第24卷 第6期　　海洋与湖沼　　Vol. 24, No. 6
1993年11月　　OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA　　Nov., 1993

一个新的破碎波统计模式*

袁业立　华锋
(国家海洋局第一海洋研究所，青岛 266003)

N. E. Huang
(*Laboratory for Oceans, NASA Goddard Space Flight Centre, Greenbelt MD 20771*)

M. A. Donelan
(*National Water Research Institute of Canada, Burlington L7R 4A6*)

提要　由运动方程和涡度方程所导得的两个首次积分估计给出了海波破碎的发生条件和破碎波的波面限制。由这两个条件所构造的新的破碎波统计模式，可导出海波的破碎面积率、破碎体积率和破碎能量损耗率的解析表达式，加之一个简单的白冠物理模型又导出了一个新的白冠覆盖率的解析表达式。

关键词　破碎波　破碎波统计模式　白冠覆盖率

由于海波破碎在海洋遥感学、海洋声学和海气相互作用过程中所起的主导作用，近年来受到极大的重视。破碎现象的动力学描述是极端困难的，加之海波的随机性更增加了问题的复杂性和解题难度。这种现状推动了大量实验研究的开展。在众多的研究工作中破碎波的统计研究是相对发展的 (Longuet-Higgins, 1969; 袁业立等, 1986; Huang, 1991; Tung, 1989; 袁业立,1988;华锋 1992)。所开展一系列的破碎波统计研究,得到了许多为实验资料和海浪数值模拟结果多方验证了的统计结果，推动了破碎波统计研究的发展。无疑,建立合理的破碎波统计模型是破碎波统计研究的关键。

本文推广了 Bannar 等(1974)的分析方法，得到了可描述破碎波面形式和破碎波发生条件的两个首次积分,并在此基础上建立了一个新的破碎波统计模型,作为这种模式的一类应用,导出了在相当窄谱情况下破碎面积率、破碎体积率和破碎能量损耗率以及白冠覆盖率的解析表达式,它们明显地依赖于海波波面谱的零阶、二阶和四阶矩，也依赖于海波面的平均风漂流速度,推广了早期同类工作的结果。

1　破碎波统计模型的建立

1.1　破碎波面的表达　　由于极薄的近似常垂直动量通量风漂流层的水平空间尺度和变化时间尺度都远大于波动的特征波长和特征周期,在局地随波运动坐标中,忽略局地时间变化项和垂直动量通量变化项,运动方程可写成:

---

* SWADE 合作项目和国家自然科学基金重点项目,487021号。
收稿日期: 1992年7月9日，接受日期: 1992年8月20日。

$$\vec{u} \times \vec{\omega} = -\nabla\left\{\frac{1}{2}\vec{u}^2 + gz + \frac{p}{\rho}\right\} \tag{1}$$

这样沿自由表面有：

$$\frac{1}{2}u_S^2 + g\zeta = \mathrm{const}_1 \tag{2}$$

式中，const_1 为一局地常数；u_S 为沿自由表面的总流速，它等于同切于波面的表面波动运动速度 u_W 和表面风漂流速度 u_D 的和，即：

$$u_S = u_W + u_D \tag{3}$$

借用 Levi Civita 定理，可由下式定义局地波速 c，

$$\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} u_W^2 dx = c \tag{4}$$

由于在随波运动坐标系中，未破碎波面上速度 u_W 应总与波传播方向相反，因此：

$$|c + \bar{u}_W| \ll c \tag{5}$$

式中，$\bar{u} = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} u_W dx$，这样由(2)式，考虑到 $\vec{u}_W$ 与 $\vec{u}_D$ 同切于波面和 $\vec{u}_D$ 变化的缓慢性，采用中值定理则有：

$$\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2}(\vec{u}_W + \vec{u}_D)dx = 2\lambda\mathrm{const}_1 = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} u_W^2 dx + 2u_{D0}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} u_W dx + \lambda u_{D0}^2 \tag{6}$$

