

非线性海浪波面与波高的统计分布*

侯 一 筠

(中国科学院海洋研究所, 青岛)

提要 采用风浪谱参量化的方法将随机波面无因次化, 把波面与波高概率分布的各阶矩展开为谱宽度根方的幂级数, 并由此导出波面与波高的统计分布。结果表明, 在准确至零阶和一阶时, 风浪分别退化为静止海面 and 单色波; 在准确至二阶时, 波面为线性模型, 即波面服从正态分布; 而在准确至三阶以上时, 波面分布与 Longuet-Higgins 导出的非线性海浪模型的 Gram-Charlier 形分布具有同效益; 并在准确至三阶时, 导出一种新的波高分布, 此分布函数以 Longuet-Higgins 等给出的 Rayleigh 分布作为二阶近似的特例。

波浪要素的统计分布是波浪理论中许多问题的关键。迄今为止, 对这一领域的研究已经取得了一系列重要成果。在线性海浪范围内, Longuet-Higgins^[5,6] 所给出的结果受到极为普遍的重视。然而, 由于客观现象的复杂性, 线性海浪理论在应用中受到限制。首先 Kinsman^[3] 在 1960 年通过现场观测发现, 由于偏态的影响, 波面将不严格服从正态分布, 于是他拟合出一种比正态分布更与实际符合的波面分布。稍后 Longuet-Higgins^[7] 在提出非线性海浪模型的基础上, 导出了一种类似于 Gram-Charlier 形级数的波面分布, 此分布函数的前三项与 Kinsman 的结果一致。后来 Tayfun^[8] 将波面表示为具有一种平均频率、随机位相且得到调幅的 Stokes 波, 其波面的概率也接近于 Gram-Charlier 级数代表的分布。Huang^[2] 等人在准确至三阶 Stokes 波的基础上也导出了另外一种非正态模式。对于波高分布是否服从瑞利分布也存在着某些争议。Forristall^[4] 根据墨西哥湾中的风浪记录认为, 采用 Weibull 分布拟合比瑞利分布更与实际符合。

本文认为, 描述谱形细致结构和风浪发展状况的谱宽度参量也应该是波浪统计分布中的重要参量。因此, 我们采用把统计分布的各阶矩展开为谱宽度根方的幂级数的方法而导出了在准确至各阶时的波面分布, 同时也得到了一种比瑞利分布更为普遍的波高分布。

1. 风浪谱的参量化及无因次波面

以 $S(\omega)$ 表示风浪频谱函数, $m_0, \omega_0, S(\omega_0)$ 分别表示谱的零阶矩、谱峰频率、峰值频率处对应的谱值, 则有如下形式的参量化谱

$$\begin{cases} \tilde{S}(\tilde{\omega}) = \frac{S(\omega)}{S(\omega_0)} \\ \tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0} \end{cases} \quad (1)$$

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 1753 号。
收稿日期: 1989 年 4 月 13 日。

由此

$$\tilde{m}_0 = \int_0^{\infty} \tilde{S}(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} = \int_0^{\infty} \frac{S(\omega)}{S(\omega_0)} \frac{d\omega}{\omega_0} = \frac{m_0}{\omega_0 S(\omega_0)} = B \quad (2)$$

其中 B 为谱宽度参量。

以 $\zeta(t)$ 表示固定点随时间变化且均值为零的随机波面，其相关函数 $R(\tau)$ 与谱函数 $S(\omega)$ 通过 Fourier 变换建立一一对应关系

$$R(\tau) = \overline{\zeta(t)\zeta(t+\tau)} = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad (3)$$

引入无量纲量 $\tilde{t} = t\omega_0, \tilde{\tau} = \tau\omega_0$ ，用 $\omega_0 S(\omega_0)$ 除上式两端，则有

$$\frac{R(\tau)}{\omega_0 S(\omega_0)} = \int_0^{\infty} \frac{S(\omega)}{S(\omega_0)} \cos \tilde{\omega} \tilde{\tau} \frac{d\omega}{\omega_0} = \int_0^{\infty} \tilde{S}(\tilde{\omega}_0) \cos \tilde{\omega} \tilde{\tau} d\tilde{\omega} = \tilde{R}(\tilde{\tau}) \quad (4)$$

