第25卷 第5期　　海 洋 与 湖 沼　　Vol. 25, No. 5
1994年9月　　OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA　　Sep., 1994

关于鱼的生长方程的研究*

II. 估计参数的一种新方法

赵 维 谦
（青岛海洋大学应用数学系，青岛 266003）

提要　目前描述鱼的体重生长的方程主要有（1）$w=w_\infty[1-e^{-k(t-t_0)}]^3$，和作者对该方程推广而导出的方程(2) $w=w_\infty[1-e^{-k(t-t_0)}]^r$，本文对基于这两个方程的4种参数估计法，指出了其不足之处，并提出了一种估计参数的新方法——搜寻逼近法。该方法比前4种方法具有更好的拟合优度，通过实例计算得到进一步的证实。此外，还对鱼的样本资料的处理作了论述。这对更好的掌握鱼的生长规律、进而合理利用和开发渔业资源具有重要意义。

关键词　鱼生长方程　参数估计　搜寻逼近法

方程 $w_\infty[1-e^{-k(t-t_0)}]^3$（1）和方程 $w=w_\infty[1-e^{-k(t-t_0)}]^r$（2）是描述鱼的体重生长的两个常用方程，其中 w_∞, k, t_0 均为待估参数。在方程(2)中还多了一个新的未知参数 r，使之更具有一般性，这是作者前文（1994）中对 von Bertalanffy 生长方程推广修正的结果。许多文献（山东省海洋水产研究所编，1977；刘蝉馨，1981；陈大刚等，1984）指出方程(1)是在 von Bretalanffy 设想下得的微分方程 $\frac{dw}{dt}=aw^{2/3}-bw$（3），作变量代换：$w=c\,l^3$（4），解方程得：$l=l_\infty[1-e^{-k(t-t_0)}]$（5），从而解得方程（1）。本文研讨了就方程(1)，(2)目前常用的估计参数的4种方法，指出了它们各自的缺陷，进而就方程(2)提出了一种估计参数的新方法——搜寻逼近法，并对样本资料的处理作了有益的探讨。

1　资料的处理

由于在抽测鱼的体重 $w(t_i)$、体长 $l(t_i)$ 时，具体一个 t_i 的确定，是根据鱼的耳石、鳞片或鳃骨上出现的年轮，因而“年龄相同而出生日不同”的鱼将难于直接区分，加之生理的环境的等重要因素的影响，从而同一个年龄的鱼的体重、体长具有较大的波动性，故用第 i 龄鱼的平均体长 l_i 和平均体重 w_i 构成样本 $(l_i, w_i), i=1,2,\cdots,m$（6），即设抽测第 i 龄第 j 条鱼的体长体重量为

$l_{ij}, w_{ij}, j=1,2,\cdots,n_i, i=1,2,\cdots,m$（7），则$l_i=(1/n_i)\sum_{j=1}^{n_i} l_{ij}, w_i=(1/n_i)\sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}$，

* 自选课题。

收稿日期：1993年6月29日，接受日期：1993年10月10日。

$i=1,2,\cdots,m$。

通过分析，可以看出这样处理是很有必要的。记 $n=\sum_{i=1}^{m} n_i$，$\bar{w}=(1/m)\sum_{i=1}^{m} w_i$，$\bar{w}'=(1/n)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} w_{ij}$。设 $Ew_{ij}=u_i, Dw_{ij}=\sigma_i^2=\sigma^2, j=1,2,\cdots,n_i, i=1,2,\cdots,m$。则有:

$$E\bar{w}=(1/m)\sum_{i=1}^{m} u_i,\quad E\bar{w}'=(1/n)\sum_{i=1}^{m} n_i u_i \tag{8}$$

$$D\bar{w}=(1/m^2)\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{1}{n_j^2}\sum_{j=1}^{n_i} Dw_{ij}\right)=\left[\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}(1/n_i)\right]\cdot\sigma^2$$

$$D\bar{w}'=(1/n^2)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} Dw_{ij}=(1/n)\cdot\sigma^2$$

注意到 $n=\sum_{i=1}^{m} n_i$，用分析的方法不难证明：$(1/m^2)\sum_{i=1}^{m}(1/n_i)\leqslant 1/n$，即

$$D\bar{w}\leqslant D\bar{w}' \tag{9}$$

由(8)可知，$\bar{w}$ 与样本容量在年龄 i 上的分配是无关的，而 $\bar{w}'$ 却是有关的，为权重 $n_i(i=1,2,\cdots,m)$ 所左右，各 u_i 的对待是不一样的。并且由(9)可知 $\bar{w}$ 较之 $\bar{w}'$ 波动性大。这是因为样本容量分配不均所引起的。因此，在估计参数时，应该用(6)作为样本而不用(7)。

