第24卷 第6期 海洋与湖沼 Vol. 24, No. 6
1993年11月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA Nov., 1993

综 述

二阶谱理论及其在海浪研究中的应用*

II. 估计方法与应用

丁平兴†
(华东师范大学河口海岸研究所,上海 200062)

孙孚 余宙文
(青岛海洋大学物理海洋实验室,青岛 266003)

提要 为了使人们能方便掌握、合理选择估计二阶谱的方法，对目前现有估计二阶谱的相关函数方法、周期图方法、TOR 方法和 CTOM 方法作了较详尽地介绍，并比较了各种方法的优缺点，最后重点讨论二阶谱于海浪研究中的应用及已取得的成果。

关键词 二阶谱估计 非线性海浪

前文(余宙文等,1993),我们已系统地给出了随机标量过程与随机矢量过程各自二阶谱的严格定义，阐述了有关的基本概念并重点讨论了随机标量(实)过程二阶谱的性质。本文以实过程为例,具体地介绍估计二阶谱的传统方法与参数方法,讨论二阶谱估计量的统计性以及二阶谱于海浪非线性研究中的应用。

1 二阶谱的估计方法

与功率谱估计方法比较,二阶谱估计方法的种类不多,有些还不太成熟。至今即使对于实随机过程的二阶谱估计,提出的方法也只有两类,它们分别是以傅氏变换为基础的传统方法和以 AR (autoregressive), MA (moving-average), ARMA (autoregressive moving-average) 模式为基础的参数方法。其中传统方法中又可分为相关函数方法与周期图方法；参数方法中也有 TOR (third-order recursion) 方法与 CTOM (contrained third-order mean) 方法。下面对这些估计方法分别作简要介绍。

1.1 二阶谱估计的相关函数方法 此方法类似于功率谱估计中的相关函数方法。对于一有限长度的观测序列 $\{x(l), l=0、1,\cdots N^{总}-1\}$,二阶谱估计的相关函数方法可按如下步骤进行:

(1) 先将总序列分成互不重迭的M组,每组有N个数据,即 $N_{总}=N\cdot M$。其中第m

---

* 国家自然科学基金资助,49070254号。

† 青岛海洋大学物理海洋实验室兼职研究人员。

收稿日期: 1992年3月27日,接受日期: 1992年6月10日。

组序列可表示为:

$$x^{(m)}(l) = x[l + (m-1)N] \tag{1}$$
$$m = 1,2,\cdots,M;\ l = 0,1,\cdots,N-1$$

(2) 将每组序列中心化。

(3) 估计每组序列的三阶矩序列:

$$\hat{R}^{(m)}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N}\sum_{l=s_1}^{s_2} x^{(m)}(l)x^{(m)}(l+\tau_1)x^{(m)}(l+\tau_2) \tag{2}$$

式中, $s_1 = \max(0, -\tau_1, -\tau_2)$; $s_2 = \min(N-1,\ N-1-\tau_1,\ N-1-\tau_2)$; $m = 1, 2,\cdots,M$。

(4) 对M组 $\hat{R}^{(m)}(\tau_1,\tau_2)$ 求平均,得总序列的三阶矩序列的估计值:

$$\hat{R}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\hat{R}^{(m)}(\tau_1,\tau_2) \tag{3}$$

(5) 据二阶谱的定义估计二阶谱:

$$\hat{B}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\tau_1=-L}^{L}\sum_{\tau_2=-L}^{L}\hat{R}(\tau_1,\tau_2)W(\tau_1,\tau_2)e^{-i(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)} \tag{4}$$

式中, $L < N-1$; $W(\tau_1,\tau_2)$ 是二维窗函数。为节省计算时间, 在计算 $\hat{R}^{(m)}(\tau_1,\tau_2)$ 和 $\hat{B}(\omega_1,\omega_2)$ 时,可利用它们的对称性质。