因此无量纲波面的定义是

$$\tilde{\xi}(\tilde{t}) = \frac{\zeta(t)}{\sqrt{\omega_0 S(\omega_0)}} \quad (5)$$

考虑到(2)式，可知无量纲波面方差为

$$\overline{\tilde{\xi}(\tilde{t})^2} = \tilde{R}(0) = \int_0^{\infty} \tilde{S}(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} = B \quad (6)$$

再利用 Longuet-Higgins 等给出的结果，可得无量纲波面 $\tilde{\xi}$ 与无量纲波高 \tilde{H} ($= \frac{H}{\omega_0 S(\omega_0)}$) 的分布密度函数分别为

$$f(\tilde{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi B}} \exp\left\{-\frac{\tilde{\xi}^2}{2B}\right\} \quad (-\infty < \tilde{\xi} < \infty) \quad (7)$$

$$f(\tilde{H}) = \frac{\tilde{H}}{4B} \exp\left\{-\frac{\tilde{H}^2}{8B}\right\} \quad (\tilde{H} \geq 0) \quad (8)$$

即谱宽度参量 B 可以直接引入分布函数当中。以下，为简略起见，在不引起混淆时，将 $\tilde{\xi}$ ， \tilde{H} 仍记为 ζ, H 。

现定义

$$\beta = \sqrt{B} \quad (9)$$

代入(7)和(8)式，并求 $f(\zeta)$ 和 $f(H)$ 的各阶矩，可得

$$\begin{cases} \mu_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) d\zeta = 1 \\ \mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^n f(\zeta) d\zeta = \begin{cases} 0 & (n = \text{奇数}) \\ R^{(n)} \beta^n & (n = \text{偶数}) \end{cases} \\ E_0 = \int_0^{\infty} f(H) dH = 1 \\ E_n = \int_0^{\infty} H^n f(H) dH = S^{(n)} \beta^n \end{cases} \quad (10)$$

其中 $R^{(n)}, S^{(n)}$ 仅取决于 n ，与 β 无关。

(10) 式可以认为是随机海浪在线性近似下的结果。因此，对于非线性海浪， μ_n, E_n 的准确描述应为

$$\begin{cases} \mu_0 = 1; \mu_1 = 0 \\ \mu_n = \sum_{j \geq n} R_j^{(n)} \beta^j \quad (n \geq 2) \\ E_0 = 1; \\ E_n = \sum_{j \geq n} S_j^{(n)} \beta^j \quad (n \geq 1) \end{cases} \quad (11)$$

上式构成了本文分析的理论基础,亦即将分布函数的各阶矩展开为 β 的幂级数形式,以此来讨论波面与波高的统计分布。

2. 非线性海浪在准确至 β^j 时波面与波高的统计分布

由概率论知识,各阶矩唯一确定分布函数,故从(11)式出发就能够导出在准确至 β^j 阶时波面与波高的分布密度函数。

首先记 $f(\zeta), f(H)$ 的特征函数分别为 $\varphi(t), \psi(t)$, 则有

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) e^{i\zeta t} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!} (it)^n \quad (12)$$

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(H) e^{iHt} dH = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} (it)^n \quad (13)$$

β^0 阶: $\varphi(t) = 1$, 于是

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-i\zeta t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta t} dt = \delta(\zeta) \quad (14)$$

其中 $\delta(x)$ 表示狄拉克函数。上式表明波面为 $\zeta = 0$ 处的退化分布,故波浪退化为静止海面。

β^1 阶: $\psi(t) = 1 + iE_1 t = 1 + iS^{(1)}\beta t$, 又因为

$$e^{iE_1 t} = e^{iS^{(1)}\beta t} = 1 + iS^{(1)}\beta t + \frac{1}{2!} (S^{(1)}\beta it)^2 + \dots,$$

