

# 三阶海浪波高分布及其应用\*

侯一筠 王涛 李炜

(中国科学院海洋研究所, 青岛 266071)

**提要** 在三阶海浪非线性波高分布模式的基础上, 引进描述分布函数结构形式的重要统计量, 即概率分布的离差系数与偏差系数。给出这两个统计量与非线性控制参数之间的解析关系式, 从而给出了反映风浪不同状态下的波高分布特征。与传统的瑞利分布相比, 本文的结果有更广泛的实用意义。并把理论结果应用于黄河口波浪统计学的研究。

**关键词** 波高分布 离差系数 偏差系数

在海浪的统计学研究范围内, 海浪的波高分布一直是众所关心的问题。Longuet-Higgins (1957) 在线性窄谱的假设下, 采用载波方法导出了海浪波高服从瑞利分布。孙孚 (1988) 在线性海浪模型的基础上, 应用波动的射线理论也导出了这一分布。若干年来, 瑞利分布在海浪统计研究及应用上有着非常重要的地位(文圣常, 1984)。然而, 由于线性海浪理论在应用中所受到的限制, 使得瑞利分布不能很好地描述客观现象的复杂性。特别是由瑞利分布导出的两个重要统计量——离差系数与偏差系数恒为常值, 这就无法描述风浪的不同状态。有鉴于此, Forristall (1978) 提出采用 Weibull 分布拟合比瑞利分布更与实际符合, 尤其是在浅水情况下效果更好, 缺陷在于此种分布只能由经验确定, 属于一种拟合分布。

本文作者曾把描述谱形细致结构和风浪发展状况的谱宽度参量引进波浪的统计学研究, 导出了海浪的非正态模式及受非线性参数制约的三阶海浪波高分布(侯一筠, 1990)。本项工作在前文的基础上, 建立统计量与非线性控制参数之间的解析关系式。从而说明三阶海浪波高分布的实用意义。

## 1 三阶海浪的波高分布

作者(1990)曾导出一种三阶海浪的非线性波高分布:

$$f(\tilde{H}) = \frac{1-\alpha}{4\beta^2} \tilde{H} e^{-\frac{\tilde{H}^2}{8\beta^2}} + \frac{\alpha}{4(\beta^2 + \gamma\beta^3)} \tilde{H} e^{-\frac{\tilde{H}^2}{8(\beta^2 + \gamma\beta^3)}} \quad (1)$$

式中, 无因次波高  $\tilde{H} = \frac{H}{\sqrt{\omega_s S(\omega_s)}}$ ;  $\beta = \sqrt{B}$ ,  $B$  为谱宽度参量(侯一筠等, 1990);  $\alpha$ ,  $\gamma$

为非线性控制参数。将(1)式改写有因次形式, 有

\* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 2213 号; 山东省自然科学基金资助项目, D74900147。

在资料获取及分检处理过程中曾得到范顺庭、王以谋的帮助, 谨志谢

收稿日期: 1993年3月23日, 接受日期: 1993年4月13日。

$$f(H) = \frac{1-\alpha}{4m_0} H e^{-\frac{H^2}{8m_0}} + \frac{\alpha}{4\lambda m_0} H e^{-\frac{H^2}{8\lambda m_0}} \quad (2)$$

式中,  $m_0 = B\omega_0 S(\omega_0)$  表示谱的零阶矩;  $\lambda = 1 + \gamma\beta$ 。

现在,建立  $m_0, \alpha, \lambda$  与外观统计量之间的关系。首先有

$$\bar{H} = \int_0^{\infty} Hf(H)dH = \sqrt{2\pi m_0}(1 - \alpha + \alpha\sqrt{\lambda}) \quad (3)$$

$$\bar{H}^2 = \int_0^{\infty} H^2f(H)dH = 8m_0(1 - \alpha + \alpha\lambda) \quad (4)$$

$$\bar{H}^3 = \int_0^{\infty} H^3f(H)dH = 12\sqrt{2\pi} m_0^{\frac{3}{2}}(1 - \alpha + \alpha\lambda^{\frac{3}{2}}) \quad (5)$$