1.2 二阶谱估计的周期图方法　该方法与功率谱估计中的周期图方法相类似,计算公式的导出可参考文献丁平兴等(1989)。用周期图方法估计二阶谱的具体步骤为:

(1) 先将总序列 $\{x(l),\ l = 0,1,\cdots,N_{总}-1\}$ 分成M组, 每组有N个数据。M与N要适当选取,以便使用 FFT 算法。

(2) 将每组序列中心化。

(3) 用 FFT 计算每组序列的傅氏系数:

$$A^{(m)}(\omega_k) = \sum_{l=0}^{N-1} x^{(m)}(l)e^{-i\frac{2\pi l}{N}\omega_k} \tag{5}$$

式中, $m = 1,2,\cdots,M$; $k = 0,1,\cdots,N/2$。

(4) 估计每组序列的三次周期图:

$$\hat{B}^{(m)}(\omega_k, \omega_l) = \frac{1}{4\pi^2 N} A^{(m)}(\omega_k)A^{(m)}(\omega_l)A^{(m)}(\omega_k+\omega_l) \tag{6}$$

式中, $m = 1,2,\cdots,M$。

(5) 将每组周期图平均得总序列二阶谱的估计值:

$$\hat{B}(\omega_k, \omega_l) = \frac{1}{M}\sum_{m=l}^{M}\hat{B}^{(m)}(\omega_k,\omega_l) \tag{7}$$

1.3 二阶谱估计的 TOR 方法　这方法由 Raghuveer 等(1986)提出,其基本思想是: 考虑一个p阶 AR 过程,它定义为:

$$x(n) + \sum_{j=1}^{p} a_j x(n-j) = W(n) \tag{8}$$

式中, $W(n)$ 是非高斯白噪声,且满足 $E[W(n)] = 0$, $E[W(n)W(n+k)] = Q\delta(k)$,

$E[W(n)W(n+k)W(n+l)]=\beta\delta(k,l)$，当 $m<n$ 时，$x(m)$ 与 $W(n)$ 相互独立。据(8)式，可导出 AR 过程的三阶矩序列满足的方程，即三阶迭代方程（TOR）为：

$$R(-k,\ -l)+\sum_{j=1}^{p}a_jR(j-k,j-l)=\beta\delta(k,l)\qquad k,l\geqslant 0 \tag{9}$$

式中，

$$R(k,l)=E[x(n)x(n+k)x(n+l)] \tag{10}$$

(9)式中 $k=l$ 的 $2p+1$ 个三阶矩值满足矩阵方程：

$$ca=b \tag{11}$$

式中，

$$c=\begin{bmatrix} R(0,0) & R(1,1) & \cdots & R(p,p)\\ R(-1,-1) & R(0,0) & \cdots & R(p-1,p-1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ R(-p,-p) & R(-p+1,-p+1) & \cdots & R(0,0)\end{bmatrix}$$

$$a=[1,a_1,a_2,\cdots,a_p]^{\mathrm{T}},\ \ b=[\beta,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$$

c 是 Toeplitz 矩阵。(11)式有解的一个必要条件是多项式：

$$A(z)=1+\sum_{j=1}^{p}a_jz^{-j} \tag{12}$$

的所有根均在单位圆内。此时，AR 过程 $x(n)$ 的二阶谱可表示为：

$$B(\omega_1,\omega_2)=\beta H(\omega_1)H(\omega_2)H^*(\omega_1+\omega_2) \tag{13}$$

式中，

$$H(\omega)=\frac{1}{A(e^{i\omega})} \tag{14}$$

用 TOR 方法估计二阶谱的具体步骤可归纳为：

(1)，(2)与 1.1 中的(1)，(2)相同。

(3) 估计每组序列的三阶矩序列：

$$\hat{r}^{(m)}(k,k)=\frac{1}{N}\sum_{l=s_1}^{s_2}x^{(m)}(l)x^{(m)}(l+k)x^{(m)}(l+k) \tag{15}$$

