第22卷 第1期 海 洋 与 湖 沼 Vol. 22, No. 1
1991年1月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA Jan., 1991

河口均匀流中涌潮波的形式

杜 勇
(青岛海洋大学, 266003)

提要 本文从浅水非线性潮波方程出发,同时考虑摩擦效应和河口径流,求得波阵面直立、涌潮形成的位置。由此分析了浅水非线性效应、摩擦效应以及均匀水流的存在等对涌潮形成的影响。指出,浅水非线性效应是涌潮形成的决定因素,摩擦效应消耗能量对涌潮的形成起抑制作用,而逆向均匀水流的存在则促进河口涌潮波在更短的距离内形成。

多年来,人们从不同的角度对涌潮进行研究。数值研究侧重于模拟某一河口的涌潮[1]或者数值计算结果的分析[4]。而解析方法,由于问题的复杂性往往引入无粘假定[2,5,6],有的甚至采用线性方程[3]对涌潮进行研究。由于涌潮是发生在河口区域,所以浅水非线性效应和摩擦效应都比较显著,一般还伴随着比较稳定的水流。为此我们采用考虑摩擦的浅水非线性潮波方程,按照与 Gurtin[2] 类似的方法,先求出波阵面斜率的方程,再求得波阵面直立、涌潮形成的位置。由此讨论浅水非线性效应、摩擦效应以及均匀水流的存在等对涌潮形成的影响。

一、基本方程及其解

假定潮波沿 x 正向传播,坐标轴 x 平行于底坡。未扰动时,自由面位于 $z=0$。底部为平行于 x 轴的直线 $z(=-h)$。均匀水流流速为 U(=常数);扰动速度为 u;扰动压力为 p_1,无扰动时压力为 p_2,有扰动时压力为 $p=p_1+p_2$;K 为摩擦系数;g_1, g_2 分别为重力加速度的水平和垂直分量(见图1)。

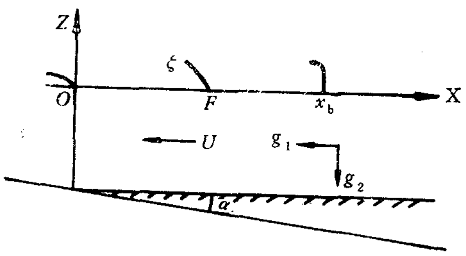

图1 涌潮波的形成过程
Fig. 1 Generating process of a bore

运动方程:

$$(u+U)_t+(u+U)(u+U)_x=-\frac{1}{\rho}(p_1+p_2)+g_1-K(u+U) \tag{1}$$

$$\frac{1}{\rho}(p_1+p_2)_z=-g_2 \tag{2}$$

连续方程:

收稿日期: 1988年11月7日。

$$\zeta_t + [(u+U)(\zeta+h)]_x = 0 \tag{3}$$

其中，ζ 为自由面高度(潮位)。当扰动不存在时，对于均匀恒定流，显然，

$$KU = g_1 = \text{常数} \tag{4}$$

由式(2)，对 z 积分，然后对 x 微分，可得，

$$(p_1)_x = \rho g_2 \zeta_x \tag{5}$$

将式(4)和(5)代入(1)，(2)和(3)，得出

$$u_t + (u+U)u_x = -g_2\zeta_x - Ku \tag{6}$$

$$\zeta_t + [u(\zeta+h)]_x + U(\zeta+h)_x = 0 \tag{7}$$

按照 Gurtin 方法[2]，假定 (i) u, ζ 是连续的；(ii) u 和 ζ 的一阶和二阶导数至多有第一类间断点；(iii) 在涌潮波的前方 u 和 ζ 始终为零。将图 1 中 F 点的 u 和 ζ 记为 u^- 和 ζ^-，即

