第21卷 第3期 海洋与湖沼 Vol. 21, No. 3
1990年5月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA May, 1990

Boussinesq 方程组的一个精确解*

李春雁
(中国科学院海洋研究所，青岛)

提要 浅水波的 Boussinesq 方程组是弱频散的、非线性的，它与 KdV 方程有一定联系，但并不等价。本文给出这个方程组的一个孤立波精确解。它含有两个方向传播的孤立波，其一阶近似包括了 KdV 方程的精确解，而零阶近似则为波峰处导数不连续的奇异解。

一百多年来，对液体水的表面重力波的研究主要是针对以强频散为主要特征的短波、无频散的长波以及弱频散的波动而进行的。表面张力波[5,11]、Stokes 波[9]、Gerstner 余摆线波[7] 等都可以认为是强频散波的代表；而自由潮波却是无频散波的实际例证。在强频散波和无频散波这两个极端之间，孤立波[2,4,6]、椭圆余弦波[3] 是弱频散波的著名例子。Boussinesq 获得的孤立波公式[4] 是有二阶频散效应的可向单方向传播波的 KdV 方程的精确解。KdV 方程的简单形式以及后来发现的它与量子力学散射理论的联系吸引许多人对它进行了深入的研究[1,8]。但 KdV 方程只能描述单向波动问题，它并不是弱频散水波方程的唯一形式。用于研究浅水波动的 Boussinesq 方程组就是弱频散性的且可以有各种方向传播的波的解，在近年的理论和数值研究中占有越来越重要的位置。本文给出 Boussinesq 方程组的一个精确解。其二阶频散与 KdV 方程一致，四阶频散与线性情况下原始方程的 *Airy* 波四阶频散相差六分之一倍。

1. 关于 Boussinesq 方程组

文献[3,10]中提到的 Boussinesq 方程组至少有两种互不等价的形式——虽然在水深为常数的线性情况下它们是一致的(因而具有相同的频散关系)。Boussinesq 方程组的常见形式为[10]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{h}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)\\
&\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial (h+\zeta)\bar{u}}{\partial x}=0
\end{aligned}\tag{1}$$

其中，x 为水平坐标；t 为时间变量；$\bar{u}$ 为垂直平均流速；ζ 为水面波高；h 为静水深(为常数)；g 为重力加速度。

另一种形式的 Boussinesq 方程组为[3]

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right)$$

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第1758号。

本文承蒙复旦大学忻孝康教授提出宝贵意见，杜湄山绘图，特此致谢。
收稿日期：1987年10月15日。

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial(h+\zeta)\bar{u}}{\partial x}=0$$

本文给出的就是前一种形式即方程组(1)的一个精确解。

2. Boussinesq 方程组的孤立波解

设非线性 Boussinesq 方程组(1)有一行波解：

$$\zeta=\zeta(x-Ut)$$
$$\bar{u}=\bar{u}(x-Ut),\quad U=\text{const.}$$

对孤立波来说 $\xi=x-Ut\to\pm\infty$ 时 $\zeta\to 0$，$\bar{u}\to 0$，$\frac{d\zeta}{d\xi}\to 0$，$\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}\to 0$，$\cdots$，$\frac{d\bar{u}}{d\xi}\to 0$，$\frac{d^2\bar{u}}{d\xi^2}\to 0,\cdots$。

易知

$$\bar{u}=\frac{U\zeta}{h+\zeta}$$

$$-U^2\left(\frac{\zeta}{h+\zeta}\right)'+\frac{U^2}{2}\left[\left(\frac{\zeta}{h+\zeta}\right)^2\right]'+g\zeta'+\frac{hU^2}{3}\zeta'''=0$$