则略去 β^2 以上的量,就有

$$e^{iE_1 t} = 1 + iS^{(1)}\beta t = \psi(t)$$

故

$$f(H) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-iHt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(H-E_1)t} dt = \delta(H - E_1) \quad (15)$$

上式意为波高服从单点分布,它的物理解释就是振幅为 $\frac{1}{2} E_1$ 的单色波。因当振幅为零时,波动为静止海面,故 β^1 阶实际上包含了 β^0 阶的结果。

$$\beta^2 \text{ 阶: } \varphi(t) = 1 - \frac{1}{2} \mu_2 t^2 = 1 - \frac{1}{2} R^{(2)} \beta^2 t^2$$

因为在同阶近似下,有

$$1 - \frac{1}{2} R^{(2)} \beta^2 t^2 = e^{-\frac{1}{2} R^{(2)} \beta^2 t^2} = e^{-\frac{1}{2} \mu_2 t^2}$$

于是

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-i\zeta t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mu_2 t^2} e^{-i\zeta t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2}} e^{-\frac{\zeta^2}{2\mu_2}} \quad (16)$$

上式表明波面服从正态分布,与(7)式相对照可知 β^2 阶所代表的正是线性海浪模型。总之, β^0 阶至 β^2 阶所描述的或为退化情形或为线性情形。本文把重点放在非线性(三阶以上)的分析和讨论。

$$\beta^3 \text{ 阶: } \varphi(t) = 1 - \frac{1}{2}\mu_2 t^2 + \frac{\mu_3}{3!}(it)^3$$

因为

$$e^{-\frac{1}{2}\mu_2 t^2} \left\{ 1 + \frac{\mu_3}{6}(it)^3 \right\} = 1 - \frac{1}{2}\mu_2 t^2 + \frac{\mu_3}{6}(it)^3 + O(\beta^4)$$

则略去 β 的高阶项后,有

$$\varphi(t) = e^{-\frac{1}{2}\mu_2 t^2} \left\{ 1 + \frac{\mu_3}{6}(it)^3 \right\}$$

于是

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\mu_2 t^2} \left\{ 1 + \frac{\mu_3}{6}(it)^3 \right\} e^{-i\zeta t} dt$$

再利用 Hermite 多项式性质

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2+2itx)} (it)^n dt = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

就有

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2}} e^{-\frac{\zeta^2}{2\mu_2}} \left\{ 1 + \frac{\chi_3}{6} H_3\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\mu_2}}\right) \right\} \quad (17)$$

其中 $\chi_3 = \mu_3/\sqrt{\mu_2}^3$ ——偏度(描述偏离正态分布程度的物理量)。图 1 为式(17)所示的分布,当 $\beta = 0.5, \chi_3 = 0.2$ 时,与正态分布的比较(均以 $\eta = \frac{\zeta}{\sqrt{\mu_2}}$ 进行标准化)。

类似地,在准确至 β^n 阶($n \rightarrow \infty$)时,我们可以得到一个用 Edgeworth 形式的 Gram-Charlier 级数所表示的波面分布

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2}} e^{-\frac{\zeta^2}{2\mu_2}} \left\{ 1 + \frac{\chi_3}{3!} H_3\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\mu_2}}\right) + \frac{\chi_4}{4!} H_4\left(\frac{\zeta}{\sqrt{\mu_2}}\right) + \dots \right\} \quad (18)$$

其中 χ_n 为 β 的 n 次分式多项式,

$$H_3(x) = x^3 - 3x$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$H_n(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{1!} \frac{x^{n-2}}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} \frac{x^{n-4}}{2^2} - \dots$$