其次,定义波高分布的离差系数

$$C_v = \frac{\mu_2^{1/2}}{\bar{H}} = \frac{1}{\bar{H}} \left[ \int_0^{\infty} (H - \bar{H})^2 f(H) dH \right]^{1/2} \quad (6)$$

及偏差系数

$$C_s = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\int_0^{\infty} (H - \bar{H})^3 f(H) dH}{\left[ \int_0^{\infty} (H - \bar{H})^2 f(H) dH \right]^{3/2}} \quad (7)$$

式中,  $C_v$  的物理意义是对分布密度函数关于平均波高分散与集中程度的刻划;  $C_s$  则描述了最可几波高与平均波高的偏离程度。一般说来,它们应取决于风浪的发展状况。

$$\text{由 (6), (7) 式易得 } C_v = (\delta_1 - 1)^{1/2} \quad (8)$$

$$C_s = \frac{(\delta_2 - 3\delta_1 + 2)}{(\delta_1 - 1)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\text{式中, } \delta_1 \triangleq \frac{\bar{H}^2}{H^2}; \delta_2 \triangleq \frac{\bar{H}^3}{H^3}。$$

若采用瑞利分布  $f(H) = \frac{H}{4m_0} e^{-\frac{H^2}{8m_0}}$ , 则可算出

$$C_v = \left( \frac{4}{\pi} - 1 \right)^{1/2}, \quad C_s = \frac{2 + \frac{6}{\pi}}{\left( \frac{4}{\pi} - 1 \right)^{3/2}}。$$

由于它们恒为常值,这就限制了瑞利分布的实用性。即仅在线性海浪范围内,瑞利分布才是有效的。本文所采用的波高分布是在更广泛的意义上严格导出的,分布函数中的控制参数  $\alpha, \lambda$  体现了风浪的不同状态。由(3)–(9)式可以看出  $C_v, C_s$  亦受  $\alpha, \lambda$  制约,说明  $C_v, C_s$  应随风浪状态的变化而改变。而瑞利分布仅是在参数  $\alpha, \lambda$  集合上的某种特例(例如  $\alpha = 0$  或  $\lambda = 1$ )。

以下,给出  $C_v, C_s$  与  $\alpha, \lambda$  之间的解析关系式,由(3)–(5)式可得:

$$\delta_1 = \frac{4}{\pi} \frac{[1 + \alpha(\lambda - 1)]}{[1 + \alpha(\sqrt{\lambda} - 1)]^2} \quad (10)$$

$$\delta_2 = \frac{6}{\pi} \frac{[1 + \alpha(\lambda^{3/2} - 1)]}{[1 + \alpha(\sqrt{\lambda} - 1)]^3} \quad (11)$$

把以上两式代入(8),(9)式即得  $C_V, C_S$  与  $\alpha, \lambda$  之间的关系。在应用问题中所关心的是如何将  $\alpha, \lambda$  通过  $C_V, C_S$  表示出来。这就需要对(8),(9),(10),(11)联立求解。

$$\text{由(8),(9)式,有:} \quad \delta_1 = 1 + C_V^2 \quad (12)$$

$$\delta_2 = 1 + 3C_V^2 + C_S C_V^3 \quad (13)$$

$$\text{令} \quad \rho = 1 + \alpha(\sqrt{\lambda} - 1) \quad (14)$$

$$\text{导出:} \quad \alpha = \frac{\rho - 1}{\sqrt{\lambda} - 1} \quad (15)$$

将(14)代入(10),(11)中,可得

$$\delta_1 = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{(\rho - 1)\sqrt{\lambda} + \rho}{\rho^2} \right] \quad (16)$$

$$\delta_2 = \frac{6}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda} + 1)(\rho - 1) + \rho}{\rho^3} \right] \quad (17)$$

由(16)式解得:

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\frac{\pi}{4} \delta_1 \rho^2 - \rho}{\rho - 1} \quad (18)$$