于是不难积分得

$$(\zeta')^2=\frac{3}{hU^2}\zeta^2\left(\frac{U^2}{h+\zeta}-g\right)\tag{2}$$

因为 $U^2/(h+\zeta)-g\geqslant 0$，故 ζ 有上限：

$$\zeta_{\max}=h(n-1)$$

其中 $n=U^2/gh$ 为孤立波移动速度与非频散自由长波移动速度之比的平方。

于是，$U=\sqrt{g(h+\zeta_{\max})}$

当 $|\zeta/h|<1$ 时，(2)式右边的 $1/(h+\zeta)$ 可作展开

$$\frac{1}{h+\zeta}=\frac{1}{h}\left(1-\frac{\zeta}{h}+\frac{\zeta^2}{h^2}-\cdots\right)\tag{3}$$

a. (3)的零阶近似给出 $1/(h+\zeta)\simeq 1/h$，这时(2)的积分给出如下一阶导数不连续的解：

$$\zeta=\begin{cases}\zeta_0 e^{\sqrt{3(1-1/n)}\xi/h} & (-\infty<\xi\leqslant 0)\\ \zeta_0 e^{-\sqrt{3(1-1/n)}\xi/h} & (0\leqslant\xi<+\infty)\end{cases}$$

b. (3)的一阶近似给出 $1/(h+\zeta)\simeq 1/h\cdot(1-\zeta/h)$，这时(2)的积分给出 KdV 方程解的形式：

$$\zeta=\frac{n-1}{n}h\left[1-\left(\frac{e^{\sqrt{3(1-1/n)}\xi/h}-1}{e^{\sqrt{3(1-1/n)}\xi/h}+1}\right)^2\right]\tag{4}$$

c. 直接对(2)积分就获得精确解：

$$2\sqrt{n-1}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{z+1}{n-1-z}}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\ln\left|\frac{\sqrt{\dfrac{z+1}{n-1-z}}-\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}}{\sqrt{\dfrac{z+1}{n-1-z}}+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}}\right|=\pm\sqrt{\frac{3(n-1)}{n}}\frac{\xi}{h} \tag{5}$$

其中 z 为无量纲波高: $z=\zeta/h$

零阶解、一阶解和精确解都满足 $n\geqslant 1$，故 $\zeta_{\max}\geqslant 0$，即只存在凸形波，并且这些波有相同量级的"波长"或空间尺度:

$$\lambda\sim\frac{2h}{\sqrt{3(1-1/n)}}$$

由于 z 的取值范围已知，给定一个 z，$(0\leqslant z\leqslant z_{\max})$，从所得解可以显式地获得正、负两个坐标 $\xi=\pm(x-U_t)$。于是关于 $\xi=0$ 为对称的整个波形也就获得。因此，这个精确解实际上是显式的。

图 1 绘出了以上三个解的曲线。一阶解虽然在形式上与 KdV 方程的精确解完全一致，但其最大值是 $(n-1)/n\cdot h$，而不是 Boussinesq 方程组精确解的 $(n-1)h$。为了便于比较，我们把一阶解中的 $(n-1)h/n$ 用 $\zeta_{\max}$ 表示并取此值与 Boussinesq 方程组精确解的最大值相等。即(4)式等价于

$$\zeta=\frac{n-1}{n}h\,\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3}{4h}\frac{n-1}{n}h}\,\frac{\xi}{h}\right)$$

令 $(n-1)h/n=\zeta_{\max}$ 则

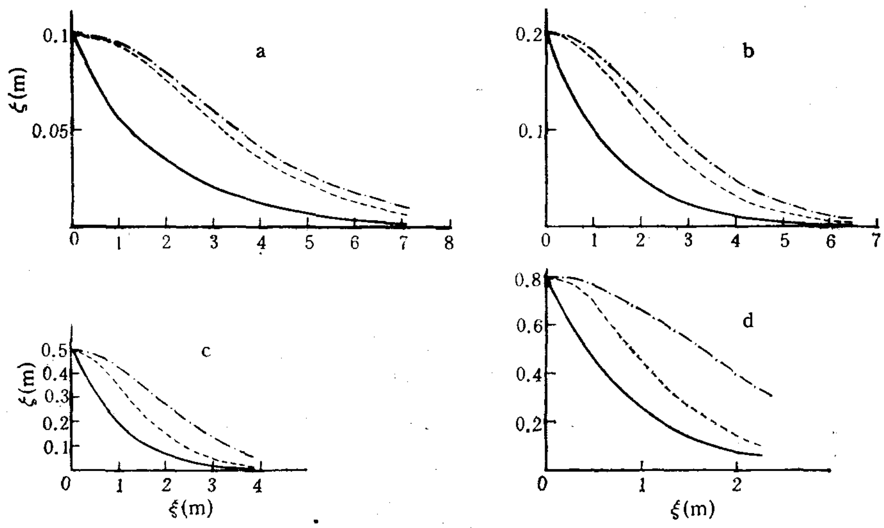

图 1 各阶解的半剖面图

Fig. 1 Half profile of various order solutions

——Bussinesq 方程组的零阶近似解 ---KdV 方程的精确解 —·—·—Boussinesq 方程组的精确解

(图中静水深 h = 1m)

$$\zeta=\zeta_{\max}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3\zeta_{\max}}{4h^3}}\,\xi\right) \tag{6}$$

