第22卷 第3期 海洋与湖沼 Vol. 22, No. 3
1991年5月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA May, 1991

研究简报

论浅海的长期输运过程*

鹿有余
(青岛海洋大学,266003)

在浅海中，最显著的经久不息的运动是潮运动，其对于物质输运过程起着重要的作用。对于表征像水温、盐度等海水特性以及像营养盐、沉积物、污染物等溶液或悬浮质浓度的“表观浓度”而言，除了随着潮流的周期性变化外，还将由于湍扩散及潮致余流的积累作用而产生长期变化。在弱非线性系统的假设下，采用摄动法直接求解关于“浓度”的对流-扩散方程，可以分析上述变化，并可据此对特别有意义的长期输运方程及与之密切相关的 *Lagrange* 余流进行探讨。

一、弱非线性系统的潮致 *Lagrange* 余流

基于量阶分析的结果，一个弱非线性的正压浅海流体动力学模型已被提出并得到反复应用[2-4]。本文将沿袭这一模型。

实际浅海运动往往存在一种占优势的分潮，故我们讨论单一分潮波(如 M_2)由外海传入的情形，由此所导致的浅水分潮和 *Lagrange* 余流已有充分研究[2,3]其主要结论如下。

根据潮波运动的特点对运动方程组进行尺度分析，取湍粘性系数仅为空间坐标的函数，则系统的非线性仅由一个无因次参数 κ 来表达。一般地，κ 为一小参数:

$$\mathscr{O}(\kappa) < 1 \tag{1}$$

$\mathscr{O}$ 表示( )内物理量的量阶。这表明系统是弱非线性的，可依据 κ 对运动方程组进行摄动展开，从而可得潮流:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \kappa \boldsymbol{u}_1 + \kappa^2 \boldsymbol{u}_2 + \mathscr{O}(\kappa^3) \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{u}_j (j = 0, 1, 2, \cdots)$ 为各阶无因次潮流，如:

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_0' \cos\theta + \boldsymbol{u}_0'' \sin\theta \tag{3}$$

式中，θ 为无因次时间。

定义 *Lagrange* 平均速度 $\boldsymbol{u}_{LR}$ 为在 θ_0 时刻由某个初始位置释放的流体微团经过 n 个潮周期所取得的 *Lagrange* 位移 $N\boldsymbol{\xi}$ 与无因次时间 $2\pi n$ 之比，即

$$\boldsymbol{u}_{LR} = \frac{1}{2\pi n} N\boldsymbol{\xi} \tag{4}$$

这里

$$N = 1 + (n - 1)\kappa \tag{5}$$

* 本文得到冯士筰教授的指导和帮助，深致谢忱。
收稿日期: 1989年8月9日。

当N满足

$$\mathscr{O}(N) = 1 \tag{6}$$

可以用摄动展开法求得:

$$\boldsymbol{u}_{LR} = \kappa \boldsymbol{u}_{LM} + \kappa^2 \boldsymbol{u}_{LP} + \mathscr{O}(\kappa^3) \tag{7}$$

并可以证明 $\boldsymbol{u}_{LR}$ 满足管量场条件而构成通常意义下的流场，我们称之为 *Lagrange* 余流。这里，$\boldsymbol{u}_{LM}$ 和 $\boldsymbol{u}_{LD}$ 分别称之为质量输运速度和 *Lagrange* 漂流，前者仅是空间坐标的函数,后者还与初始位相 θ_0 有关。

值得注意的是,式(6)给出了取得 *Lagrange* 余流的潮周期个数或时间长度的限制。我们可以求取更长时间即 $\mathscr{O}(N) > 1$ 的 *Lagrange* 平均速度,但这时一般不能证明其满足管量场条件而构成余流场。设海区的特征宽度和特征深度分别为 L, D,流体微团经过 n 个潮周期所取得的水平和垂直 *Lagrange* 位移的特征值为 ξ_c 和 ζ_c，则

$$\xi_c/L = \kappa N \tag{8}$$

$$\zeta_c/D = \kappa N \tag{9}$$

按 *Feng*[3]的量阶分析,(6)对应着数日至月的平均; $\mathscr{O}(N) > 1$ 为取季以上的平均,这时流体微团的位移可以达到跨越海区宽度或深度的量阶，即超出所关心的海区或到达岸边或海底，这时模型已不能反映其运动了。或者说，*Lagrange* 余流不能像 *Euler* 余流那样构成长期如季节、年的平均环流。

二、潮流作用下浓度的对流-扩散方程的摄动解

控制浓度 S(指"表观浓度")的对流-扩散方程的无因次形式为:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} + \kappa \boldsymbol{u} \cdot \nabla S = \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial S}{\partial z}\right) \tag{10}$$