式中，$k=-p,\ -p+1,\cdots,0,\ 1,\cdots,p$；$s_1=\max(0,\ -k)$，$s_2=\min(N-1,\ N-k-1)$。

(4) 将每组序列的三阶矩序列平均得 $R(k,k)$ 的估计值：

$$\hat{R}(k,\ k)=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\hat{r}^{(m)}(k,k) \tag{16}$$

式中，$k=-p,\ -p+1,\cdots,p$。

(5) 将 $\hat{R}(k,k)$ 代入(11)式，可从中解出 AR 参数的估计值 $\hat{a}_j$，$j=1,\ 2,\cdots,p$。

(6) 把 $\hat{a}_j$ 和 $\hat{\beta}$ 代入(13)式，便可得二阶谱的估计值 $\hat{B}(\omega_1,\ \omega_2)$，其中 $\hat{\beta}$ 是非高斯白噪声三阶矩的估计值。

TOR 方法在形式上类似于功率谱估计的最大熵方法，因而曾有人把它称作高阶谱估计中的最大熵方法。其实，TOR 方法中根本没有涉及熵的概念，它给出的只是 AR 过

程的二阶谱，并不代表最大熵谱（Nikias et al., 1987)。

1.4 二阶谱估计的 CTOM 方法 此方法也是由 Raghuveer 等(1986)提出。仍利用 AR 模型(8)式，在其两边同乘上 $x^2(n-k)$，$(k>0)$，并取期望值就有：

$$E\left[q_n(k,0)+\sum_{j=1}^{p}a_j q_n(k,j)\right]=0 \tag{17}$$

式中，

$$q_n(k,j)=x(n-j)x^2(n-k);j,\ k=1,2,\cdots,p \tag{18}$$

定义

$$C(n,k)=q_n(k,0)+\sum_{j=1}^{p}a_j q_n(k,j) \tag{19}$$

为三阶迭代误差过程，于是，(17)式可变为：

$$E[C(n,k)]=0;\ k=1,2,\cdots,p \tag{20}$$

若给定资料序列$\{x(l),l=0,1,\cdots,N-1\}$，则对于每一个 k，我们均可得到$N-p$ 个 $C'(n,k)$ 的样本。现用 $C(n,k)$ 的算术平均值等于零取代(20)式中的数学期望为零，便可得到 p 个用来求解 $a_j(j=1,2,\cdots,p)$ 的线性方程：

$$\frac{1}{N-p}\sum_{n=p+1}^{N}C(n,k)=0;\ k=1,2,\cdots,p \tag{21}$$

写成矩阵形式便是：

$$QA=B \tag{22}$$

式中，

$$Q=\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12}\cdots q_{1p}\\ q_{21} & q_{22}\cdots q_{2p}\\ \cdots & \cdots\cdots\\ q_{p1} & q_{p2}\cdots q_{pp}\end{bmatrix}$$

$$A=[a_1,a_2,\cdots,a_p]^{\mathrm{T}},\ B=[q_{10},q_{20},\cdots,q_{p0}]^{\mathrm{T}}$$

$$q_{ij}=\frac{1}{N-p}\sum_{n=p+1}^{N}q_n(i,j);\ i=1,2,\cdots,p;j=0,1,\cdots,p$$

据(22)式求得 AR 模型参数后，就可得标准化后的二阶谱为：

$$\frac{B(\omega_1,\omega_2)}{\beta}=H(\omega_1)H(\omega_2)H^*(\omega_1+\omega_2) \tag{23}$$

用 CTOM 方法估计二阶谱的具体步骤为：

(1)，(2)与 1.1 中的(1)，(2)相同。

(3) 估计 q_{ij} 的估计值：

$$\hat{q}_{ij}=\frac{1}{M(N-p)}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=p+1}^{N}x^{(m)}(n-j)x^{(m)}(n-i)x^{(m)}(n-i) \tag{24}$$

