ_0, \quad \xi_1^l = P_1 + iQ_1, \quad \xi_2^l = P_2 + iQ_2$$

分别为 0、1、2 族的第一级预报水位。

$$\begin{aligned} (\xi^l)^{2+2}: & (P_2^2 - Q_2^2) + i(2P_2Q_2) \\ (\xi^l)^{2+2+1}: & [(P_2^2 - Q_2^2)P_1 - 2P_2Q_2Q_1] + i[(P_2 - Q_2)Q_1 + 2P_1P_2Q_2] \\ (\xi^l)^{3+2}: & (P_2^3 - 3P_2Q_2^2) + i(3P_2^2 \cdot Q_2 - Q_2^3) \\ (\xi^l)^{4+2}: & (P_2^4 + Q_2^4 - 6P_2^2Q_2^2) + i4P_2Q_2(P_2^2 - Q_2^2) \\ (\xi^l)^{4+2+0}: & (P_2^4 + Q_2^4 - 6P_2^2Q_2^2)P_0 + i4P_0P_2Q_2(P_2^2 - Q_2^2) \\ (\xi^l)^{5+2}: & (P_2^5 + 5P_2Q_2^4 - 10P_2^3Q_2^2) + i(5P_2^4Q_2 - 10P_2^2Q_2^3 + Q_2^5) \\ (\xi^l)^{5+2+0}: & (P_2^5 + 5P_2Q_2^4 - 10P_2^3Q_2^2)P_0 + iP_0(5P_2^4Q_2 - 10P_2^2Q_2^3 + Q_2^5) \end{aligned} \quad (5)$$

本文主要根据以上诸式输入合理的函数,将预报水位与观测水位拟合,由正交原理确定出响应权序列。分析时将线性与非线性输入函数一次输入做整体分析,形成既包含线性输入又包含非线性输入的系数矩阵,一次解出响应权,因此谱域上不同部分的相互干扰就自动消除了。这比逐步响应分析^[1,2,6]更为合理。但是对每族进行整体分析时,必须确保带通滤波的精确性。

三、计算结果及其分析

取金山咀(1975 年)及坎门站(1960—1962 年)的资料进行分析。

1. 输入函数 $c_2^2(2)$ 与 $c_2^2(3)$ 的结果分析

$c_2^2(2)$ 表示 $c_2^2(0, \pm 1, \pm 2)$, $c_2^2(3)$ 表示 $c_2^2(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3)$,我们用金山咀一年(实际为 369 天)、坎门站一年及三年(1093 天)的资料试验比较了输入函数 $c_2^2(2)$ 与 $c_2^2(3)$ 的分析结果。太阳半日潮包含两部分即引力潮 c_2^2 和辐射潮 χ_2^2 。线性潮的导纳为 $Z_c(2) = \Sigma u_i + i\Sigma v_i$, 辐射潮的导纳为 $Z_x(2) = u'_i + iv'_i$ 。Cartwright^[4]1968 年在进行 1—3 族的联合响应分析时发现, $c_2^2(3)$ 的导纳抖动较大,将一些小分潮不合理地放大了。由 $c_2^2(3)$ 和 $c_2^2(2)$ 导出的太阳线性半日潮的导纳差别较大。例如:

$$\begin{cases} s = 3 \text{ 时, } Z_c(2) = -1.1 + 0.4i, \\ s = 2 \text{ 时, } Z_c(2) = -1.3 + 1.3i. \end{cases}$$

由此导致的差别最终要通过辐射潮响应权的调整来抵消,因而使分析得出的辐射潮变

形。我们通过对原水位的滤波预处理, 克服了这一不足。从而使得 $s = 2$ 和 $s = 3$ 的 $Z_c(2)$ 相当一致。金山咀:

$$\begin{cases} s = 3, Z_c(2) = 1.267 - i1.7415, \\ s = 2, Z_c(2) = 1.273 - i1.7479. \end{cases}$$

坎门: 一年分析

$$\begin{cases} s = 3, Z_c(2) = 0.973 + i2.049, \\ s = 2, Z_c(2) = 0.975 + i2.052. \end{cases}$$

三年分析

$$\begin{cases} s = 3, Z_c(2) = 0.983 + i2.052, \\ s = 2, Z_c(2) = 0.986 + i2.053. \end{cases}$$