$$\lim_{t\to \hat{t}(x)} f(x,t) = f^-(x),$$

则应有 $u^- = \zeta^- = 0$，$\hat{t}(x)$ 为波前到达 x 点的时间。F 点以速度 $C+U$ 向前运动，因此全导数

$$\frac{du^-}{dt} = 0 \qquad \text{即}\ (C+U)u_x^- = -u_t^- \tag{8}$$

$$\frac{d\zeta^-}{dt} = 0 \qquad \text{即}\ (C+U)\zeta_x^- = -\zeta_t^- \tag{9}$$

其中，$C + U = \dfrac{dx}{dt}$ 为 F 点的特征速度。由方程(5)和(6)，并利用假定 (iii) 后，得

$$\zeta_t^- = -hu_x^- - U\zeta_x^- \tag{10}$$

$$u_t^- = -Uu_x^- - g_2\zeta_x^- \tag{11}$$

将式(8)，(9)代入式(10)，(11)中，可得

$$C^2 = g_2 h \tag{12}$$

为讨论波阵面的倾斜，定义在波阵面上 F 点处的斜率为 $\mathscr{A}$，则

$$\mathscr{A} = \zeta_x^- \tag{13}$$

利用(13)式，由(11)式可得

$$u_t^- = -Uu_x^- - \mathscr{A} g_2 \tag{14}$$

再由式(8)和(14)求得

$$u_x^- = \mathscr{A}\frac{g_2}{C} \tag{15}$$

将式(15)代回(14)，得

$$u_t^- = -(C+U)\mathscr{A}\frac{g_2}{C} \tag{16}$$

对方程(6)求 t 的导数，并利用假定 (iii)，得

$$u_{tt}^- + u_t^- u_x^- + Uu_{xt}^- + g_2\zeta_{xt}^- + Ku_t^- = 0 \tag{17}$$

对方程(7)求 x 的导数，且利用假定(iii)和式(13)，得

$$\zeta_{tx}^- + u_{xx}^- h + 2\mathscr{A}u_x^- + U\zeta_{xx}^- = 0 \tag{18}$$

由式(17)和(18),消去 ζ_{xt} 项后得,

$$u_{xx}^{-}g_2h - u_{tt} + 2\mathscr{A}g_2u_x^{-} + Ug_2\zeta_{xx}^{-} - u_t^{-}u_x^{-} - Uu_{xt}^{-} - Ku_t^{-} = 0 \tag{19}$$

将 F 点沿特征线 l 传播,用 $\frac{d}{dx}$ 表示沿着 l 的导数,即

$$\frac{d}{dx}(u_x^{-}) = \frac{1}{C+U}u_{xt}^{-} + u_{xx}^{-} \tag{20}$$

$$\frac{d}{dx}(u_t^{-}) = \frac{1}{C+U}u_{tt}^{-} + u_{tx}^{-} \tag{21}$$

由式(20)和(21),可得

$$(C+U)^2\frac{d}{dx}(u_x^{-}) - (C+U)\frac{d}{dx}(u_t^{-}) = (C+U)^2u_{xx}^{-} - u_{tt}^{-} \tag{22}$$

再利用式(12),由式(22)可导出

$$u_{xx}^{-}g_2h - u_{tt} = (C+U)^2\frac{d}{dx}(u_x^{-}) - (C+U)\frac{d}{dx}(u_t^{-}) - (2UC+U^2)u_{xx}^{-} \tag{23}$$

将式(23)代入式(19),并利用式(15)和(16),得

$$(C+U)^2\frac{d}{dx}(u_x^{-}) - (C+U)\frac{d}{dx}(u_t^{-}) - 2Ug_2\mathscr{A}_x - \frac{U^2}{C}g_2\mathscr{A}_x + \frac{2g_2^2}{C}\mathscr{A}^2$$

$$+ Ug_2\mathscr{A}_x + \frac{(C+U)}{C^2}g_2^2\mathscr{A}^2 + \frac{U(C+U)}{C}g_2\mathscr{A}_x + \frac{K(C+U)g_2}{C}\mathscr{A} = 0 \tag{24}$$

消去 $\mathscr{A}_x$ 项,并进一步整理,得

$$\frac{d\mathscr{A}}{dx} = -\frac{1}{2(C+U)^2}\left[\frac{g_2}{C}(3C+U)\right]\mathscr{A}^2 - \frac{K}{2(C+U)}\mathscr{A} \tag{25}$$

求解微分方程(25),可得

$$\mathscr{A} = \left[\frac{1}{\mathscr{A}_0}\exp\left(\frac{K}{2(C+U)}x\right) + \frac{g_2(3C+U)}{CK(C+U)}\left(\exp\left(\frac{K}{2(C+U)}x\right) - 1\right)\right]^{-1} \tag{26}$$

其中,$\mathscr{A}_0$ 是当 F 点经过 $x=0$ 处时的波阵面斜率。显然,当

$$\frac{1}{\mathscr{A}_0}\exp\left(\frac{K}{2(C+U)}x\right) + \frac{g_2(3C+U)}{CK(C+U)}\left[\exp\left(\frac{K}{2(C+U)}x\right) - 1\right] = 0 \tag{27}$$