式中，$i=1,2,\cdots,p$；$j=0,1,\cdots,p$。

(4) 将 $\hat{q}_{ij}$ 代入(22)式中，并从中解出 AR 参数的估计值 $\hat{a}_j(j=1,2,\cdots,p)$。

(5) 利用(14)，(23)式，便可估计标准化后的二阶谱。

不象 TOR 方法在确定 AR 模型参数时，仅利用一直线$(i=j)$上三阶矩的值，CTOM 方法则利用了所有样本序列的信息，这也许是为什么 CTOM 方法较 TOR 方法更适合

于短序列二阶谱估计的原因所在。当然，在渐近意义下，对于同一阶数的 AR 过程，CTOM 方法与 TOR 方法估计的结果应是等价的。

以上 4 种估计二阶谱的方法各有利弊。传统方法中的相关函数方法是一种经典的估计方法，选用适当的窗函数后，可证明其估计量是渐近无偏的一致估计。但不足的是计算特别费时，不适用于较长序列的二阶谱估计。周期图方法可应用 FFT 算法，从而能大大提高运算速度，对于较长序列的二阶谱估计更能体现出优势，故在实际问题中被广泛采用。但遗憾的是估计量的方差大。为使估计量为渐近无偏的一致估计，就必须将有限长度的时间序列分足够多的组来平均，或在频率域上用相邻谱值来平滑；或同时采用这两种方法，而其代价是分辨率降低。参数方法能明显提高分辨率，即使对于较短的序列，Raghuveer 等证明，用 TOR 或 CTOM 方法仍能分辨出频率较接近的组成波之间的位相耦合。但这两方法中的定阶至今还未找到理想的判据，从而影响了它们在实际问题中的应用。最近丁平兴等（1992a）提出了一种确定海浪 AR 模型中阶数的经验准则，并首次将 TOR 方法应用于实际海浪的二阶谱估计。随后孔亚珍[1)]也利用该经验准则，将CTOM 方法应用于实际海浪的二阶谱估计。然而，如何从理论上或经验上更合理地确定二阶谱估计中 AR 模型的阶数，仍然是一个值得深入研究的问题。

2　二阶谱估计量的统计性

对于二阶谱估计量统计性质的研究目前尚不成熟，现有讨论大多限于二个方面，一是对二阶谱估计质量的讨论，二是关于二阶谱估计量概率分布的讨论，在此简单作一介绍。

Rosenblatt（1965）在提出二阶谱估计的相关函数方法同时，就证明了在一定条件下，其估计量是渐近无偏的一致估计。Nikias 等(1987)论述了用周期图方法估计二阶谱的偏度与方差，发现由周期图方法得到的二阶谱估计量的方差反比例于总序列分组的组数和频率域内相邻谱值平滑个数的平方根。所以，要使估计量为渐近的一致估计，就必须增加资料长度。Elgar 与 Guza（1988）讨论了用周期图方法所得估计量的自由度，指出若总序列容量为 N，分成 M 组，则每组样本数为 N/M，此时分辨率 $\Delta f = M/N$，自由度 $\nu = 2M$。若总序列不分组，而是在频率域内取相邻的 $n \times n$ 个二阶谱值来平滑，就有 $\Delta f = n/N$，$\nu = 2n$。若先分 M 组，后再在每组内用 $n \times n$ 个谱值来平滑，那么最后可得 $\Delta f = nM/N$，$\nu = 2nM$。Raghuveer 等在提出二阶谱估计的参数方法时，指出当讨论的过程满足 AR 模型的条件时，由 TOR 或 CTOM 方法得到的二阶谱估计量是无偏一致估计。Van Ness(1966) 证明了在一定条件下，二阶谱实部与虚部估计量的概率分布趋于复正态分布。Haubrich（1965）为讨论二阶相干谱的置信区间，首先讨论了 $b^2(\omega_1, \omega_2)$ 的概率分布。限于理论上严格处理的困难，Haubrich 先假定讨论的过程是高斯过程，然后对 $b^2(\omega_1, \omega_2)$ 的概率分布作一估计，他发现对于大的自由度，$b^2(\omega_1, \omega_2)$ 近似服从 χ^2 分布。以后，Elgar 与 Guza（1988）证明，即使对于小的自由度，$b^2(\omega_1, \omega_2)$ 也近似服从 χ^2 分布。