从图 1 和图 2 来看, 两种输入的导纳均平滑且曲线的吻合较好。

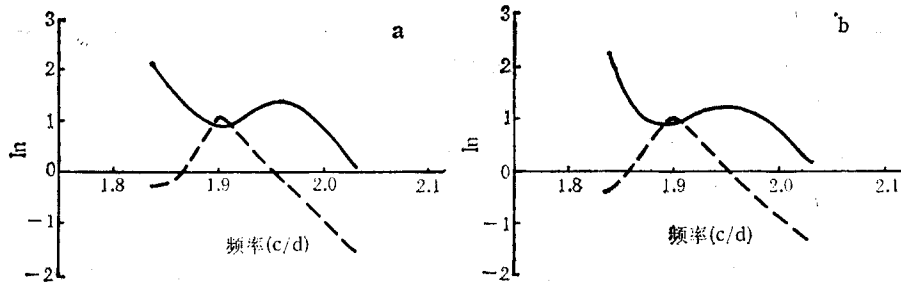


图 1 金山咀 2 族线性导纳

Fig. 1 The linear admittances of species 2 for Jinshan mouth

a. 369 天 ($s = 3$); b. 369 天 ($s = 2$)

— 振幅; --- 位相(弧度)。

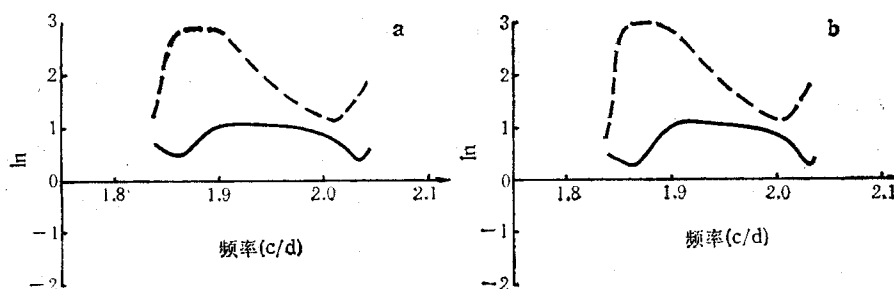


图 2 坎门 2 族线性导纳

Fig. 2 The linear admittances of species 2 for Kanmen

a. 369 天 ($s = 2$); b. 1093 天 ($s = 2$)。

(图例同图 1)

因此, 在对水位预处理后, $c_2^3(3)$ 的输入分析不会导致辐射潮变形。但从权本身的稳定性及辐射性来看(表 1), $c_2^3(2)$ 要比 $c_2^3(3)$ 的结果为好, 因此我们在做进一步分析时均采用 $c_2^3(2)$ 。

表 1 坎门站的权函数

Tab. 1 Weight functions for Kanmen station

权 s	$c_3^2(3)$				$c_2^2(2)$			
	369 天分析		1093 天分析		369 天分析		1093 天分析	
	u_i	v_i	u_i	v_i	u_i	v_i	u_i	v_i
-3	-0.2054	1.3441	-0.1259	2.3397	—	—	—	—
-2	-1.2361	-3.0854	-3.9953	-5.8349	-0.2907	0.3113	0.2778	0.1472
-1	3.4352	2.1944	10.9720	2.2527	2.1625	-2.6496	1.2251	-1.3290
0	-3.4271	-0.9005	-9.5060	6.1462	-1.1700	7.9823	-1.1537	6.1974
1	4.7802	3.4552	3.3204	-4.2270	-3.4538	-5.2250	-3.0027	-4.4788
2	-4.5595	0.4944	-0.9251	2.4772	3.7273	1.6328	3.6392	1.5166
3	2.1857	-1.4529	1.2425	-1.1020	—	—	—	—
Σ	0.973	2.049	0.983	2.052	0.975	2.052	0.986	2.053

2. 各种输入的预报方差及其预报谱结构的分析

我们对坎门站一年及三年的水位分析了 0—3 族, 对金山咀一年的水位分析了 0—6 族、8 族和 10 族。表 2 至表 4 列出了部分结果。

表 2 中, 输入序号(2.3)与(2.4)的预报方差相差约 16cm^2 , 这说明线性潮与辐射潮间的非线性藕合对金山咀 2 族水位有一定的影响。它的输入为 $(\xi^t)^2 \chi_0^0$ 。在输入(2.5)的基础上增加 $(\xi^t)^{2+2-2}$ 的滞后项, 预报方差仅增加 5cm^2 , 说明水位对该输入函数的响应随频率缓慢变化。在(2.4)和(2.5)这两组输入中, 当增加输入 $(\xi^t)^{2+2-2}(0, 0, 0)$ 时, 预报方差大幅度增加, 约 43cm^2 。这表明 2 族水位的三阶非线性相互作用对金山咀 2 族潮位的贡献是相当大的。

从表 2 的序号(3.1)和(3.2)可知, 对于 3 族的分析, 仅输入 $c_3^2(1)$ 是不够的, 非线性输入 $(\xi^t)^{2+1}$ 起了重要作用。