时,$|\mathscr{A}| = \infty$,波阵面直立,涌潮发生。由此我们可以求得涌潮发生的位置

$$x_b = \frac{2(C+U)}{K}\ln\left[\left(1 - \frac{CK(C+U)}{(3C+U)|A_0|g_2}\right)^{-1}\right] \tag{28}$$

x_b 是自湾口($\mathscr{A} = \mathscr{A}_0$ 处)至涌潮形成处($|\mathscr{A}| = \infty$)之间的距离。

二、解的讨论

由式(28)可以分别讨论摩擦效应、浅水非线性效应、均匀水流以及各效应之间的相互作用对涌潮波形成的影响。在河口中均匀水流一般与涌潮波传播方向相反,且 $|U| < C$,否则涌潮波不能向前传播。因此,尽管对式(28)中 $|U|$ 的其它变化情况的讨论,将有比较广泛的意义,但限于本文的目的,在河口涌潮波问题上,我们仅讨论 $|U| < C$ 且 $U \leqslant 0$ 的情况。

1. 摩擦效应和均匀水流对涌潮的影响

(1) $K=0$（不考虑摩擦），这时式(28)化为

$$x_b=\frac{2C(C+U)^2}{(3C+U)|\mathscr{A}_0|g_2} \tag{29}$$

若 $U=0$（没有径流的情况），则式(29)化为

$$x_b=\frac{2}{3}\frac{h}{|\mathscr{A}_0|} \tag{30}$$

与 Gurtin 的结果[2]一致。这时涌潮形成距离的大小主要取决于水深 h 和 $x=0$ 处的波面斜率 $|\mathscr{A}_0|$。由于不考虑摩擦效应，h 对 x_b 的影响主要取决于波面上最高点的波速 $C_1=\sqrt{g_2(h+|\zeta|)}$ 与较低点的波速 $C_2=\sqrt{g_2h}$ 之间的差。h 越大，差越小(在 $|\zeta|$ 相同的情况下)。从而波面变陡直需要更长的距离；反之，x_b 越小。$|\mathscr{A}_0|$ 对 x_b 的影响是显然的。$|\mathscr{A}_0|$ 越大，x_b 越小。若 $U<0$ 且 $|U|\leqslant C$（水流沿 x 负向），对于式(29)和(30)，不难证明，恒有

$$\frac{2C(C+U)^2}{(3C+U)|\mathscr{A}_0|g_2}<\frac{2}{3}\frac{h}{|\mathscr{A}_0|} \tag{31}$$

因此，逆向均匀水流 U 的存在使涌潮波在更短的距离内产生。特别当 $|U|=C$ 时，$x_b=0$。在这种极端情况下，涌潮波不向前传播，而在 $x=0$ 的湾口处形成直立的波面。

(2) $K\neq 0$（考虑摩擦），若 $U=0$，式(28)化为

$$x_b=-\frac{2C}{K}\ln\left(1-\frac{CK}{3|\mathscr{A}_0|g_2}\right) \tag{32}$$

由于 $C=\sqrt{g_2h}$，显然，水深 h 与 x_b 的关系和不考虑摩擦的情况类似。h 越大，涌潮波越难以形成；反之，形成距离变短。将式(32)中的对数部分展开级数，不难证明，当摩擦效应增大时，x_b 增大。说明摩擦消耗能量，将阻碍涌潮的形成，使形成涌潮的距离 x_b 变长。若 $U<0$ 且 $|U|\leqslant C$，由式(28)

$$x_b=-\frac{2(C+U)}{K}\ln\left(1-\frac{CK(C+U)}{(3C+U)|\mathscr{A}_0|g_2}\right) \tag{33}$$

可以看出，在这种情况下，摩擦效应与 $U=0$ 时类似，仍然是阻碍涌潮形成的因子。不难证明，当 $U<0$ 且 $|U|\leqslant C$ 时，

$$\frac{2(C+U)}{K}\ln\left(1-\frac{CK(C+U)}{(3C+U)|\mathscr{A}_0|g_2}\right)>\frac{2C}{K}\ln\left(1-\frac{CK}{3|\mathscr{A}_0|g_2}\right)$$

即存在逆向均匀水流时，涌潮波形成的距离将变短。因此，在考虑摩擦的情况下，逆向均匀水流同样有助于涌潮波的形成。

2. 浅水非线性效应

若在基本方程(1)，(2)和(3)中去掉非线性项 uu_x，$u\zeta_x$ 和 ζu_x，由类似步骤可求得

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_0\exp\left(-\frac{K}{2(C+U)}x\right) \tag{34}$$