式中,k 为湍扩散系数,无因次参数

$$\varepsilon = k_c/\omega D^2 \tag{11}$$

k_c 为 k 的特征值,ω^{-1} 为时间的特征值。

ε 与 κ 之比，反映了湍扩散作用与对流作用的相对大小。对实际存在的输运过程，ε/κ 的量阶也有不同,我们提出以下三种情形。

(i) $\mathscr{O}(\varepsilon/\kappa) = \kappa^2$ (12)

(ii) $\mathscr{O}(\varepsilon/\kappa) = \kappa$ (13)

(iii) $\mathscr{O}(\varepsilon/\kappa) = 1$ (14)

按渤海的量阶分析，对应 k_c 分别为 (i) $1\mathrm{cm^2/s}$; (ii) $10\mathrm{cm^2/s}$; (iii) $100\mathrm{cm^2/s}$。依据 *Bowden*[1],这三种情形包含了从弱潮流对强潮流作用的情形：记

$$\mathscr{E}_i = \varepsilon/\kappa^{4-i} (i = 1,2,3) \tag{15}$$

则

$$\mathscr{O}(\mathscr{E}_i) = 1 (i = 1,2,3) \tag{16}$$

对于满足(1)的弱非线性系统,可以依据 κ 对(10)进行摄动展开;进一步,如果各阶潮流场已知,可以依次进行时间积分求解。我们以情形(ii)为例来讨论,得到解为:

$$S_0 = (S_0)_c \tag{17}$$

$$S_1 = (S_1)_c + S'_{11}\cos\theta + S''_{11}\sin\theta \tag{18}$$

$$S_2 = (S_2)_c + \left[\mathscr{E}_2 \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial (S_0)_c}{\partial z}\right) - \boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla(S_0)_c\right]\theta + \sum_{j=1}^{2}(S'_{2j}\cos j\theta + S''_{2j}\sin j\theta) \tag{19}$$

$$S_3 = (S_3)_c + \left[\mathscr{E}_2 \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial (S_1)_c}{\partial z}\right) - \boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla(S_1)_c\right]\theta + (\boldsymbol{u}''_0\cos\theta - \boldsymbol{u}''_0\sin\theta)\cdot\nabla\left[\mathscr{E}_2 \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial (S_0)_c}{\partial z}\right) - \boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla(S_0)_c\right]\theta + \sum_{j=1}^{3}(S'_{3j}\cos j\theta + S''_{3j}\sin j\theta) \tag{20}$$

而

$$S = S_0 + \kappa S_1 + \kappa^2 S_2 + \kappa^3 S_3 + \mathscr{O}(\kappa^4) \tag{21}$$

式中，$(S_j)_c(j = 0,1,2,3)$ 表示积分时不随 θ 变化的部分，而

$$S'_{11} = \boldsymbol{u}''_0\cdot\nabla(S_0)_c \tag{22}$$

$$S''_{11} = -\boldsymbol{u}'_0\cdot\nabla(S_0)_c \tag{23}$$

其余 $S'_{ij}, S''_{ij}(i = 2,3; j = 1,2,3)$ 的表达式不再给出。

我们发现，对高阶(二、三阶以上)的浓度场，除了随潮流的周期性变化以外，还将由于湍扩散及 *Lagrange* 余流的积累作用产生非周期变化的成分。后者将导致浓度场的长期变化，这是我们所关注的。

我们将(17)—(21)中周期性振荡的部分滤掉。讨论由某初始时刻 θ_0 的浓度场推断经过 n 个潮周期即 $2\pi n + \theta_0$ 时刻的场，分别以$(\quad)_0$ 和$(\quad)_n$ 记之，有

$$(S_0)_n - (S_0)_0 = 0 \tag{24}$$

$$(S_1)_n - (S_1)_0 = 0 \tag{25}$$

$$(S_2)_n - (S_2)_0 = \Delta_0 \tag{26}$$

$$(S_3)_n - (S_3)_0 = \Delta_1 \tag{27}$$

式中，

$$\Delta_0 = \mathscr{E}_2 \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial (S_0)_0}{\partial z}\right) - \boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla(S_0)_0 \tag{28}$$

$$\Delta_1 = \mathscr{E}_2 \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial (S_1)_0}{\partial z}\right) - \boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla(S_1)_0 - \boldsymbol{u}_{LD}\cdot\nabla(S_0)_0 + \mathscr{E}_2\frac{\partial}{\partial z}\left\{k\frac{\partial[(\boldsymbol{u}'_0\sin\theta_0 - \boldsymbol{u}''_0\cos\theta_0)\cdot\nabla(S_0)_0]}{\partial z}\right\} - (\boldsymbol{u}'_0\sin\theta_0 - \boldsymbol{u}''_0\cos\theta_0)\cdot\nabla\mathscr{E}_2\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial (S_0)_0}{\partial z}\right) \tag{29}$$