2 参数的估计

目前所用的方法有 4 种。

方法 1 此法是在认定了(4)中的 l 就是鱼的体长，由年龄和体长的实测资料 $(i,l_i), i=1,2,\cdots,m$，按照方程(5)，利用 Walford 方法定出参数 l_∞ 和 k，以此代入(5)，并以 $t=1$ 时，$l=l_1$，$t=2$ 时，$l=l_2$ 代入(5)定出参数 t_0。再根据鱼的体长和体重的资料 (l_i,w_i)，$i=1,2,\cdots,m$，按照公式 $w=cl^3$，用最小二乘法定出 c，代入(4)中而得(1)。

此法有两个不足之处，一是将(4)中的 l 断定为鱼的体长；二是即使 l 是鱼的体长的假设为真，也不如从年龄和体重的实测资料 $(i,w_i)i=1,2,\cdots,m$ 直接出发定出鱼的体重生长方程(1)中的参数，而是间接地利用了体重的实测资料，从而拟合优度受到大的影响。

方法 2 该方法是抛弃方法 1 中关于 l 是鱼的体长的假设，直接根据年龄和体重的实测资料，定出鱼的体重生长方程(1)中的参数。具体运算如下:

$$w_i=w_\infty[1-e^{-k(i-t_0)}]^3$$

$$w_i^{1/3}=w_\infty^{1/3}[1-e^{-k(i-t_0)}]\quad i=1,2,\cdots,m$$

$$\frac{w_{i+1}^{1/3}}{w_i^{1/3}}=e^{-k}+\frac{1-e^{-k}}{1-e^{-k(i-t_0)}}$$

所以，

$$w_{i+1}^{1/3}=e^{-k}\cdot w_i^{1/3}+w_\infty^{1/3}\cdot(1-e^{-k})i=1,2,\cdots,m-1 \tag{10}$$

令 $w_i^{1/3}=x_i, w_{i+1}^{1/3}=y_i, i=1,2,\cdots,m-1$。$B=e^{-k}, A=w_\infty^{1/3}(1-e^{-k})$，则(10)式为：

$$y_i=A+Bx_i \quad i=1,2,\cdots,m-1 \tag{11}$$

利用最小二乘法定出(11)中的 A,B，从而解得：

$$k=-\ln B, w_\infty=\left[\frac{A}{1-B}\right]^3 \tag{12}$$

将(12)代入(1)，并以 $t=i$ 时，$w=w_i$ $(i=1,2)$ 代入求得：

$$t_0=1+\frac{1}{k}\ln\left[1-\frac{1-e^{-k}}{\frac{w_2^{1/3}}{w_1^{1/3}}-e^{-k}}\right]$$

这样，鱼的体重生长方程中的参数 w_∞, k, t_0 就从已有的年龄和体重资料直接定出，避免了通过体长资料来确定诸参数所出现的间接误差，而且由于鱼的体长是局部指标，体重是综合指标，直接使用体重资料，就能更好地反映鱼体的生长情况，作者(陈万青等，1986)曾提出过和使用过此方法。

方法 3,4　方法 2 是基于方程(1)而得出的。在前面已证明，鱼体更一般的生长方程应是方程(2)，但在方程(2)中增加了一个新的未知参数 r，从而增加了合理估计各参数的难度。在有些文章(陈万青等，1986；唐启升，1980)中，根据体长和体重资料 (l_i, w_i)，$i=1,2,\cdots,m$ 用体长和体重的函数关系式 $w=cl^b$，运用最小二乘法定出参数 c，b。对此，相应于方法 1 的过程得方法 3；相应于方法 2 的过程，即将(1)中的 r 取为这里的 b，(4)中的两端开立方改为开 r 次方而得方法 4。

不难看出，方法 3,4 虽然所用的生长方程更为一般，但对方法 3 来说出现了方法 1 的同样问题；在方法 4 中取 r 为 b 也是没有充分根据的。基于此，本文提出下列的方法5——搜寻逼近法。

方法 5　搜寻逼近法，具体是：

1° 根据年龄与体重的样本 (i, w_i)，$i=1,2,\cdots,m$。取 r 为 3 个固定的初值 $r_0^{(i)}$，$i=1,2,3$。并满足 $r_0^{(1)}<r_0^{(2)}<r_0^{(3)}$，按照方法 4 中 r 已取定值后的程序分别得：

$$\hat{w}_0^{(i)}=\hat{w}_0^{(i)}[1-e^{-k_0^{(i)}(t-t_0^{(i)})}]^{r_0^{(i)}}, i=1,2,3。$$