代入(17)式,有  $\delta_2 = \frac{6}{\pi \rho(\rho - 1)} \left[ \left( \frac{\pi}{4} \delta_1 \right)^2 \rho^2 - \frac{\pi}{4} \delta_1 \rho + 1 - \frac{\pi}{4} \delta_1 \right]$ , 由此导出  $\rho$  满足的二次方程:

$$\left[ \left( \frac{\pi}{4} \delta_1 \right)^2 - \frac{\pi}{6} \delta_2 \right] \rho^2 + \left( \frac{\pi}{6} \delta_2 - \frac{\pi}{4} \delta_1 \right) \rho + 1 - \frac{\pi}{4} \delta_1 = 0 \quad (19)$$

求解二次方程(19)式,得到  $\rho$  与  $\delta_1, \delta_2$  的关系。利用(15),(18)可得到  $\alpha, \lambda$  与  $\delta_1, \delta_2$  的关系,最后通过(12),(13)建立了  $\alpha, \lambda$  与  $C_V, C_S$  的关系。见表1。

表1 不同  $C_V, C_S$  下的  $\alpha, \lambda$  值  
Tab. 1  $\alpha, \lambda$  values of different  $C_V, C_S$

$C_V$	$C_S$	$\alpha$	$\lambda$
0.52	0.63	0.00	0.48
0.56	0.81	0.32	0.44
0.60	0.95	0.40	0.32
0.64	1.06	0.44	0.24
0.68	1.81	0.84	0.20
0.72	1.26	0.52	0.16
0.76	1.04	0.40	0.08
0.80	1.59	0.64	0.12

从图1,图2可以看出  $C_V$  或  $C_S$  变化对波高分布影响趋势,也进一步表明在波高分布中引进  $C_V, C_S$  能够体现出不同风浪状态下的概率分布特征。

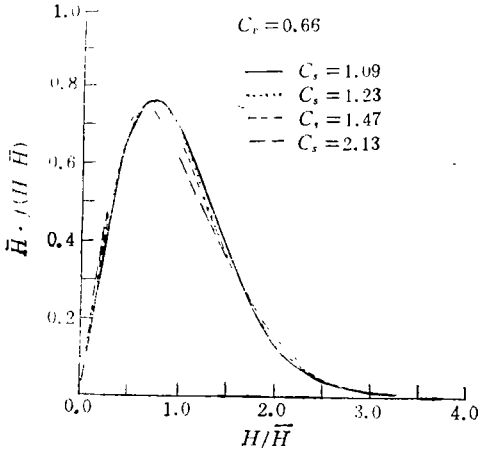


图 1  $C_v = 0.66$ ,  $C_s$  的变化对概率密度分布的影响

Fig. 1 The influence of distribution of probability density which produced by the change of  $C_s$  value ( $C_v = 0.66$ )

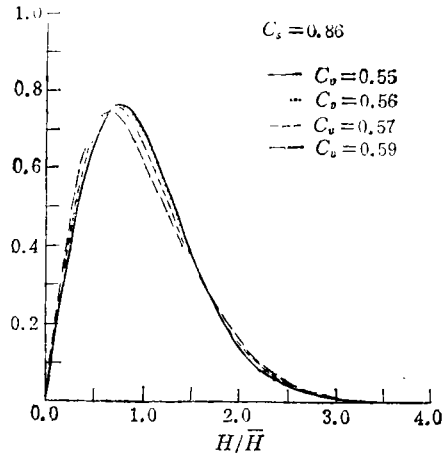


图 2  $C_s = 0.86$ ,  $C_v$  的变化对概率密度分布的影响

Fig. 2 The influence of distribution of probability density which produced by the change of  $C_v$  value ( $C_s = 0.86$ )

