

## 海浪局部振幅和局部周期的统计分布\*

赵 猛 徐德伦 楼顺里

(青岛海洋大学, 266003)

**摘要** 根据平稳正态随机过程及其 Hilbert 变换的性质, 在不受窄谱限制的条件下, 严格导出海浪局部振幅  $A$  局部周期  $T$  的分布函数和联合分布函数, 并以在实验室水槽中产生的三种不同谱宽度的波浪作了验证, 结果比较满意。

在海浪研究中, 与谱方法相对应的另一种统计研究方法是从海浪波面动态几何图象

$$\zeta(x, y; t) = \operatorname{Re}\{A(x, y; t)e^{i\phi(x, y; t)}\} \quad (1)$$

出发, 直接在时-空域研究海浪的统计特性。这种方法在研究海浪波面的调制和不稳定性, 特别在研究波群和风浪破碎判据问题中已显示出优越性<sup>[3,4,6]</sup>。由式(1)表示的波面应这样理解: 于每一时-空点  $(x, y; t)$ , 波面  $\zeta$  都由一简谐波贡献, 此简谐波振幅为  $A$  并以位相  $\phi$  在此点出现; 不同的时-空点对应的简谐波及其出现的位相各异。我们称  $A$  为海浪局部振幅,  $\phi$  为局部位相。利用 Hilbert 变换可自测得的固定点波面记录  $\zeta(t)$  计算出  $A(t)$  和  $\phi(t)$ <sup>[3]</sup>, 由  $\phi(t)$  容易计算出局部周期:

$$T(t) = 2\pi \left/ \left[ \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right] \right. \quad (2)$$

如果把海浪视为随机过程, 那么就应把式(1)右侧两个函  $A$  和  $\phi$  视为随机函数。探讨由这两个函数决定的海浪局部波高和局部周期的统计特性对进一步发展和应用时-空域研究法无疑有重要意义。海浪局部波高和局部周期与通常使用的跨零点波高和周期是不同定义的两回事。本文并无企图把这两者联系起来。

### 一、分布函数的推导

对于作为平稳正态过程的海浪, 固定点波面高度  $\zeta(t)$ , 依式(1)可表示为:

$$\zeta(t) = A(t) \sin[\phi(t)] \quad (3)$$

其一阶分布函数为:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\zeta^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (4)$$

式中,  $\sigma^2$  为  $\zeta(t)$  的方差。由平稳过程 Hilbert 变换的基本性质知, 正态过程  $\zeta(t)$  与其 Hilbert 变换  $\check{\zeta}(t)$  具有相同的分布函数<sup>[7]</sup>, 即:

$$f(\check{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{\check{\zeta}^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (5)$$

\* 国家自然科学基金资助项目“波群的研究”成果的一部分。  
收稿日期: 1988年11月7日。

这里,  $\check{\zeta}(t)$  的定义为:

$$\check{\zeta}(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta(\tau)}{t - \tau} d\tau = \zeta(t) * h(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \quad (6)$$

式中, “P” 表示当  $\tau = t$  时积分取 Cauchy 主值, 式 (3) 所示  $\zeta(t)$  的 Hilbert 变换显然为:

$$\check{\zeta}(t) = A(t) \cos[\phi(t)] \quad (7)$$

现考虑如下过程:

$$Z(t) = a\zeta(t) + b\check{\zeta}(t) + c\dot{\zeta}(t) + d\check{\dot{\zeta}}(t)$$

$$= \left[ a\delta(t) + bh(t) + c \frac{d}{dt} \delta(t) + d \frac{d}{dt} h(t) \right] * \zeta(t) \quad (8)$$

式中,  $\delta(t)$  为脉冲函数;  $a, b, c, d$  是任意常数。由于该式方括号所合是线性算子, 故  $Z(t)$  也是平稳正态过程。依平稳过程理论容易证明,  $\zeta(t)$ ,  $\check{\zeta}(t)$ ,  $\dot{\zeta}(t)$  和  $\check{\dot{\zeta}}(t)$  为联合正态过程<sup>[7]</sup>。于是, 它们的联合分布函数为:

$$f(\zeta, \check{\zeta}, \dot{\zeta}, \check{\dot{\zeta}}) = \frac{1}{(2\pi)^2 |U|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \zeta_{\alpha} U_{\alpha\beta}^{-1} \zeta_{\beta} \right\} \quad (9)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$$