2° 分别计算估计剩余误差：$Q_0^{(i)}=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(\hat{w}_{0j}^{(i)}-w_j)^2}$ $i=1,2,3$ 式中，$\hat{w}_{0j}^{(i)}$ 为 $r=r_0^{(i)}$ 时所得鱼的生长方程算得的第 j 龄鱼的估计体重。$j=1,2,\cdots,m; i=1,2,3$。

3° 比较 $Q_{0j}^{(i)}(i=1,2,3)$ 的大小，取定 $r_1^{(i)}, i=1,2,3$。

(i) 若 $Q_0^{(1)}<Q_0^{(2)}<Q_0^{(3)}$，取 r 的第一次近似值 $r_1^{(i)}, i=1,2,3$；满足 $r_1^{(1)}<r_1^{(2)}<r_1^{(3)}=r_0^{(1)}$。

(ii) 若 $Q_0^{(1)}>Q_0^{(2)}>Q_0^{(3)}$，取 r 的第一次近似值 $r_1^{(i)}, i=1,2,3$，满足 $r_0^{(3)}=r_1^{(1)}<r_1^{(2)}<r_1^{(3)}$。

(iii) 若 $Q_0^{(1)}>Q_0^{(2)}$，且 $Q_0^{(2)}<Q_0^{(3)}$，取 r 的第一次近似值 $r_1^{(i)}$，$i=1,2,3$，满足 $r_0^{(1)}<r_1^{(1)}<r_1^{(2)}=r_0^{(2)}<r_1^{(3)}<r_0^{(3)}$。

(iv) 若 $Q_0^{(1)}<Q_0^{(2)}$，且 $Q_0^{(2)}>Q_0^{(3)}$，应分别按 (i) 和 (ii) 向左右两方向搜寻逼近，但经初步分析和实例验证，此种情形不会发生。

4° 对取定的 r 的第一次近似值 $r^{(i)}, i=1,2,3$。重复前面的步骤，可得 r 的第二次近似值 $r_2^{(i)}, i=1,2,3$。如此下去，可得 r 的第 j 次近似值。对于所要求的 r 的精度，例如要求 r 的估计值 $\hat{r}$ 与 r 的绝对误差 $|\hat{r}-r|\leqslant 0.01$，则当到了第 j 次近似，若满足 $|r_j^{(i)}-r_j^{(i-1)}|\leqslant 0.01, i=2,3$ 时，便可停止搜寻，并令使得

$$Q_j^{(i)}=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(\hat{w}_{jk}^{(i)}-w_k)^2},$$

$(i=1,2,3)$ 为最小的 $r_j^{(i)}$ 作为 r 的最终估计值。其中 $\hat{w}_{jk}^{(i)}$ 表示第 j 次近似时相应于 $r_j^{(i)}$ 所得的鱼的第 k 龄鱼的个体体重。

5° 对于上面得到的满足精度要求的 r，沿用方法 4 的步骤，可求得方程(2)中的参数。

显而易见，搜寻逼近法比前 4 种方法有着更好的拟合优度。在下面的实例计算结果中，表明方法 1,2,3,4 的估计剩余误差较新法的估计剩余误差分别高出 35%，6%，20% 和 29%。不可讳言，新法计算量较大，但对于现代的计算机，适当地选取 r 的初值，是比较容易完成的。

3 计算实例

3.1 数据资料如表 1。

3.2 5 种方法计算黄海鲬体重的生长方程如下:

方法 1 $w=1\,024.9[1-e^{-0.3587(t+0.3589)}]^3$

方法 2 $w=1\,135.695[1-e^{-0.339(t+0.461)}]^3$

方法 3 $w=1\,062.39[1-e^{-0.3587(t+0.3589)}]^{3.21}$

方法 4 $w=1\,115.42[1-e^{-0.382(t+0.4904)}]^{3.21}$

方法 5 $w=1\,256.256[1-e^{-0.222\,97(t-0.289\,76)}]^{1.44}$ (13)

3.3 用 5 种方法估计黄海鲬的各龄个体体重如表 2。

3.4 用 5 种方法估计的鲬的体重的剩余误差:

记 $S_j=\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{w}_{ji}-w_i)^2}$，其中 $\hat{w}_{ji}$ 表示用第 j 种方法估计的第 i 龄鲬的个体体重。$j=1,2,3,4,5$，则 $S_1=88.13, S_2=69.59, S_3=78.71, S_4=84.29, S_5=65.46$。又记 $\delta_j=(S_j-S_5)/S_5$，则 $\delta_1=35\%, \delta_2=6\%, \delta_3=20\%, \delta_4=29\%$。最后，还应该指出，基于鱼的体重生长方程(2)和估计参数的新方法而得的(13)，其拟合的优度已由上可见。只是实例中的估计值为 1.44 是比较出人意料的，它与 von Bertalanffy 生长方程中的 $r=3$ 和认为 r 在 3 附近取值是大不一样的。这对更为精确的刻划鱼的生长速度、加速度和性成熟期等规律是很重要的。由前文知 (1994)，此时 p 的估计值 $\hat{p}=1-\frac{1}{\hat{r}}=0.307$，较 $p=\frac{2}{3}=0.667$ 来得小，这说明黄海鲬的同化作用较弱，生长比较缓慢，这与实际是相吻合的。另外，黄海鲬的体形为牛尾巴状，r 的取值也反映了这种情况。