## 2 应用算例与分析

本文所采用的是 1984, 1985 年内在黄河口附近黄河海港区域 ( $38^{\circ}4'57''-38^{\circ}9'40''$  N,  $119^{\circ}0'31''-119^{\circ}3'39''$  E), 用“WAVERIDE”遥测波浪仪观测的资料。依水深的不同分为 7, 9, 12, 14m, 4 组, 资料的样本数分别为 4 977, 4 375, 4 859, 5 409。以 7m 组为例具体说明通过计算  $C_v$ ,  $C_s$  最后给出  $\alpha$ ,  $\lambda$  值以及所对应的波高分布和累积率曲线的过程。根据实测资料可用以下两式估计  $C_v$ ,  $C_s$ :

$$C_v = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_i - \bar{H})^2}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N H_i}, \quad C_s = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_i - \bar{H})^3}{\sqrt{\left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (H_i - \bar{H})^2 \right]^3}}$$

式中,  $H_i$  为资料样本波高值;  $\bar{H}$  为平均波高;  $N$  为不同组次(水深)下的样本总数。

这样有  $C_v = 0.558$ ,  $C_s = 0.871$ 。代入 (12), (13) 式中得到:

$$\delta_1 = 1.311, \delta_2 = 2.084。$$

将  $\delta_1, \delta_2$  值代入 (19) 式中可求解出  $\rho$  的二次方程的两个根为  $\rho_1 = 0.824, \rho_2 = 1.161$ 。

表 2 不同水深组次下的  $\alpha, \lambda$  值

Tab. 2  $\alpha, \lambda$  values of different depth

深度(m)	$C_v$	$C_s$	$\alpha$	$\lambda$
7	0.558	0.871	0.589	0.503
9	0.653	1.852	0.890	0.196
12	0.544	0.962	0.979	0.261
14	0.645	1.062	0.438	0.229

再根据(18)式可以得到:  $\lambda_1 = 0.503$ ,  $\lambda_2 = 1.986$ 。显然,  $\lambda_2$  没有意义, 为  $\rho$  方程中增根  $\rho_2$  所产生, 故略去。

最后根据(15)式得到  $\alpha_1 = 0.589$ 。即  $\alpha = 0.589$ ,  $\lambda = 0.503$ 。

表 2 给出了 4 组资料得到的  $C_V$ ,  $C_S$ , 以及通过上述计算得到的  $\alpha, \lambda$  值。

下面给出不同水深组次, 对应不同的  $\alpha, \lambda$  参数值下的波高密度分布和累积率曲线, 以及相应的资料直方图和资料累积率点值(图 3, 图 4)。从图中看出理论与实测极为吻合。