而

$$(S)_n - (S)_0 = 2\pi n\kappa^2\Delta_0 + 2\pi n\kappa^3\Delta_1 + \mathscr{O}(n\kappa^4) \tag{30}$$

对于情形 (i),(iii)，可以用同样的方法求解，结果如下

情形(i)

$$(S)_n-(S)_0=2\pi n\kappa^2\Delta_0+2\pi n\kappa^3\Delta_1+\mathscr{O}(n\kappa^4) \tag{31}$$

式中，

$$\Delta_0=-\boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla(S_0)_0 \tag{32}$$

$$\Delta_1=-\boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla(S_1)_0-\boldsymbol{u}_{LD}\cdot\nabla(S_0)_0+\mathscr{E}_1\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial(S_0)_0}{\partial z}\right) \tag{33}$$

情形(iii)

$$(S)_n-(S)_0=2\pi n\kappa\Delta_0+2\pi n\kappa^2\Delta_1+2\pi n\kappa^3\Delta_2+\mathscr{O}(n\kappa^4) \tag{34}$$

式中，

$$\Delta_0=\mathscr{E}_3\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial(S_0)_0}{\partial z}\right) \tag{35}$$

Δ_1,Δ_2 的形式过于复杂不再给出，只指出其中分别包含了 $-\boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla(S_0)_0$ 项和 $-\boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla(S_1)_0$ 与 $-\boldsymbol{u}_{LD}\cdot\nabla(S_0)_0$ 项。

三、浓度场的长期变化——长期输运方程

对于前述讨论浓度场经过 n 个潮周期变化的式(30),(31)和(34)，如果

$$\Delta_0\neq 0 \tag{36}$$

则对情形 (i),(ii) 而言,当 n 满足

$$\mathscr{O}(n\kappa^2)=\kappa \tag{37}$$

对情形 (iii) 而言, n 满足

$$\mathscr{O}(n\kappa)=\kappa \tag{38}$$

时,浓度场的变化为

$$\mathscr{O}(S)_n-(S)_0=\mathscr{O}(\kappa) \tag{39}$$

欲求更长时间的变化,则要对 Δ_0 修正后重新按(30),(31)或(34)计算。也就是说，每次计算时要满足(37)或(38)的限制。 我们曾指出，在求取 *Lagrange* 余流时有式(6)的限制,由(5)知,满足(37),(38)则必满足(6)。因此,(6)所给出的求取 *Lagrange* 余流的限制并不影响计算浓度场的长期变化。

当 n 满足(37)或(38)时,也可以对浓度场在这 n 个潮周期内进行平均,以$\langle S\rangle$记之,而讨论这样得到的潮周期平均浓度场的长期变化。对情形 (i), (ii) 而言,$\langle S\rangle$的显著变化将体现在 $\kappa^{-2}\omega^{-1}$ 的时间尺度上;对 (iii) 而言，体现在 $\kappa^{-1}\omega^{-1}$ 的时间尺度上。 我们仍以情形(ii)为例来说明。引入新的无因次时间:

$$\theta_2=\kappa^{-2}\theta \tag{40}$$

由(17)—(20)导出:

$$\frac{\partial\langle S_0\rangle}{\partial\theta_2}=\mathscr{E}_2\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\langle S_0\rangle}{\partial z}\right)-\boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla\langle S_0\rangle \tag{41}$$

$$\frac{\partial\langle S_1\rangle}{\partial\theta_2}=\mathscr{E}_2\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\langle S_1\rangle}{\partial z}\right)-\boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla\langle S_1\rangle \tag{42}$$

如果记

$$\langle S\rangle=\langle S_0\rangle+\kappa\langle S_1\rangle+\mathscr{O}(\kappa^2) \tag{43}$$

得到

$$\frac{\partial\langle S\rangle}{\partial\theta_2}=\mathscr{E}_2\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\langle S\rangle}{\partial z}\right)-\boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla\langle S\rangle \tag{44}$$

式(44)是表征潮周期平均的浓度场长期变化的方程，或称之为长期物质输运方程。*Hamrick*[5]曾利用两个时间尺度系统的摄动法得到了此式，但未对时间尺度的取法加以说明；我们通过分析浓度场的长期变化，自然地将新的时间尺度引入了。