在对 4 族的分析中, 见表 2 的序号 (4.1)—(4.4), 第一级预报水位的二阶组合 $(\xi^t)^{2+2}$ 作为 4 族的输入函数要比引力势的二阶组合 c_2^{2+2} 有效。 $(\xi^t)^{2+2}(0, 0)$ 的 1 对输入项的预报方差 (331.41cm^2) 要比 $c_2^{2+2}(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(1, \pm 1)$, $(-1, -1)$ 的 6 对输入项的预报方差 (330.61cm^2) 略高, 而 $c_2^{2+2}(0, 0)$ 的预报方差 (177.48cm^2) 远小于 $(\xi^t)^{2+2}(0, 0)$ 的预报方差。这是由于 2 族的线性导纳在潮带内变化幅度较大, 仅用引力势的非线性组合 $c_2^{2+2}(0, 0)$ 不能有效地模拟 4 族的响应水位。尽管 $(\xi^t)^{2+2}(0, 0)$ 与 $(\xi^t)^{2+2}$ 的 3 对滞后项的预报方差近似相等, 但后一输入的谱更符合实际情况, 说明 $(\xi^t)^{2+2}$ 的 4 对非零滞后项对谱有一定的调整作用(见表 3)。因此输入函数的合理性要从预报方差和谱结构两方面分析, 后者更为重要。

因我们在分析时没有输入 $(\xi^t)^2$ 的四阶非线性组合即 $(\xi^t)^{2+2+2-2}$, 所以在 $3MS_4$ 及 $2MSN_4$ 的频率上, 模拟值与原谱值相差较大。

从表 2 的序号 (5.1)—(6.2) 及其回算谱与原谱的比较来看, 5 和 6 族 $(\xi^t)^{2+2+1}$ 和 $(\xi^t)^{3+2}$ 的单项与 4 对滞后项的分析效果差别不显著。因此仅输入其单项分析即可。

我们较好地分析了 8 族和 10 族, 它们的输入函数见表 2 序号(8.1), (8.2), (10.1)和

表 2 金山咀的预报方差

Tab. 2 Jinshan mouth prediction variances

序号	输入函数	权的对数	$\langle \xi^2 \rangle$ (cm^2)	σ^2 (cm^2)	σ_{min}^2 (cm^2)	$\sigma_{\text{min}} / \langle \xi^2 \rangle$
1.1	$c_1^2(2)$	5	879.71	847.69	32.02	0.0364
1.2	$c_1^2(2), c_1^2(1)$	8	—	850.45	29.26	0.0333
1.3	$c_1^2(2), c_1^2(1), \chi_1, \chi_2$	10	—	859.58	20.13	0.0229
1.4	$c_1^2(2), c_1^2(1), \chi_1, \chi_2, (\xi^t)^{2-1}(0,0)$	11	—	866.52	13.19	0.015
2.1	$c_2^2(2)$	5	18553.27	18384.60	168.67	0.0091
2.2	$c_2^2(2), c_2^2(1)$	8	—	18429.305	123.965	0.0067
2.3	$c_2^2(2), c_2^2(1), \chi_1$	9	—	18437.605	115.665	0.00623
2.4	$c_2^2(2), c_2^2(1), \chi_1, (\xi^t)^2 \chi_1(0,0)$	10	—	18453.54	99.73	0.00538
2.5	(2.4) + $(\xi^t)^{2+2-2}(0,0,0)$	11	—	18496.31	56.96	0.00307
2.6	(2.5) + $(\xi^t)^{2+2-2}(0,0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	14	—	18501.65	51.62	0.00278
3.1	$c_3^2(1)$	3	20.78	5.11	15.67	0.754
3.2	$c_3^2(1), (\xi^t)^{2+1}(0,0)$	4	—	13.74	7.04	0.339
4.1	$c_2^{2+2}(0,0)$	1	337.18	177.48	159.7	0.4736
4.2	$(\xi^t)^{2+2}(0,0)$	1	—	331.41	5.77	0.0171
4.3	$c_2^{2+2}(0,0), (0, \pm 1), (1, \pm 1), (-1, -1)$	6	—	330.61	6.57	0.0195
4.4	$(\xi^t)^{2+2}(0,0) (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	3	—	331.86	5.32	0.0158
5.1	$(\xi^t)^{2+2+1}(0,0,0)$	1	12.08	7.97	4.11	0.3402
5.2	$(\xi^t)^{2+2+1}(0,0,0), (\frac{1}{2}, 0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0),$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	4	—	8.07	4.01	0.3319
6.1	$(\xi^t)^{2+2+2}(0,0,0)$	1	86.668	75.11	11.558	0.133
6.2	$(\xi^t)^{2+2+2}(0,0,0), (0,0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	4	—	75.28	11.388	0.1314
8.1	$(\xi^t)^{4+2}(0,0,0,0)$	1	24.562	20.17	4.392	0.1788
8.2	$(\xi^t)^{4+2}(0,0,0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	2	—	20.19	4.372	0.1780
10.1	$(\xi^t)^{5+2}(0,0,0,0,0)$	1	5.988	3.555	2.433	0.406
10.2	$(\xi^t)^{5+2}(0,0,0,0,0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	2	—	3.556	2.432	0.406