由式(34)可见，无论 x 取何值，在有限的距离内 $|\mathscr{A}|$ 不会达到无穷。因此，这种情况下，河口涌潮波不会形成。这也说明，涌潮的形成是一个较强的非线性过程。若没有非线性效应，则涌潮的形成是不可能的。因而，用线性理论来解释涌潮现象是值得商榷的[3]。

从式(34)也可以看出，$K=0$ 时 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_0$，波面的倾斜将不改变；$K\neq 0$ 时，$|\mathscr{A}|$ 将随 x 衰减。当 $U=0$ 时，$|\mathscr{A}|$ 将在摩擦的作用下较快地变小；而 $|U|>0$ 时，均匀水流的效应与摩擦效应相抑制，从而使 $|\mathscr{A}|$ 的衰减变慢。

三、结 论

以上分析表明，浅水非线性效应是涌潮形成的决定因素；摩擦效应消耗潮波能量对涌潮的形成起抑制作用；而逆向均匀水流的存在则使河口涌潮波能在更短的距离内形成。另外在相同的情况下，水深越浅，涌潮波越容易形成。值得指出的是，这并不是由于摩擦的影响，而是由于在浅水中，波面上最高点与最低点之间的波速差较大造成的。

应当指出，非线性效应还应包括摩擦的非线性效应。本文未分析这种效应。另外，除 $U<0$ 且 $|U|\leqslant C$ 以外的其它均匀水流情况同样有意义。限于本文的目的也未予以讨论。这些都有待于进一步的工作。

参 考 文 献

[1] 赵雪华，1985。钱塘江涌潮的一维数学模型。水利学报 **1**: 50—54。

[2] Gurtin, M. E., 1975. On the breaking of water wave on a sloping beach of arbitrary shape. Quarterly of Applied Mathematics pp. 187—189.

[3] Mazumder, N. C., P. K. Chatterjee and S. K. Basak, 1984. Generation of bore. *J. of Waterway Port, Coastal and Ocean Engineering* **110**(2): 159—170.

[4] Peregrine, D. H., 1966. Calculations of the development of an undular bore. *J. Fluid Mech.* **25**(2): 321—330.

[5] Peregrine, D. H., 1967. Long wave on a beach. *J. Fluid Mech.* **27**(4): 815—827.

[6] Shen, M. C. and R. E. Meyer, 1963. Climb of a bore on a beach. Part 2, Non-uniform beach slope. Part 3, Run-up. *J. Fluid Mech.* **16**(2): 108—125.

ON THE GENERATION OF BORES IN CONSTANT FLOW OF ESTUARY

Do Yong

(Ocean University of Qingdao, 266003)

ABSTRACT

The shallow water nonlinear tidal wave equations with friction are analysed on the assumption that the flow in estuary is constant. In a similar way to that of Gurtin, the wave front slope equation

$$\mathscr{A}=\left[\frac{1}{\mathscr{A}_0}\exp\left(\frac{K}{2(C+U)}x\right)+\frac{g_2(3C+U)}{CK(C+U)}\left(\exp\left(\frac{K}{2(C+U)}\right)x-1\right)\right]^{-1}$$

is obtained. The condition of vertical wave front, therefore, is

$$\frac{1}{\mathscr{A}_0}\exp\left(\frac{K}{2(C+U)}x\right)+\frac{g_2(3C+U)}{CK(C+U)}\left[\exp\left(\frac{K}{2(C+U)}x\right)-1\right]=0.$$

The position of bore generation is

$$x_b=\frac{2(C+U)}{K}\ln\left[\left(1-\frac{CK(C+U)}{(3C+U)|\mathscr{A}_0|g_2}\right)^{-1}\right].$$

Where, C is characteristic wave speed, K linear friction coefficient, $\mathscr{A}_0$ initial wave front slope, g gravitation, x_b the distance of bore generation. When the shallow water nonlinear effect is neglected, the wave front slope equation changes into

$$\mathscr{A}=\mathscr{A}_0\exp\left(-\frac{K}{2(C+U)}x\right).$$

Therefore, the wave front slope is limited and bore can not form.

It is concluded that the shallow water nonlinear effect is the determinant for the generation of a bore, friction wearing off energy is a restrainer, and the opposite constant flow promotes the generation of a bore in shorter distance.