我们指出一种特例，即

$$\Delta_j=0\quad(j=0,1,2,\cdots) \tag{45}$$

这时$\langle S\rangle$不再具有长期变化，(44)退化为

$$\mathscr{E}_2\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\langle S\rangle}{\partial z}\right)-\boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla\langle S\rangle=0 \tag{46}$$

这是 *Feng*[3,4]给出的表征潮周期平均浓度场长期分布的长期物质输运方程，它表示对流与扩散效应达到了平衡。

我们可以引入算子

$$\Delta=\mathscr{E}_2\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\langle S\rangle}{\partial z}\right)-\boldsymbol{u}_{LM}\cdot\nabla\langle S\rangle \tag{47}$$

作为判别某一海区环境因素长期变化的因子。如果 S 表示某种污染物的浓度，则 $\Delta>0$ 表示该海区将逐渐受到污染；$\Delta<0$ 表示将得到净化。

情形(i)和(iii)可同样讨论，只是Δ的表达式不同。

需要指出的是，在以上关于浓度场长期变化的表达式中，单纯的对流作用都是以 *Lagrange* 余流表达的，这表明了长期物质输运的 *Lagrange* 性质。

关于初始位相包括 *Lagrange* 漂流 $\boldsymbol{u}_{LD}$ 的作用，在三种情形中，在讨论从某初始位相 θ_0 开始浓度场经过 n 个潮周期的变化时，θ_0 的作用体现在 Δ_1 的表达式中，这表明潮周期的不同位相，经过相同的潮周期后，浓度的改变是不同的；但对潮周期平均的浓度场的长期变化而言，θ_0 的作用包括 $\boldsymbol{u}_{LD}$ 的作用不再体现，起对流输运作用的只有质量输运速度 $\boldsymbol{u}_{LM}$，至少在最低几阶上是如此的。

四、结　论

在弱非线性系统的假设下，我们用摄动法直接求解了潮流作用下浓度的对流-扩散方程，并用于讨论浅海的长期物质输运过程；我们指出，由于湍扩散及潮致 *Lagrange* 余流的积累作用而导致了浓度场的长期变化；导出了表征潮周期平均浓度场长期变化的方程，以前的表征长期分布的方程作为一个特例被给出；就 *Lagrange* 余流而言，虽然有数日至一两个月的平均时间限制而不能构成长期环流，但并不影响对于长期物质输运过程的研究；对潮周期平均浓度场的长期变化而言，*Lagrange* 漂流不起作用。

本文讨论只限于正压模型及单一潮波输入的情形，可望推广到更复杂的情形并得到观测和数值模拟结果的检验。

参　考　文　献

[1] Bowden, K. F., 1983. Physical Oceanography of Coastal Waters. Ellis Horwood Ltd., England, pp. 302.

[2] Feng, S., 1977. A three-dimensional nonlinear model of tides. *Scientia Sinica* **20**(4): 436—446.
[3] Feng, S., 1986. A three-dimensional weakly nonlinear dynamics on tide-induced Lagrangian residual current and mass-transport. *Chin. J. Oceanol. Limnol.* 4(2): 139—158.
[4] Feng, S., 1987. A three-dimensional weakly nonlinear model of tide-induced Lagrangian residual current and mass-transport, with an application to the Bohai Sea. Three-dimensional Models of Marine and Estuarine Dynamics. Elsevier Publ. Co., Amsterdam, pp. 471—488.
[5] Hamrick, J. M., 1987. Time averaged estuarine mass transport equations. Proc. 1987 Nation Conf. Hydraulic Engineer. ASCE. New York, pp. 624—629.

ON LONG-TERM TRANSPORT PROCESSES IN SHALLOW SEAS

Lu Youyu
(*Ocean University of Qingdao, 266003*)

ABSTRACT

Based upon a weakly nonlinear dynamic model, a perturbation solution of convection-diffusion equation of concentration in a sole-tide system is obtained. The results are used to discuss the long-term transport processes in shallow seas. The paper points out that the long-term variation of concentration is induced by the turbulent diffusion and the convection of tide-induced Lagrangian residual current. An equation indicating the time averaged concentration over tidal cycles is deduced with the former one, indicating the long-term distribution, as a special case. The Lagrangian residual current is limited by an averaging period of several days to one or two months to constitute long-term circulation, but this has no limitation to the discussion of long-term transport processes. As to the Lagrangian drift, it has effect on the phase when maximum or minimum concentration occures but not on the long-term variation of tidal cycle averaged concentration.