或由(3)和(4)近似地有：

$\mathrm{const}_1 = \frac{1}{2}(c - u_{D0})^2$，代入(2)式即得：

$$\frac{1}{2}u_S^2 + g\zeta = \frac{1}{2}(c - u_{D0})^2 \tag{7}$$

鉴于波面滞止点的出现与海波破碎的发生在动力学上的等价性，破碎波面 ζ_b 应满足如下关系式：

$$\zeta_b = \frac{c}{2g}\left(1 - \frac{u_{D0}}{c}\right)^2 \tag{8}$$

1.2 破碎事件的发生 在以局地波速运动的波面曲面坐标中，风漂流层的涡度及涡度方程可写成如下形式：

$$\vec{\omega} = \left(-\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z}, 0\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j\omega_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i\omega_j) + \nu\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} \tag{10}$$

在风漂流层中对以上方程作垂直积分，我们有：

$$\frac{\partial \Delta(\vec{u})}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\{\Delta(\vec{u}^2)\} = \Delta\left(\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}\right) \tag{11}$$

式中，$\Delta(\cdot)$ 表示综数的波面值与漂流层底部值的差，如

$$\Delta(\vec{u}) = \vec{u}_S - \vec{u}_W, \Delta(\vec{u}^2) = \vec{u}_S^2 - \vec{u}_W^2, \Delta\left(\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}\right) = \left.\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}\right|_S - \left.\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z}\right|_W \tag{12}$$

同样地，在极薄的常垂直动量通量风漂流层中，忽略右端项 $\Delta(\partial\vec{\tau}/\partial z)$ 和局地时间变化项，方程简化为：

$$\nabla\{\Delta(\vec{u}^2)\} = 0$$

即对风漂流层有：　$\Delta(\vec{u}^2) = \text{const}_2$

由定义(3)和(12)式，考虑到 $\vec{u}_W$ 和 $\vec{u}_D$ 均切于波面，这样

$$\Delta(\vec{u}^2) = (u_W + u_D)^2 - u_W^2 = 2u_W u_D + u_D^2 = \text{const}_2$$

其中局地常数 const_2 可由上式两端取积分确定

$$\text{const} = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2}(2u_W u_D + u_D^2)dx \cong -2cu_{D0} + u_{D0}^2$$

这样

$$2u_W u_D + u_D^2 = -2cu_{D0} + u_{D0}^2 \tag{13}$$

因此

$$u_W + u_D = -\sqrt{u_W^2 - 2cu_{D0} + u_{D0}^2} \tag{14}$$

上式右端或为负实数，海波处于未破碎状态；或为虚数，海波破碎。这样海波破碎发生的条件应是：

$$u_W^2 - 2cu_{D0} + u_{D0}^2 \leqslant 0 \tag{15}$$

由(5)式波动运动速度（u_W）分解为坐标运动速度（$-c$）与波动质点轨迹速度（W）的和 $u_W = -c + W$，这样(15)可改写为：

$$2cW \geqslant c^2\left\{\left(1 - \frac{u_{D0}}{c}\right)^2 + \left(\frac{W}{c}\right)^2\right\} \text{ 或 } (c - W - u_{D0})^2 \leqslant 2Wu_{C0} \tag{16}$$

上式表明，波面发生破碎处的波面质点轨迹速度与表面风漂流速度同向；显然当无风漂流速度时，破碎波发生的条件为 $W = c$，即波面质点的向前轨迹速度等于局地波速，实际上这里是波面滞止点，$u_W = -c + W = 0$。

1.3 破碎波统计模型的构造　由以上所导出的破碎波面表达式（8）和破碎发生条件(16)式可构造如下破碎波统计模型：

$$\zeta_b = \frac{c^2}{2g}\left(1 - \frac{u_{D0}}{c}\right)^2 H\left\{W - c\left[1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{u_{D0}}{c}\right)^2}\right]\right\} + \zeta H\left\{-W + c\left[1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{u_{D0}}{c}\right)^2}\right]\right\} \tag{17}$$

2 破碎面积率、破碎体积率和破碎能量损耗率的统计

破碎波的许多问题涉及到单位时间破碎发生的面积——破碎面积率 S_t，单位时间破碎的水体体积——破碎体积率 V_t，以及单位时间内破碎损耗的能量——破碎能量损耗率 ε_t。作为破碎波统计的基础量，下面导出它们的解析表达式，它们明显地依赖于海波谱的前四阶矩和海面风漂流速度等。