需要说明的是, (18)式给出的分布与 Longuet-Higgins^[7] 利用偏度、峰度等项来描述波面的不对称性所得到的分布函数是具有同等效益的。

以下,我们在准确至 β^3 阶时,导出波高分布密度函数。

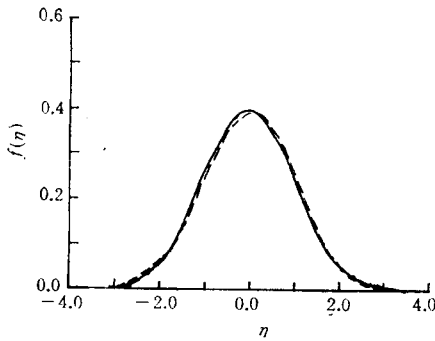


图 1 准确至 β^3 阶时波面分布与正态分布的比较

Fig. 1 Comparison between the distribution of surface elevation approximated to third order and Gaussian distribution

—— (17)式所表示的分布；----- 正态分布。

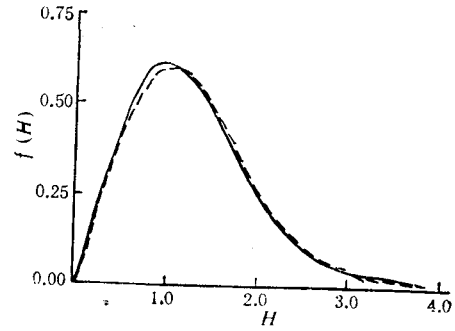


图 2 准确至 β^3 阶时波高分布与瑞利分布的比较

Fig. 2 Comparison between the distribution of wave height approximated to third order and Rayleigh distribution

—— (26)式所表示的分布；----- 瑞利分布。

首先考虑如下形式的函数

$$f(H) = \frac{(1 - \alpha) H}{4 \beta^2} e^{-\frac{H^2}{8\beta^2}} + g(H) \tag{19}$$

求上式的各阶矩,则有

$$\int_0^\infty H^n f(H) dH = 2^{\frac{3}{2}n} (1 - \alpha) \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \beta^n + \lambda_n$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \int_0^\infty H^n g(H) dH, \quad \text{故只要令} \\ \lambda_n &= \sum_{i \geq n} S_i^{(n)} \beta^i - 2^{\frac{3}{2}n} (1 - \alpha) \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \beta^n \end{aligned} \tag{20}$$

就有

$$\int_0^\infty H^n f(H) dH = \sum_{i \geq n} S_i^{(n)} \beta^i = E_n$$

从而(19)式即为波高分布密度函数。

其次记 $g(H)$ 的 Fourier 正弦变换为 $\lambda(t)$, 则

$$\lambda(t) = \int_0^\infty g(H) \sin Ht dH = \sum_{j=1}^\infty (-1)^{j-1} \frac{\lambda_{2j-1}}{(2j-1)!} t^{2j-1} \tag{21}$$

在准确至 β^3 阶时, $\lambda(t) = \lambda_1 t - \frac{\lambda_3}{3!} t^3$, 注意到 $\frac{\lambda_3}{6\lambda_1} = O(\beta^2)$, 则略去 β 的高阶项, 就有

$$\lambda(t) = \lambda_1 t \left(1 - \frac{\lambda_3}{6\lambda_1} t^2\right) = \lambda_1 t e^{-\frac{\lambda_3}{6\lambda_1} t^2},$$

因此

$$\begin{aligned} g(H) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \lambda(t) \sin Ht dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \lambda_1 t e^{-\frac{\lambda_3}{6\lambda_1} t^2} \sin Ht dt \\ &= 3 \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{\lambda_1^{3/2}}{\lambda_3^{3/2}} H e^{-\frac{3\lambda_1}{2\lambda_3} H^2} \end{aligned} \tag{22}$$

因为 $E_0 = 1$, 由(19)式知 $\lambda_0 = \alpha$, 积分上式可得

$$\alpha = \lambda_0 = \int_0^{\infty} g(H) dH = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{\lambda_1^{3/2}}{\lambda_3^{1/2}} \quad (23)$$

于是

$$g(H) = \frac{\alpha}{4} \frac{H}{\lambda} e^{-\frac{H^2}{8\lambda}} \quad (24)$$