计算中 h、$\zeta_{\max}$ 给定，并且第一：零阶解的 $\zeta_0=\zeta_{\max}$；第二：一阶解用(6)；第三：精确解(5)式中的 n 用 $U=\sqrt{g(h+\zeta_{\max})}$，$n=U^2/gh$ 确定，即 $n=1+\zeta_{\max}/h$。

由图可见 Boussinesq 方程组的解总大于 KdV 方程的解，它们的差别随波高与水深之比的增加而加大，这时非线性效应和频散效应更为显著。当非线性效应小时，两个解趋于一致。

至于零阶解，在波峰处导数不连续，其空间尺度大约只有 KdV 方程的解或 Boussinesq 方程组精确解的一半。

3. 结语

本文给出的 Boussinesq 方程组的精确解是一个自由孤立波，与 KdV 方程的孤立波解类似。对 Boussinesq 方程组作一阶近似可以获得 KdV 方程的孤立波解。从理论上看 Boussinesq 方程组的解与 KdV 方程的解具有相同阶数的精度。但在实用上 Boussinesq 方程组更有价值，它可以允许有各个方向传播的波。如果把 Boussinesq 方程组中引起频散的项换成新的频散项——科氏力，则新的频散项与非线性对流项的平衡同样可以形成孤立波。

参　考　文　献

[1] 忻孝康、黄光伟，1986。Korteweg—de Vries-Burgers 方程的一类解析解。力学学报 18(3)：1—5。
[2] 周清甫，1987。有限深两层流中内孤立波的高阶解。应用数学和力学 8(1)：69—77。
[3] 梅强中，1984。水波动力学。科学出版社，285—287，297—302 页。
[4] Boussinesq, J., 1871. Théorie de l'intumescence liquide appelee onde solitaire ou de translation se propagent dans un canal rectangulaire. *Comptes Rendus* 72: 755—759.
[5] Crapper, G. D., 1957. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude. *Journal of Fluid Mech.* 2(6): 532—540.
[6] Dailey, J. W. and S. C. Stephan, Jr., 1952. The solitary wave-its celerity, profile, internal velocities and amplitude attenuation in a horizontal smooth channel. Proc. 3rd Conf. Coastal Eng. ASCE. pp. 13—30.
[7] Lamb, H., 1932. Hydrodynamics. 6th ed., Dover, New York. § 251.
[8] Lamb, Jr., G. L., 1980. Elements of soliton theory. John Wiley & Sons, Inc. 289pp.
[9] Stokes, G. G., 1847. On the theory of oscillatary waves, *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 8: 441—455.
[10] Tosiya Taniuti and Katsunobu Nishihara, 1983. Nonlinear waves. Pitman Books Limited. p. 113.
[11] Wilton, J. R., 1915. On Ripples. *Phil. Mag.* 29(173): 688—700.

AN EXACT SOLUTION OF BOUSSINESQ EQUATIONS FOR SHALLOW WATER MOTION*

Li Chunyan

(Institute of Oceanology, Academia Sinica, Qingdao)

Abstract

This paper presents an exact solitary wave solution of the Boussinesq equations for shallow water motion, which are of nonlinear and weakly dispersive nature and have some relationship with the so called KdV equation.

The zeroth order solution is a singular one which has the first kind discontinuity at the wave peak.

The first order solution has the same form as that of KdV equation.

The exact solution is an implicit one but the profile of the wave can actually be obtained explicitly.

Except at the peak point the exact solution is the largest, the first order one the second while the zeroth order one the least.

The horizontal scale of the zeroth order solution is about half of those of the first order and exact solutions.

*Contribution No. 1758 from the Institute of Oceanology, *Acta* **40**(4): 425—434.