表 3 金山咀 4 族的谱

Tab. 3 Spectra of species 4 for Jinshan mouth

输入	分潮① 谱值 (cm)	3MS ₄	MN ₄	M ₄	SN ₄	MS ₄	MK ₄	2MSN ₄	S ₄
		原谱	2.35	6.66	18.88	1.71	15.41	3.77	1.60
$(\xi^t)^{2+2}(0,0)$	1.52	6.33	19.63	2.05	14.39	2.80	0.44	2.58	
$(\xi^t)^{2+2}$ 等 5 对	1.27	6.44	18.99	1.80	15.44	3.03	0.46	2.08	

① 这里分潮仅代表其振动频率。

表 4 金山咀 8,10 两族的谱

Tab. 4 Spectra of species 8 and 10 for Jinshan mouth

输入	分潮① 谱值 (cm)	$3MN_8$	M_8	$2MSN_8$	$2MNK_8$	$3MK_8$	$2(MS)_8$	$2MSK_8$
	原 谱		1.78	2.75	1.95	4.24	0.97	2.31
$(\xi^1)^{**2}(0,0,0,0)$		1.56	2.83	1.92	4.13	0.81	2.29	0.88
输入	分潮① 谱值 (cm)	$4MN_{10}$	M_{10}	$3MNS_{10}$	$4MS_{10}$	$2(MS)N_{10}$	$2MNSK_{10}$	$3M2S_{10}$
	原 谱		0.53	0.86	0.96	1.62	0.61	0.56
$(\xi^1)^{**2}(0,0,0,0,0)$		0.54	0.90	0.95	1.58	0.52	0.16	1.16

① 同表 3。

(10.2)。从表 4 看出,分析与实际符合较好。

四、结 论

1. 由第一级预报水位组合的非线性输入函数比由天文变量的组合有效。

2. 1 族线性输入 $c_1^2(2)$ 预报出了 1 族总能量的 90% 以上。辐射输入及非线性输入对谱起调整作用,分析时也不可缺少。2 族的非线性输入 $(\xi^1)^{2+2-2}$ 可大大提高预报方差。对于 3 族,如果仅输入线性函数 $c_1^3(1)$ 是不够的,3 族的非线性输入也起重要作用。

3. 金山咀 4 族的双导纳函数仅随频率缓慢变化。输入函数的滞后项虽对预报方差的贡献不大,但对水位谱具有一定的调整作用,因此滞后项需保留。5, 6 两族的响应函数为常数,仅输入单项分析即可。

4. 加入 8, 10 两族的分析,可进一步提高响应分析的预报精度。

参 考 文 献

- [1] 黄祖珂,陈宗镛,1983。潮汐响应分析。山东海洋学院学报 13(2): 13—20。
- [2] 黄祖珂,1984。潮汐响应分析的非线性效应及太阳辐射潮。山东海洋学院学报 14(4): 7—12。
- [3] Amin, M., 1976: The fine resolution of tidal harmonics. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 44: 293—310.
- [4] Cartwright, D. E., 1968. A unified analysis of tides and surges round North and East Britain. *Phil. of Royal Society of London, series A*, 263(1134): 1—55.
- [5] Cartwright, D. E. & R. J. Tayler, 1971. New computations of the tide-generating potential. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 23(1): 45—74.
- [6] Munk, W. H. & D. E. Cartwright, 1966. Tidal spectroscopy and prediction. *Phil. Trans.* A259: 533—581.
- [7] Zetler, B. D., 1979: Some comparisons of response and harmonic tide predictions. *I. H. R.* 56(2): 105—115.

STUDY OF RESPONSE ANALYSIS AND NONLINEAR INPUT FUNCTIONS

Li Hongyan, Huang Zuke and Chen Zongyong

(Ocean University of Qingdao)

ABSTRACT

Based on an excellent band-pass filter, the energy from zero to tenth-diurnal tidal level is reasonably analysed by the lumped response analysis. The nonlinear input functions composed nonlinearly of the first order predictions are introduced. The formulas of the higher-order nonlinear interaction for the eighth and tenth-diurnal are presented. The analytical effects of the various kinds of nonlinear input functions are studied systematically. It is suggested that their rationality should be confirmed by both predictable variance and spectral structure.