其中

$$\lambda = \frac{\lambda_3}{12\lambda_1} = O(\beta^2)$$

因当 $\lambda = \beta^2$ 时, (19)式退化为瑞利分布, 故在准确至 β^3 阶时

$$\lambda = \beta^2 + \gamma\beta^3 \quad (25)$$

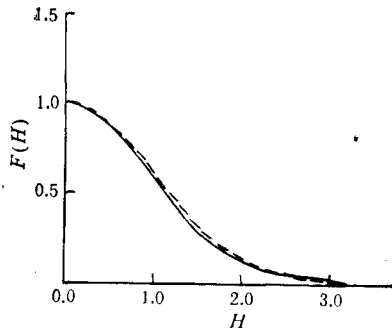


图3 准确至 β^3 阶时波高累积率与瑞利分布累积率的比较

Fig. 3 Comparison between the accumulation ratio of the distribution of wave height approximated to third order and Rayleigh distribution

—— (27)式所表示的波高累积率;
----- 瑞利分布累积率。

此处 γ 即为描述波浪非线性的量。

最后, 在准确至 β^3 阶时, 波高分布函数为

$$f(H) = \frac{(1-\alpha)H}{4\beta^2} e^{-\frac{H^2}{8\beta^2}} + \frac{\alpha}{4} \frac{H}{(\beta^2 + \gamma\beta^3)} e^{-\frac{H^2}{8(\beta^2 + \gamma\beta^3)}} \quad (26)$$

图2为上式当 $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.2$, $\gamma = -0.5$ 时与瑞利分布的比较。

由(26)式还可以得出波高累积率函数

$$F(H) = \int_H^{\infty} f(H) dH = (1-\alpha)e^{-\frac{H^2}{8\beta^2}} + \alpha e^{-\frac{H^2}{8(\beta^2 + \gamma\beta^3)}} \quad (27)$$

图3为上式当 $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.2$, $\gamma = -0.5$ 时与瑞利分布累积率的比较。

3. 资料验证

本节, 我们选用文献[1], [4]中给出的资料借以说明, 本文所采用的处理非线性海浪统计分布的方法是一个很好的途径, 所得到的结果也是令人满意的。

图4选自文献[4], $\chi_3 = 0.168$, $\eta = \zeta/\sqrt{\mu_2}$, 就此图中比较言之, 波浪的非线性效应是明显的。

图5选自文献[1], 图中实线是当 $\beta = 0.5$, $\alpha = 0.2$, $\gamma = -0.5$ 时(27)式所表示的波高累积率。

由图中看出, 实线与观测符合最好。在应用问题中, 大家常关心小概率对应的波高值, 由瑞利分布得到的波高偏大, 而由 Weibull 分布得到的波高又偏小, 故考虑非线性效应将会对此问题有较好地改善。

我们将本文的结果与文献[2]中提出的另外一种非正态模式进行比较。图6中所示的两种波面分布基本上一致, 这不仅说明了此两种不同理论均能反映出波浪的非线性效应, 同时也表明了波陡与谱宽度这两个物理量之间必然有某种内在联系。

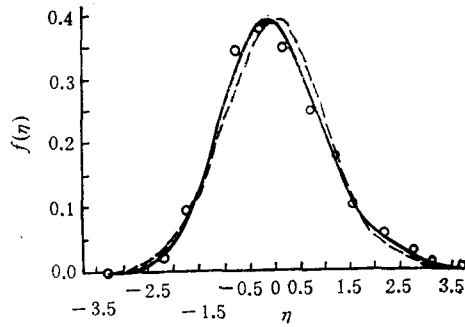


图 4 波面测得的波面分布与理论值的比较^[4]
 Fig. 4 Comparison between the distribution of surface elevation observed at the sea and theoretical distribution
 —— (17)式所表示的波面分布;
 - - - 正态分布; ○○○ 观测值。