3　二阶谱于海浪研究中的应用

二阶谱，作为一个研究随机过程非线性性的有效工具，首次应用于实际的对象是海

1）孔亚珍，CTOM 方法在海浪二阶谱估计中的应用，海洋学报。（待刊）

浪。Hasselmann 等(1963)依据弱非线性理论，把精确至二阶的随机波面视为准高斯过程,利用流体力学方程,导出了均匀水深三维波动水底压力二阶谱的理论表达式。同时对实测波压力资料进行二阶谱估计,一方面证实了导出的理论结果具有足够的精度,另一方面揭示了组成波之间相互作用的有关特征。随后，许多学者也将二阶谱应用于海浪的非线性研究。例如，Houmb(1974)用类似于 Stokes 波的模拟波面及外海实测波面记录进行功率谱和二阶谱分析,从而解释功率谱中次峰产生的原因。Imasato(1977)通过对实验室风浪的二阶谱分析，研究风浪不同成长阶段波与波相互作用的特点。Masuda 等(1981)分别引入 Rayleigh 阻力与 Mile's 机制,从理论上对二阶谱进行研究，导出了深水三维波动波面复二阶谱的一种理论形式，并就简单模式建立了二阶谱的虚部与波形不对称的联系。Elgar 等(1985)通过对近岸浅水区域多点实测波面记录的二阶谱分析,研究海浪的变浅效应，解释近岸海浪的一些非线性现象。近几年来，本文作者(丁平兴等，1989; 1992a, b; 1993a, b; 孙孚等，1993)也对二阶谱及其在海浪中的应用作了较多的研究。先后从理论上首次严密地导出了任意均匀水深二维、三维波动波面二阶谱的解析表达式。利用青岛海洋大学物理海洋实验室的随机波-风-流大型水槽,进行了不同风速、风区及倾斜底坡上的风浪实验。通过对所测的大量波面记录分别进行外观统计特征及二阶谱分析,建立并证实了二阶谱的实部与波形的垂向不对称、二阶谱的虚部与波形的水平向不对称和二阶相干谱与波浪破碎之间的关系。这些成果将促进二阶谱于海浪中的更广泛应用,从而有助于海浪非线性性的进一步研究。

其实,二阶谱不但在海浪的非线性研究中得到较多的应用,在物理海洋其它随机过程的非线性研究中也有系列成果。例如,利用二阶谱分析湍流中的能量传输，揭示 SST 矩平分布偏离正态分布的特性,研究温、盐、密等之间的非线性相互作用,讨论当地风速和海流之间的能量传输等。除此以外，二阶谱在其它领域也得到不少应用(Nikias et al., 1987)。

4 结语

本文较详尽地介绍了估计二阶谱的传统方法与参数方法，简要归纳了二阶谱估计量的统计性，并叙述了二阶谱于海浪等其它随机过程非线性研究中的应用及取得的部分成果。期望能有助于人们在正确理解二阶谱的定义、概念、性质的基础上，方便地掌握估计二阶谱的方法,从而促进二阶谱在有关领域非线性研究中的应用。