2.1 发生率概率分布密度函数的导出　海波是一种典型的弱非线性现象，其概率分布函数可以在初阶正态分布的前提下，借用摄动方法导出，但是其统计实质无疑应包含在其首阶近似之中，本项工作为了使结果更加简捷，将不对高阶项作进一步讨论。对于均匀的正态风波场，我们有如下意义相当明确的分布密度函数和关系式：

(1) 单位弧度内固定 $\dot{\zeta} = S$ 下的 $\{\zeta, \ddot{\zeta}\}$ 联合概率分布密度函数，

$$\rho(\zeta, \ddot{\zeta}|\dot{\zeta} = S) = \frac{p_N(\zeta, \dot{\zeta} = S, \ddot{\zeta})|\ddot{\zeta}|}{\iint p_N(\zeta, \dot{\zeta} = S, \ddot{\zeta})|\ddot{\zeta}|d\zeta d\ddot{\zeta}}$$

(2) $\dot{\zeta}=S$ 的发生率, $N=N(S)=\iint p_N(\zeta,\dot{\zeta}=S,\ddot{\zeta})|\ddot{\zeta}|d\zeta d\ddot{\xi}$。

(3) 发生率 $N(S)$ 的概率分布密度函数, $p(N)dN=p(S)dS$。

采用贝叶斯定理,可组合成事件 $(\zeta,\ddot{\zeta})$ 发生率的概率分布密度函数如下,

$$p_t(\zeta,\ddot{\zeta})=\int p(\zeta,\ddot{\zeta}|\dot{\zeta}=S)N(S)p(N)dN$$

$$=\frac{|\ddot{\zeta}|}{4\pi^{1/2}(\mu_0\mu_2\mu_4)^{1/2}(1-\rho^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\zeta}{\mu_0^{1/2}}\right)^2+2\rho\left(\frac{\zeta}{\mu_0^{1/2}}\right)\left(\frac{\ddot{\zeta}}{\mu_4^{1/2}}\right)+\left(\frac{\ddot{\zeta}}{\mu_4^{1/2}}\right)^2\right]\right\} \tag{18}$$

对于相当窄谱海波场有如下近似关系: $W=-\alpha\frac{c\ddot{\zeta}}{g}$ (19)

$$\zeta=-\frac{c^2\ddot{\zeta}}{g} \tag{20}$$

其中 α 为一非线性修正系数,按 Longuet-Higgins 的理论,它接近 2。相应地随机事件 $\{c,\ddot{\zeta}\}$ 的发生率概率分布密度函数可写成:

$$p(c,\ddot{\zeta})=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mu_4}{\mu_2}\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{\pi(1-\rho^2)}}\left(\frac{\mu_4^{1/4}c}{g\mu_0^{1/4}}\right)\left(\frac{\ddot{\zeta}}{\mu_4^{1/2}}\right)^2$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\ddot{\zeta}}{\mu_4^{1/2}}\right)\left[\left(\frac{\mu_4^{1/4}c}{g\mu_0^{1/4}}\right)^2-\rho\right]^2\right\}$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{\zeta}}{\mu_4^{1/2}}\right)^2\right\}\left(\frac{\mu_4^{1/4}}{g\mu_0^{1/4}}\right)\left(\frac{1}{\mu_4^{1/2}}\right) \tag{21}$$

其中 $\rho=\frac{\mu_2}{\mu_0^{1/2}\mu_4^{1/2}}$, $\varepsilon^2=1-\rho^2$,后者为所谓谱宽度。

2.2 破碎面积、体积和能量损耗率的导出 对于一均匀海波场,按定义破碎面积、体积和能量损耗率可分别写成:

$$S_t=E_t\left\{\frac{\iint_S H(A)dS}{S}\right\}=E_t\{H(A)\} \tag{22}$$

式中, A 表示满足破碎发生条件(16)下的波面集; E_t 是在分布函数(18)或(21)下的数学期望,

$$V_t=E_t\left\{\frac{\iint_S(\zeta-\zeta_b)H(A)dS}{S}\right\}=E_t\{(\zeta-\zeta_b)H(A)\} \tag{23}$$

$$\varepsilon_t=E_t\left\{\frac{\iint_S g\rho_W(\zeta^2-\zeta_b^2)H(A)dS}{S}\right\}=E_t\{\rho_W g(\zeta^2-\zeta_b^2)H(A)\} \tag{24}$$