式中,  $\zeta_1 = \zeta$ ,  $\zeta_2 = \check{\zeta}$ ,  $\zeta_3 = \dot{\zeta}$ ,  $\zeta_4 = \check{\dot{\zeta}}$

$$U_{\alpha\beta} = E\{\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta}\} = R_{\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta}}(0)$$

这里  $R_{\zeta_{\alpha}\zeta_{\beta}}(\tau)$  代表  $\zeta_{\alpha}$  与  $\zeta_{\beta}$  的互相关函数。计算  $U$  的各元素得:

$$U = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 & m_1 \\ 0 & m_0 & -m_1 & 0 \\ 0 & -m_1 & m_2 & 0 \\ m_1 & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

和

$$|U| = (m_0 m_2 - m_1^2)^2 \equiv \Delta^2 \quad (11)$$

$$m_i = \int_0^{\infty} \omega^i S(\omega) d\omega, \quad i = 0, 1, 2 \quad (12)$$

为海浪频谱  $S(\omega)$  的  $i$  阶矩。与式(10)相对应的逆矩阵为:

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 & -m_1 \\ 0 & m_2 & m_1 & 0 \\ 0 & m_1 & m_0 & 0 \\ -m_1 & 0 & 0 & m_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

将式(11)和(13)代入式(9)得:

$$f(\zeta, \check{\zeta}, \dot{\zeta}, \check{\dot{\zeta}}) = \frac{1}{(2\pi)^2 \Delta} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Delta} [m_2(\zeta^2 + \check{\zeta}^2) + m_0(\dot{\zeta}^2 + \check{\dot{\zeta}}^2) + 2m_1(\check{\zeta}\dot{\zeta} - \zeta\check{\dot{\zeta}})] \right\} \quad (14)$$

对式(3)和(7)求导数分别得:

$$\dot{\zeta}(t) = \dot{A}(t) \cos[\Phi(t)] - \dot{\Phi}(t) A(t) \sin[\Phi(t)] \quad (15)$$

$$\dot{\xi}(t) = \dot{A}(t) \sin[\Phi(t)] + \dot{\Phi}(t) A(t) \cos[\Phi(t)] \quad (16)$$

由式(3),(7),(15)和(16)可得雅可比:

$$\frac{\partial(\zeta, \xi, \dot{\zeta}, \dot{\xi})}{\partial(A, \Phi, \dot{A}, \dot{\Phi})} = A^2 \quad (17)$$

于是,由式(14)可得  $A, \Phi, \dot{A}$  和  $\dot{\Phi}$  的联合分布函数:

$$f(A, \Phi, \dot{A}, \dot{\Phi}) = \frac{A^2}{(2\pi)^2 \Delta} \exp \left\{ -\frac{1}{2\Delta} [m_2 A^2 + m_0 (\dot{A}^2 + A^2 \dot{\Phi}^2) - 2m_1 \dot{\Phi} A^2] \right\} \quad (18)$$

将此式对  $\Phi$  由 0 至  $2\pi$  和对  $\dot{A}$  由  $-\infty$  至  $\infty$  积分得  $A$  和  $\dot{\Phi}$  的联合分布函:

$$f(A, \dot{\Phi}) = \sqrt{\frac{1}{2\pi m_0 \Delta}} A^2 \exp \left\{ -\frac{A^2}{2\Delta} (m_2 + m_0 \dot{\Phi}^2 - 2m_1 \dot{\Phi}) \right\} \quad (19)$$

再利用式(2)就可导出局部振幅  $A$  和局部周期  $T$  的联合分布函数:

$$f(A, T) = \frac{A^2}{T^2} \sqrt{\frac{2\pi}{m_0 \Delta}} (1 + e^{-\frac{4\pi m_1 A^2}{T \Delta}}) \exp \left\{ -\frac{A^2}{2\Delta} \left[ m_2 + m_0 \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 - 2m_1 \frac{2\pi}{T} \right] \right\} \quad (20)$$