最后需指出的是,本文介绍的二阶谱只能描述过程本身或过程之间的二阶非线性,如想研究更高阶的非线性特征,则需进行更高阶的谱分析,如三阶谱分析等。

参 考 文 献

余宙文、丁平兴、孙孚，1993，二阶谱理论及在海浪研究中的应用 I.，海洋与湖沼，**24**(5): 553—559。
丁平兴、孔亚珍，1989，海浪二阶谱及其估计,热带海洋，**8**(1): 73—79。
丁平兴、孙孚、余宙文，1992a，用 TOR 方法估计海浪二阶谱,海洋与湖沼，**23**(6): 603—608。
丁平兴、侯伟，1992b，海浪非线性性的实验研究 I，海洋学报，**14**(6): 25—31。
丁平兴、孔亚珍、侯伟，1993a，海浪非线性性的实验研究 II，海洋学报，**15**(1): 1—8。
孙孚、丁平兴、余宙文，1993，均匀水底上二维随机波面的二阶谱,海洋与湖沼，**24**(1): 1—6。
丁平兴、孙孚、余宙文，1993b，海浪二阶非线性特征量的研究 I，中国科学B辑，**23**(3): 311—317。
Elgar, S. and Guza, R. T., 1988, Statistics of bicoherence, *IEEE Acoust Speech Signal Process*, **36**: 1 667—1 668.

Elgar, S. and Guza, R. T., 1985, Observations of bispectra of shoaling surface gravity waves, *J. F. M.*, **161**:425—448.

Hasselmann, K., Munk, W. and MacDon, G., 1963, Bispectra of ocean waves, Proc of Symposium on Time Series Analysis, Join Wiley (New York), pp. 125—139.

Haubrich, R. A., 1965, Earthnoise, 5 to 500 Millicycles per second, *J. G. R.*, **70**(6):1 415—1 427.

Houmb, O. G., 1974, Spectra and bispectra of ocean waves, Proc. *14th Coastal Eng. Conf.*, **1**:301—320.

Imasato, N. and Kumshi, H., 1977, Bispectra of wind waves and wave-wave interaction, *J. Oceanogr.*, **33**:267—271.

Masuda, A. and Kuo, Y-Y., 1981, A note on the imaginary part of bispectra, *Deep_Sea Res.*, **28A**(3): 213—222.

Nikias, C. L. and Raghuveer, N. R., 1987, Bispectrum estimation: A digital signal processing framework, *Proc. IEEE.*, **75**:869—891.

Raghuveer, N. R. and Nikias, C. L., 1986, Bispectrum estimation via AR modeling, *Signal Processing*, **9**(*1*):35—48.

Rossenblatt, M. and Van Ness, J. W., 1965, Estimation of the bispectrum, *Ann. Math. Statist.*, **36**: 1 120—1 136.

Van Ness, J. W., 1966, Asymptotic normality of bispetral estimates, *Ann. Math. Statist.*, **37**:1 257—1 272.

BISPECTRUM THEORY AND ITS APPLICATION TO SEA WAVE STUDY

II. BISPECTRUM ESTIMATION AND APPLICATION

Ding Pingxing

(Institute of Estuarine and Coastal Research, East China Normal University, Shanghai 200062)

Sun Fu, Yu Zhouwen

(Laboratory of Physical Oceanography, Ocean University of Qingdao 266003)

ABSTRACT

Since bispectrum can provide information about random process that is suppressed in the ordinary power spectrum such as the degree of guadratic nonlinearity and deviation from normality, bispectrum analysis has been widely applied in diverse fields. But unfortunately, a few of the several methods of bispectrum estimation for practical use must be further improved. The existing approaches used for bispectrum estimation only can be classified into two broad classes: (1) a conventional method, which is based on Fourier transform, and may fall into the correlation function and periodgram approaches similar to the conventional method for power spectrum estimation; (2) a parametric method, which is based on a non-Gaussian white noise driven autoregrassive (AR) model, and may be divided into the third-order recursion (TOR) and the constrained third-order mean (CTOM) approaches. In present paper, the several approaches mentioned above are described in detail, and the statistical properties of bispectrum estimation are briefly reviewed. Finally, the application of bispectrum to the study of nonlinear waves is especially discussed. This paper can hopefully be helpful in choosing a rational approach for bispectrum estimation.

Key words Bispectrum estimation Nonlinear waves