采用相当窄谱情况下的近似式(19),条件(16)可写成:

$$\ddot{\zeta} \leqslant -\frac{g}{\alpha}\left[1-\sqrt{1-\left(1-\frac{u_{D0}}{c}\right)^{2}}\right] \tag{25}$$

这样(22)式可写成如下最速下降法适用形式：

$$\begin{aligned} S_t \cong & \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mu_4}{\mu_2}\right)^{1/2}\int_{\frac{g}{\alpha}[1-\sqrt{1-(1-\frac{u_{D0}}{c})^2}]}^{\infty} 2^{-1/2}\left(\frac{-\ddot{\zeta}}{\mu_4^{1/2}}\right) \\ & \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{-\ddot{\zeta}}{\mu_4^{1/2}}\right)^2\right\} d\left(\frac{-\ddot{\zeta}}{\mu_4^{1/2}}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}(1-\rho^2)^{1/2}}\left(\frac{-\ddot{\zeta}}{\mu_4^{1/2}}\right) \\ & \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{-\ddot{\zeta}}{\mu_4^{1/2}}\right)^2\left[\left(\frac{\mu_4^{1/4}c}{g\mu_0^{1/4}}\right)-\rho\right]^2\right\}\left(\frac{\mu_4^{1/4}c}{g\mu_0^{1/4}}\right) \end{aligned} \tag{26}$$

式中 c_0 为如下方程的正根；$\frac{\mu_4^{1/4}c}{g\mu_0^{1/4}}-\rho=0$，即 $c_0=g\left(\frac{\mu_\Delta}{\mu_2}\right)^{1/2}$。

注意到 $\frac{q}{\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-q^2x^2\}dx=1$，则可得如下近似式，

$$S_t \cong \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mu_4}{\mu_2}\right)^{1/2} 2^{-1/2}\exp\left\{-\frac{g^2}{2\alpha^2\mu_4}\left[1-\sqrt{1-\left(1-\frac{u_{D0}}{c}\right)^2}\right]\right\} \tag{27}$$

类似地我们可得：

$$V_t=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mu_4}{\mu_2}\right)^{1/2}\frac{\mu_2}{(2\mu_4)^{1/2}}\int_{\frac{g}{\alpha\mu}[1-\sqrt{1-(1-\frac{u_{D0}}{c})^2}]}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx \tag{28}$$

$$\varepsilon_t=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mu_4}{\mu_2}\right)^{1/2}\frac{2g\rho_W\mu_2^2}{2\mu_4}\exp\left\{-\frac{g^2}{2\alpha^2\mu_4}\left[1-\sqrt{1-\left(1-\frac{u_{D0}}{c}\right)^2}\right]\right\} \tag{29}$$

2.3　白冠覆盖率的导出　　白冠覆盖率是海面破碎波生气泡覆盖面积的测度比，它一方面取决于破碎面积的生成率 S_t，另一方面也取决于被破碎波卷入海水的气泡云的维持时间 T_{bm}。后者等于气泡平均卷入深度 H_{in} 与气泡平均上升速度 W_b 的比。如果假定气泡平均卷入深度 H_{in} 与破碎水体平均厚度成比例，$H_{in}=\mathrm{const}_3\frac{V_t}{S_t}$；

并气泡平均上升速度 W_b 为一常数，这样白冠覆盖率 ω 可计算如下：

$$\begin{aligned}\omega &= S_t\cdot T_{bm}=S_t\cdot \mathrm{const}_3\frac{V_t}{S_tW_b}=\mathrm{const}_4V_t \\ &= \mathrm{const}_4\frac{\overline{H}}{T_z}\int_{\frac{g}{\alpha\mu_4^{1/2}}[1-\sqrt{1-(1-\frac{u_{D0}}{c})^2}]}^{\infty}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx\end{aligned} \tag{30}$$

Yuan Yeli 等(1986)已经证明：$\frac{g}{\mu_4^{1/2}}\left[1-\sqrt{1-\left(1-\frac{u_{D0}}{c}\right)^2}\right]\cong\frac{g}{\mu_4^{1/2}}\gg 1$　　(31)