### 3 结语

在受非线性参数制约的三阶海浪波高分布中引进反映特定物理意义的离差系数和偏差系数, 能够有效地体现出波高概率分布密度的细致结构和不同状态下的风浪波高统计

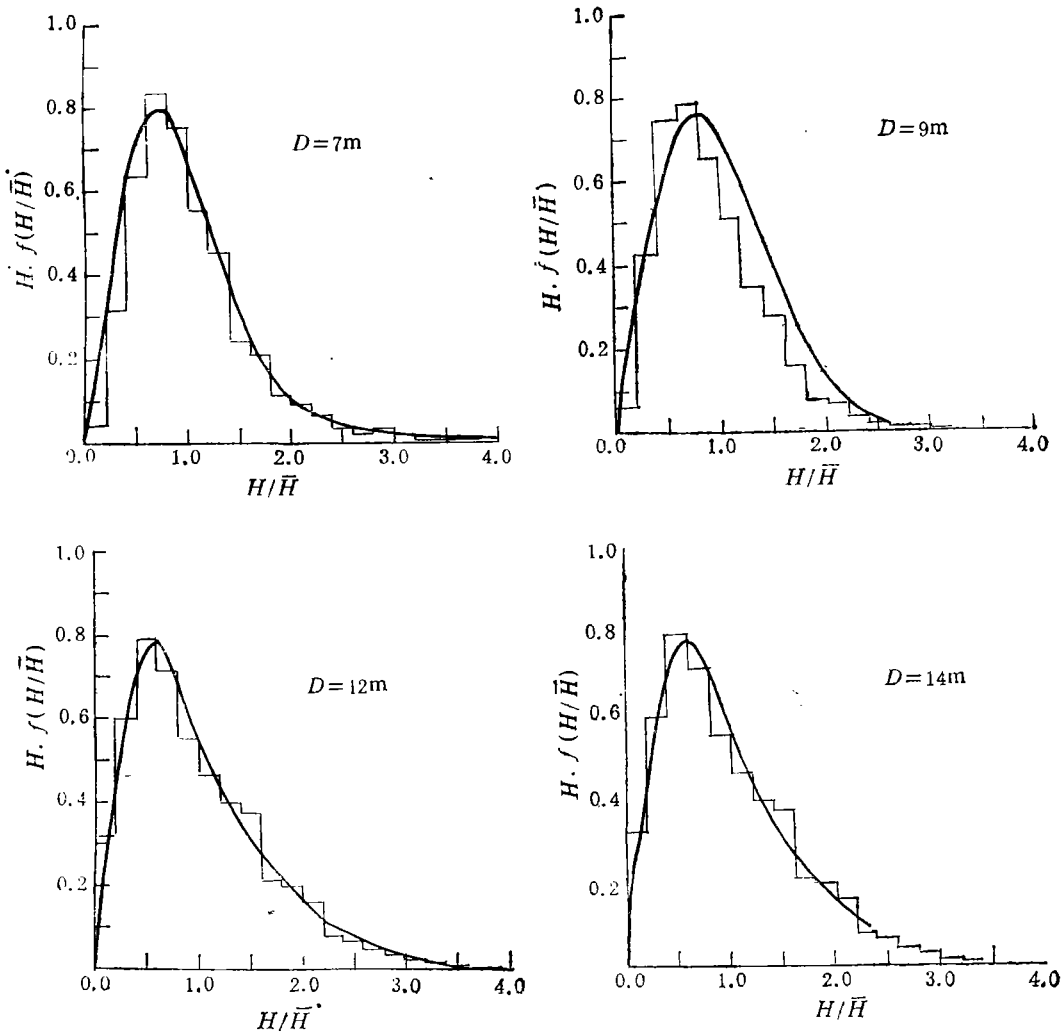


图 3 不同水深下的概率密度分布和资料直方图的比较

Fig. 3 Comparison between the distribution of probability density and the histogram of data at different depth