将式(19)对  $\dot{\Phi}$  由  $-\infty$  至  $\infty$  积分,或等价地,将式(20)对  $T$  由 0 至  $\infty$  积分,都可得到局部振幅  $A$  的分布函数:

$$f(A) = \frac{A}{m_0} \exp \left\{ -\frac{A^2}{2m_0} \right\} \quad (21)$$

对  $A$  由 0 至  $\infty$  积分式(20)则给局部周期  $T$  的分布函数:

$$f(T) = \frac{\pi \Delta}{T^2 \sqrt{m_0} \left[ m_2 + m_0 \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 + 2m_1 \frac{2\pi}{T} \right]^{3/2}} \quad (22)$$

引入无量纲

$$a = A / \sqrt{\frac{\pi}{2} m_0} \quad (23)$$

$$\tau = T / \left( 2\pi \frac{m_0}{m_1} \right)$$

则式(21),(22)和(20)可分别改写为:

$$f(a) = \frac{\pi a}{2} \exp \left( -\frac{\pi}{4} a^2 \right) \quad (24)$$

$$f(\tau) = \frac{\tau \nu^2}{2} [\nu^2 \tau^2 + (\tau - 1)^2]^{-3/2} \left\{ 1 + \left[ \frac{\nu^2 \tau^2 + (\tau - 1)^2}{\nu^2 \tau^2 + (\tau + 1)^2} \right]^{3/2} \right\} \quad (25)$$

$$f(a, \tau) = \frac{\pi a^2}{4\tau^2} (1 + e^{-\frac{\pi a^2}{\nu^2}}) \exp \left\{ -\frac{\pi a^2}{4\nu^2 \tau^2} [\nu^2 \tau^2 + (\tau - 1)^2] \right\} \quad (26)$$

式中,

$$\nu^2 = \frac{m_0 m_2 - m_1^2}{m_1^2} = \frac{\Delta}{m_1^2} \quad (27)$$

为 Longuet-Higgins 提出的表征谱宽度的量<sup>[4]</sup>。

以上三个分布函数的导出,只假定海浪波面高度可视为平稳正态过程且可用式(1)表示,并不受窄谱条件的限制。由式(21)知,海浪局部振幅  $A(t)$  遵从 Rayleigh 分布;由式(22)可看出,局部周期  $T(t)$  的分布是不对称的, $T$  为零的概率为零。

式(20)或(26)所示的局部波高和局部周期联合分布函数,虽与文献[2]就窄谱海浪导出的海浪波高与周期的联合分布函数在形式完全相同,但区别不仅在于两者的变量有不同的定义,还在于前者是根据平稳正态过程及其 Hilbert 变换的基本性质,而后者是依载波理论和射线理论导出的,更重要的一点还在于前者的导出不受窄谱假定的限制。

## 二、实验验证

对以上导出的三个分布函数作了实验验证。实验是在青岛海洋大学物理海洋实验室大型水槽内进行的。该水槽长 65m、宽 1.2m、高 1.45m,实验时水深为 0.85m。水槽配有不规则波造波系统。波面高度是用电阻式测波仪测量的。测点距造波板 13m。由不规则波造波系统按给定控制程序产生三列具有不同谱宽度的波列:(a)窄谱( $\nu = 0.052$ ), (b)平均 JONSWAP 谱( $\nu = 0.308$ )和 (c) P-M 谱( $\nu = 0.417$ )。由此三列波的波面记录对  $A(t)$  和  $T(t)$  作经验统计并画出分布直方图,再与上面导出的理论分布作比较。

利用 Hilbert 变换技巧,容易从波面记录  $\zeta(t)$  把  $A(t)$  和  $\phi(t)$  计算出来。由式(3)和(6)可导出<sup>[6]</sup>:

$$A(t) = [\zeta^2(t) + \check{\zeta}^2(t)]^{1/2} \quad (28)$$

$$\phi(t) = \text{tg}^{-1} \left[ \frac{\check{\zeta}(t)}{\zeta(t)} \right] \quad (29)$$

而  $\check{\zeta}(t)$  可通过关系式

$$\mathcal{F}(\zeta + i\check{\zeta}) = \begin{cases} 2\mathcal{F}(\zeta) & (\omega \geq 0) \\ 0 & (\omega < 0) \end{cases} \quad (30)$$