注意到渐近展开式

$$\Phi(x)=1-\frac{1}{\pi}\exp\{-x^2\}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Gamma(k+1/2)}{x^{2k+1}}-R_n\right\} \tag{32}$$

可以得到如下白冠覆盖率的近似表达式：

$$\omega=\mathrm{const}_4\frac{\overline{H}}{T_z}\left\{1-\Phi\left(\frac{g}{\alpha\mu_4^{1/2}}\right)\left[1-\sqrt{1-\left(1-\frac{u_{D0}}{c}\right)^2}\right]\right\}$$

$$= \text{const}\,\frac{\overline{H}}{T}\,\frac{\Gamma(1/2)\alpha\mu_4^{1/2}}{g\left[1-\sqrt{1-\left(1-\frac{u_{D0}}{c}\right)^2}\right]}$$

$$\exp\left\{-\frac{g^2}{\mu_4}\left[1-\sqrt{1-\left(1-\frac{u_{D0}}{c}\right)^2}\right]\right\} \tag{33}$$

3 结论

3.1 本文导出的运动方程和涡度方程的两个近似首次积分，给出了破碎波面形式和波面破碎发生条件。

3.2 在以上结果的基础上，本文构造出了一种新的破碎波统计模型(17)。它依赖于随机波速，随机波面质点轨迹速度以及波面风漂流速度。在相当窄谱情况下取 $\alpha = 2$ 这个模式是 Yuan Yeil(1986) 所建立的统计模式的推广。

在相当窄谱情况下，随机波速和随机波面轨迹速度的联合发生率概率分布密度函数的主要部分可导出为(21)式。

3.3 破碎面积、体积和能量损耗率是破碎波统计的重要基础量，本文所导出的解析表达式(27),(28)和(29)式表明，它们依赖于波面谱的零阶、二阶和四阶矩，也同时依赖于平均波面风漂流速度。

3.4 根据以上基本统计量和白冠定义所导出的白冠覆盖率解析表达式，是一对海波统计要素和风漂流速度的依赖关系，它是 Yuan Yeli (1986) 结果合理的推广和修正，其正确性为大量实测结果所证实。

参 考 文 献

华 锋等，1992，破碎波谱研究及应用，中国科学，B辑(9): 958—965.

袁业立，1988，破碎波统计及其在上层大洋动力学中的应用，中国科学B辑(10): 1 084—1 091。

Banner et al., 1974, On the Incipient breaking of small scale waves, *J. Fluid Mech.*, **77**:825—842.

Longuet-Higgins, M. S., 1969, On wave breaking and equilibrium spectrum of wind-Generated Waves, *Proc. R. Soc. Landon Ser.*, **A**(310): 151—159.

Yuan, Yeli et al., 1986, Statistieal characteristics of breaking waves, wave dynamics and radio probing of the ocean sruface, *Chapter*, **7**:265—272.

Huang, E. N., 1991, Wave Statistics, *The sea*, **9**: 900—950.

Tung, C. C. et al., 1989, Probability function of Breaking-limited surface elevation, *J. G. R.*, **94**(C1): 967—972.

A NEW BREAKING WAVE STATISTIC MODEL

Yuan Yeli, Hua Feng

(First Institute of Oceanography, SOA, Qingdao 266003)

N. E. Huang

(Laboratory for Oceans, NASA Goddard Space Flight Centre, Greenbelt MD 20771)

M. A. Donelan

(National Water Research Institute of Canada, Burlington L7R 4*A*6)

ABSTRACT

Through deriving two approximate first integral from the motion equation and the vorticity equation, this paper obtains the breaking condition of original wave surface and the formate of breaking wave surface. Based on these two results, a new breaking wave statistic model is derived. It depends on phase velocity, surface partical velocity of random wave as well as wind drift velocity of wave surface.

In the case of narrow-band spectrum, joint distribution function of random phase velocity and random partical velocity is derived. Analytical expressions of breaking area, volume and energy loss are also derived, which depend on zero, first and second moment of wave spectrum as well as average surface wind drift velocity.

Based on the above basic statistic and the defination of white cap, the coverage rate of white cap is obtained which is also related to wind drift velocity.

Key words Breaking wave Breaking wave statistic model White-cap coverage