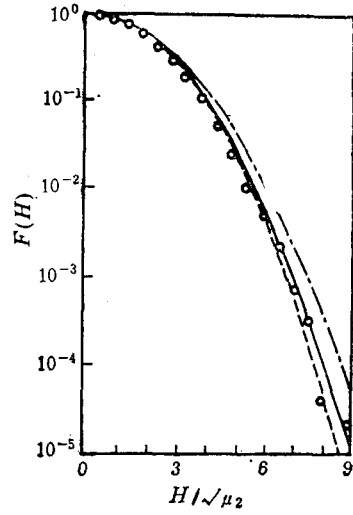


图 5 波高累积率海上观测值与理论值的比较^[1]
 Fig. 5 Comparison between the accumulation ratio of wave height observed at the sea and theoretical distributions
 —— (27)式所表示的波高累积率;
 - - - 瑞利分布波高累积率;
 - · - Weibull 分布波高累积率;
 ○○○ 观测值。

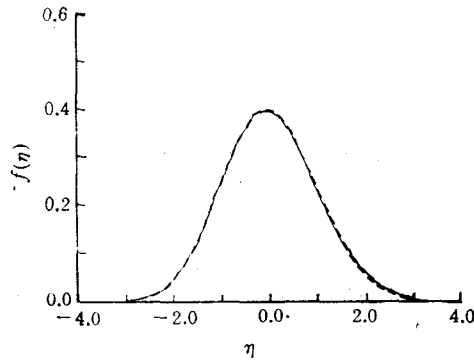


图 6 两种非线性波面分布的比较
 Fig. 6 Comparison of two non-linear distributions of surface elevation
 —— (17)式所表示的波面分布 ($\chi_3 = 0.2$); - - - 文献[2]中所给出的波面分布 ($\sigma k = 0.05$)。

4. 结语

将谱宽度的根方引进分布函数当中,并由此导出在准确至 β^i 阶时波面与波高的统计分布是一个很好的尝试。所得到的结果既包括了海面的极端情形和线性海浪模型,又得到了与 Longuet-Higgins 非线性波面具有同等效益的 Gram-Charlier 形波面分布以及三阶非线性海浪的波高分布。当然,详尽的观测或实验检验是完全必要的。此外,在波高

分布函数当中出现的 α, γ 是海浪非线性影响的重要标志, 其物理意义就是反映出波面的不对称性, 我们将另文进一步深入讨论。

参 考 文 献

- [1] Forristall, G. Z., 1978. On the statistical distribution of wave heights in a storm. *J. Geophys. Res.* 83 (c5): 2 353—2 358.
- [2] Huang, N. E. et al., 1983. A non-Gaussian statistical model for surface elevation of nonlinear random wave fields. *J. Geophys. Res.* 88(c12): 7 579—7 606.
- [3] Kinsman, B., 1960. Surface waves at short fetches and low wind speeds a field study. Chesapeake Bay Institute Tech. Rept. 19, 581pp.
- [4] Kinsman, B., 1965. Wind Waves. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 676pp.
- [5] Longuet-Higgins, M. S., 1957. The statistical analysis of a random moving surface. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* 249(966): 321—387.
- [6] Longuet-Higgins, M. S., 1975. On the joint distribution of the period and amplitudes of sea waves. *J. Geophys. Res.* 80(18): 2688—2694.
- [7] Longuet-Higgins, M. S., 1963. The effect of nonlinearities on statistical distributions in the theory of sea waves. *J. Fluid Mech.* 17(3): 459—480.
- [8] Tayfun, M. A., 1980. Narrow-band nonlinear sea waves. *J. Geophys. Res.* 78(12): 1937—1943.

THE STATISTICAL DISTRIBUTIONS OF SURFACE ELEVATION AND WAVE HEIGHT OF NONLINEAR SEA WAVES*

Hou Yijun

(Institute of Oceanology, Academia Sinica, Qingdao)

ABSTRACT

The statistical distributions of surface elevation and wave height are derived with the expansion of their moments into power series of the square root of the spectrum width. If approximated to the first order, the sea waves will degenerate into the single frequency wave. To the second order, the linear waves are derived. To the higher order, the distribution of surface elevation is equivalent to the nonlinear Gram-Charlier distribution derived by Longuet-Higgins. To the third order, a new distribution for wave height is derived.

* Contribution No. 1753 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.