利用 FFT 算法计算<sup>[6]</sup>,式中“ $\mathcal{F}$ ”代表 Fourier 变换。

图 1 是三波列局部振幅  $A(t)$  的经验分布直方图与理论分布[式(21)]的比较。由此图可看出,不论波列谱宽度是大还是小,经验与理论分布符合均好。

图 2 是由三个波列得到的无因次局部周期  $\tau(t)$  的经验分布直方图与式(25)所示的理论非对称分布和 Longuet-Higgins 的理论对称分布<sup>[5]</sup>

$$f(\tau) = \frac{\nu^2}{2[\nu^2 + (\tau - 1)^2]^{3/2}} \quad (31)$$

的比较。由此图可以看出,对窄谱海浪( $\nu = 0.052$ ),经验分布与两种理论分布差异均很小(对此情况,两种理论分布几乎完全重合)。对较宽谱的海浪( $\nu = 0.308$  和  $\nu = 0.417$ ),与经验分布相比较,Longuet-Higgins 的对称分布显示一定的偏离,且随谱宽的

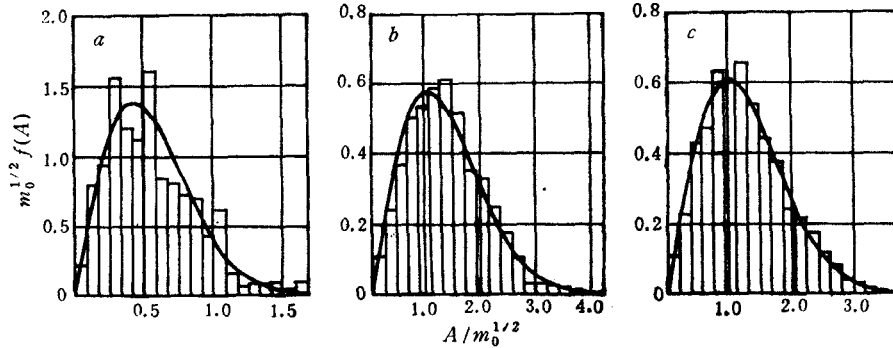


图1  $A(t)$  经验分布与理论 (Rayleigh) 分布的比较

Fig. 1 Comparison between empirical distribution of  $A(t)$  and theoretical distribution

a.  $\nu = 0.052$ ; b.  $\nu = 0.308$ ; c.  $\nu = 0.417$ .

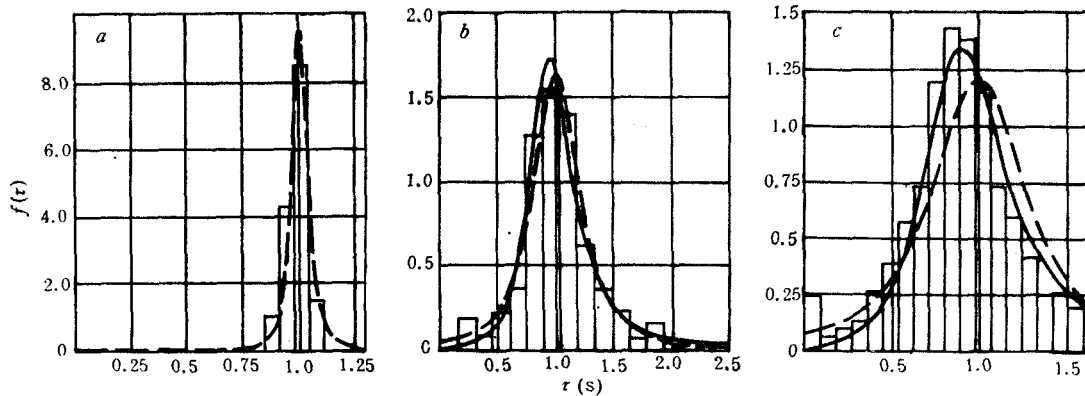


图2  $T(t)$  的经验分布与本文导出的理论非对称分布(----)和 Longuet-Higgins 的理论对称分布(——)之比较

Fig. 2 Comparison among empirical distribution of  $T(t)$  and theoretically unsymmetrical (----) and symmetrical (——) distributions

a.  $\nu = 0.052$ ; b.  $\nu = 0.308$ ; c.  $\nu = 0.417$ .