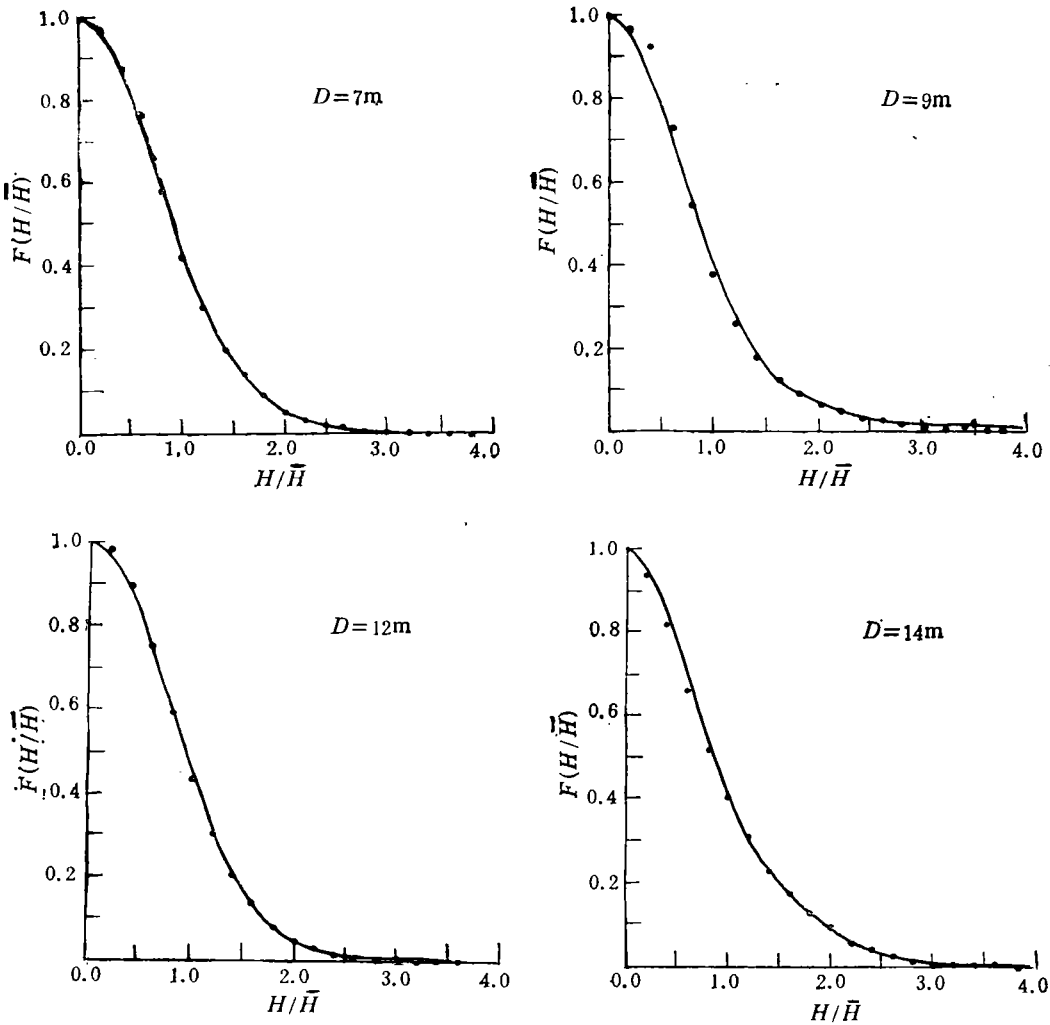


图 4 不同水深下的累积率分布和资料累积率点值的比较

Fig. 4 Comparison between the distribution of accumulation ratio and the accumulation ratio values of data at different depth

特征。实测资料分析结果与理论结果较一致性说明非线性参数对外观统计量影响的重要性。另外(3)式表明传统的  $\bar{H} = \sqrt{2\pi m}$  应随非线性参数变化, 即随风浪的不同状态而变化。

### 参 考 文 献

- 文圣常、余宙文, 1984, 海浪理论与计算原理, 科学出版社(北京), 169—184。  
 孙 孚, 1988, 海浪周期与波高的联合分布, 海洋学报, 10(1): 10—15。  
 侯一筠, 1990, 非线性海浪波面与波高的统计分布, 海洋与湖沼, 21(5): 425—432。  
 侯一筠、文圣常, 1990, 三参量的风浪频谱, 海洋与湖沼, 21(6): 495—504。  
 Forristall, G. Z., 1978, On the Statistical Distribution of wave heights in a storm, *J. Geophys. Res.*, 83(C5): 2 353—2 358。  
 Longuet-Higgins, M. S., 1957, The statistical analysis of a random moving surface, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A 249(966): 321—387。

## DISTRIBUTION OF THE THIRD ORDER WAVE HEIGHT AND ITS APPLICATION\*

Hou Yijun, Wang Tao, Li Wei

(*Institute of Oceanology, Academia Sinica, Qingdao 266071*)

### ABSTRACT

Based on the model of distribution of the third order nonlinear wave height, two significant statistical parameters, dispersion coefficient  $C_V$  and deviation coefficient  $C_S$  are used to describe the structure of distribution function. This paper discusses the important case in which the change of  $C_V$  or  $C_S$  obviously affect the distribution of probability density. The analytical relation between the two statistical parameters and the nonlinear governing parameters is obtained in order to reflect the characters of distribution of wave height in different wave state.

Compared with the Raleigh distribution in which  $C_V$  and  $C_S$  are constant, the present results have important application in the real sea because  $C_V$  and  $C_S$  are functions of nonlinear governing parameters and change with different wave state.

Use of the results to study the statistics of Huanghe River estuary showed that the theoretical curves coincide with the data points.

**Key words**    Distribution of wave height    Dispersion coefficient    Deviation coefficient

---

\* Contribution No. 2213 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.