表 1　黄海鲬的年龄、体长、体重的实测数据(陈万青等，1986)

Tab. 1　Measured data of the age, body length and body weight of *Platycephalus indicus*

年　龄	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
样本容量　n_i	165	75	96	49	30	10	2	4	2	1	2	2
平均个体体长　l_i(mm)	217.6	306.53	358.09	404.61	435.3	454.7	476.5	459.33	480	480	504	506
平均个体体重　w_i(g)	72.77	221.28	364.02	532.31	670.67	783.3	883.5	785.5	1 018.5	920	1 137.5	1185

表 2　用 5 种方法计算的各龄黄海鲬的个体体重

Tab. 2　Individual body weight of *Platycephalus indicus* at different ages obtained using five methods

年龄	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
方法 1	58.97	190.91	352.11	506.64	637.85	741.82	820.78	879.14	921.51	951.90	973.3	988.83
方法 2	67.68	205.72	374.14	538.10	680.28	795.55	885.17	925.97	1 003.33	1 040.28	1 067.13	1 086.56
方法 3	49.86	175.58	338.29	499.52	639.27	751.49	837.48	901.42	948.03	981.56	1 055.46	1 022.93
方法 4	76.51	232.67	417.58	590.01	732.41	842.15	923.23	981.55	1 022.78	1 051.60	1 071.58	1 085.37
方法 5	79.01	240.26	402.32	548.91	675.74	782.81	871.88	945.21	1 005.18	1 053.96	1 093.50	1 125.45

参　考　文　献

山东省海洋水产研究所编，1977，水产资源数量变动模式简说，国外海洋水产，**1**：32—35。

刘蝉馨，1981，黄渤海蓝点马鲛年龄的研究，鱼类学论文集，第一集，科学出版社(北京)，39—40，125—131。

陈大刚等，1984，黄渤海牙鲆的年龄与生长的初步研究以及关于 von Bertalanffy 生长函数的修改和讨论，山东海洋学院学报，**14**(1)：102—109。

陈万青、赵维谦，1986，黄海鱼年龄和生长的初步研究，水产学报，**10**(3)：289—304。

赵维谦，1994，关于鱼的生长方程的研究 I，海洋与湖沼，**25**(5)：401—404。

唐启升，1980，太平洋鲱的性成熟、生殖力和生长特性的研究，海洋水产研究，**1**：86—98。

STUDY ON THE FISH GROWTH EQUATION

II. A NEW METHOD FOR ESTIMATING PARAMETERS

Zhao Weiqian

(Appied Mathematics Department, Ocean University of Qingdao, Qingdao 266003)

Abstract

In present, for equations describing the growth of fish, one of them is derived by von Bertalanffy, i. e. equation (1):

$$w = w_{\infty}[1 - e^{-k(t-t_0)}]^3 \tag{1}$$

another is equation (2) derived by author (1994)

$$w = w_{\infty}[1 - e^{-k(t-t_0)}]^r \tag{2}$$

In this paper, four kinds of methods estimating the parameters in equations (1), (2) are introduced. Meanwhile, it is pointed out that these methods have certain deficencies: either the models used are not appropriate or the assumptions made are unrealistic. Thus, in this study a new method (search and approximation method) is put forward based on equation (2) and less assumptions. To do this, r is discreted and remainder error is taken as a scale. Then much better parameters are obtained by searching and approxmating. On the basis of the measurered data of the *Platycephalus indicus*, the equation of the body weight growth is derived as follows:

$$w = 1\,256.156[1 - e^{-0.2297(t-0.289\,76)}]^{1.44}$$

Let

$$S_j = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{w}_{ji} - w_i)^2}$$

where $\hat{w}_{ji}$ denothes the weight of the flathead at age i by using the kind j of methods, $j = 1,2,3,4,5$. Thus, $S_1 = 88.13, S_2 = 69.59, S_3 = 78.71, S_4 = 84.29, S_5 = 65.46$. Taking $\delta_j = (S_j - S_5)/S_5$, $\delta_1 = 35\%$, $\delta_2 = 6\%$, $\delta_3 = 20\%$, $\delta_4 = 29\%$. Obviously, the search and approximation method is advantege to the other methods.

In addition, the process of the sample data cornenspoding this method is also discussed much better in this paper.

Key words Fish Growth equatio Estimating parameter New method