增大偏离加大,而式(25)所示的非对称分布符合均好且不受谱宽的影响。

### 参 考 文 献

- [1] 文圣常、余宙文,1984。海浪理论与计算原理。科学出版社,212页。
- [2] 孙孚,1988。海浪周期与波高的联合分布。海洋学报 10(4): 10—15。
- [3] 赵钰、徐德伦、楼顺里,1990。Hilbert 变换在波群统计中的应用 I.波群群高。海洋学报 12(3): 284—290。
- [4] 徐德伦等,1990。一种风浪破碎的判别方法。海洋学报 12(5): 648—653。
- [5] Longuet-Higgins, M. S., 1975. On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave field. *Proc. R. Soc. Lond.* A389: 258—261.
- [6] Melville, W. K., 1983. Wave modulation and breakdown. *J. Fluid Mech.* 128: 489—506.
- [7] Papoulis, A., 1965. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill.

## STATISTICAL DISTRIBUTIONS OF LOCAL WAVE AMPLITUDES AND PERIODS

Zhao Meng, Xu Delun and Lou Shunli

(Ocean University of Qingdao 266003)

### ABSTRACT

With an assumption that the sea surface elevation  $\zeta(t)$ , as a stochastic process, is stationary and normal and can be represented by

$$\zeta(t) = \text{Re}\{A(t)e^{i\phi(t)}\}$$

the distributions of the local amplitude  $A(t)$  and the local period

$$T(t) = 2\pi \left/ \left[ \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \right] \right.$$

and the joint distribution of  $A(t)$  and  $T(t)$ , are strictly derived, by using the theory of Hilbert transform, to be

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{A}{m_0} \exp \left\{ -\frac{A^2}{2m_0} \right\} \\ f(T) &= \frac{\pi \Delta}{T^2 \sqrt{m_0}} \left[ m_2 + m_0 \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 + 2m_1 \frac{2\pi}{T} \right]^{-3/2} \\ f(A, T) &= \frac{A^2}{T^2} \sqrt{\frac{2\pi}{m_0 \Delta}} \left( 1 + e^{-\frac{4\pi m_1 A^2}{T \Delta}} \right) \exp \left\{ -\frac{A^2}{2\Delta} \right. \\ &\quad \left. \left[ m_2 + m_0 \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 - 2m_1 \frac{2\pi}{T} \right] \right\} \end{aligned}$$

where

$$m_i = \int_0^\infty \omega^i S(\omega) d\omega, \quad i = 0, 1, 2$$

is the  $i$ th order moment of the wave spectrum  $S(\omega)$ , and

$$\Delta = m_0 m_2 - m_1^2$$

Equivalently, the above three distributions can be expressed in terms of dimensionless variables

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{\pi a}{2} \exp \left\{ -\frac{\pi}{4} a^2 \right\} \\ f(\tau) &= \frac{\tau \nu^2}{2} [\nu^2 \tau^2 + (\tau - 1)^2]^{-3/2} \left\{ 1 + \left[ \frac{\nu^2 \tau^2 + (\tau - 1)^2}{\nu^2 \tau^2 + (\tau + 1)^2} \right]^{3/2} \right\} \\ f(a, \tau) &= \frac{\pi a^2}{4\tau^2} \left( 1 + e^{-\frac{\pi a^2}{\tau^2}} \right) \exp \left\{ -\frac{\pi a^2}{4\nu^2 \tau^2} [\nu^2 \tau^2 + (\tau - 1)^2] \right\} \end{aligned}$$

where

$$a = A / \sqrt{\frac{\pi}{2} m_0}, \quad \tau = T / \left(2\pi \frac{m_0}{m_1}\right)$$

are the introduced dimensionless quantities and

$$\nu = \sqrt{\frac{\Delta}{m_1^2}}$$

is a measure of spectral width defined by Longuet-Higgins.

Three trains of random waves with respectively a narrow spectrum ( $\nu = 0.052$ ), a JONSWAP spectrum ( $\nu = 0.308$ ), and a P-M spectrum ( $\nu = 0.417$ ) generated by a program-controlled wave generator are used to test the distributions. It is found that in all of the three cases the theoretical distributions given above are consistent well with the actual ones, not affected by the spectral width, while those derived by Longuet-Higgins with the narrow band assumption deviate to a certain extent from the actual ones and the larger the spectral width the more serious the deviation.