第26卷 第1期 海 洋 与 湖 沼 Vol. 26, No. 1
1995年1月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA Jan., 1995

分析海浪方向谱的扩展本征矢方法*

I. 方法的导出

管长龙 文圣常 张大错
(青岛海洋大学物理海洋研究所,青岛 266003)

提要 基于交叉谱矩阵可以按本征值划分为信号和含有噪音部分的思想,提出了一种自直接测量数据估计海浪方向谱的方法。该方法称为扩展本征矢方法(EEV),可应用于单点测量系统、仪器阵列以及由二者构成的复合阵列。现有的某些估计方法(如最大似然方法及其扩展形式等)仅是此方法的某种特例。

关键词 海浪 方向谱 估计方法 本征矢

现代海浪理论研究与实际应用的核心问题之一为寻求海浪谱的形式,其中方向谱具有更重要的理论和应用意义。获得方向谱的主要途径为观测,其中涉及两个主要问题:观测方案和估计方法。估计方法的研究一直构成活跃的研究领域,表现为对已有方法的完善和新方法的提出。自60年代,已提出许多估计方法,其中得到广泛应用的为傅氏级数展开方法(Longuet-Higgins et al., 1963; Paniker et al., 1974)和最大似然方法(MLM)(Davis et al., 1977; Oltman-Shay et al., 1983)及其扩展形式(EMLM)(Isobe et al., 1984)。Marsden 等(1987)提出了一种称为本征矢(EV)的新方法,该方法优于现有的方法,但其仅适用于分析纵摇-横摇浮标数据。本研究提出了一种更普遍的本征矢方法,称为扩展本征矢方法(EEV)。

1 方向谱与交叉谱间的关系

由直接测量得到的,或者为浪场中同一物理量在不同位置处的时间序列(仪器阵列情形),或者为浪场中某一点处不同物理量的时间序列(单点测量情形)。海浪的方向信息蕴含于这些时间序列的相关性中,其相互间的交叉谱矩阵为估计方向谱的出发点。复合阵列的交叉谱矩阵的元素与方向谱的关系为:

$$\Phi_{mn}(\omega) = \int_{\boldsymbol{k}} H_m(\boldsymbol{k},\omega)H_n^*(\boldsymbol{k},\omega)\exp[-i\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m)]S(\boldsymbol{k},\omega)d\boldsymbol{k} \qquad (m,n=1,2,\cdots,M) \tag{1}$$

此处 $\Phi_{mn}(\omega)$ 为复合阵列中第 m 与第 n 个海浪特性间的交叉谱;$H_m(\boldsymbol{k},\omega)$ 为第 m 个海浪特性与波面间的传递函数;$\boldsymbol{x}_m$ 为得到第 m 个海浪特性的测头的位置矢量;$\boldsymbol{k}$, ω 分别

---

* 国家自然科学基金资助项目,48970261号。管长龙,男,出生于1963年3月,博士,讲师。
收稿日期:1993年9月30日,接受日期:1993年12月15日。

为组成波的波数矢量和圆频率；M为复合阵列的维数，表示测得的海浪特性的个数。考虑到 k 与 ω 满足一定的频散关系，式(1)可写成：

$$\Phi_{mn}(\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}H_m(\omega,\theta)H_n^*(\omega,\theta)\{\cos[k(x_{mn}\cos\theta+y_{mn}\sin\theta)]-i\sin[k(x_{mn}\cos\theta+y_{mn}\sin\theta)]\}S(\omega,\theta)d\theta \tag{2}$$

这里 θ 为组成波的波向，且 $x_{mn}=x_n-x_m$，$y_{mn}=y_n-y_m$。通常将传递函数表示为 $H(\omega,\theta)=h(\omega)\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta$，函数 $h(\omega)$ 的表达式及 α,β 的值见表 1，表 1 中的结果均得自小振幅波动理论。

表 1　传递函数 $H(\omega,\theta)=h(\omega)\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta$

Tab. 1　*Transfer Function* $H(\omega,\theta)=h(\omega)\cos^\alpha\theta\sin^\beta\theta$

观测量	符号	α	β	$h(\omega)$
波面高度	η	0	0	1
波面垂直速度	η_t	0	0	$-i\omega$
波面垂直加速度	η_{tt}	0	0	$-\omega^2$
波面斜率 (x)	η_x	1	0	ik
波面斜率 (y)	η_y	0	1	ik
波面曲率 (xx)	η_{xx}	2	0	$-k^2$
波面曲率 (yy)	η_{yy}	0	2	$-k^2$
波面曲率 (xy)	η_{xy}	1	1	$-k^2$
波压强	p	0	0	$\rho g\dfrac{\mathrm{ch}\,kz}{\mathrm{ch}\,kd}$
水质点速度 (x)	u	1	0	$\omega\dfrac{\mathrm{ch}\,kz}{\mathrm{ch}\,kd}$
水质点速度 (y)	v	0	1	$\omega\dfrac{\mathrm{ch}\,kz}{\mathrm{ch}\,kd}$
水质点速度 (z)	w	0	0	$-i\omega\dfrac{\mathrm{sh}\,kz}{\mathrm{sh}\,kd}$
水质点加速度 (x)	u_t	1	0	$-i\omega^2\dfrac{\mathrm{ch}\,kz}{\mathrm{sh}\,kd}$
水质点加速度 (y)	v_t	0	1	$-i\omega^2\dfrac{\mathrm{ch}\,kz}{\mathrm{sh}\,kd}$
水质点加速度 (z)	w_t	0	0	$-\omega^2\dfrac{\mathrm{sh}\,kz}{\mathrm{sh}\,kd}$

2　扩展本征矢方法

Barber (1963) 的方法为基本的方法，是构成其它方法的基础。于式(1)中取 $H_m(\boldsymbol{k},\omega)=1$，并以 $\boldsymbol{x}$ 代替 $\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m$，则式(1)变为：

$$\Phi(\boldsymbol{x},\omega)=\int_{\boldsymbol{k}}S(\boldsymbol{k},\omega)\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{k} \tag{3}$$

式(3)的逆变换为：

$$S(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x},\omega)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \tag{4}$$

实际上，仅在有限的 $\boldsymbol{x}$ 处的交叉谱已知，式(4)的积分不能实现，Barber 以求和代替积分，得到方向谱的估计值：

$$\hat{S}(\boldsymbol{k},\omega)=\sum_m\sum_n\Phi_{mn}(\omega)\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m)] \tag{5}$$

对于复合阵列,交叉谱与方向谱的关系为式(1),其类似于式(4)的逆变换不存在,但仍可类比于式(5)将方向谱的估计值表示为交叉谱的线性迭加,即:

$$\hat{S}(\boldsymbol{k},\omega)=\sum_m\sum_n\alpha_{mn}(\boldsymbol{k})\Phi_{mn}(\omega) \tag{6}$$

式中,$\alpha_{mn}(\boldsymbol{k})$ 为待定的系数,方向分布的信息蕴含于其中。将式(1)代入式(6),得:

$$\hat{S}(\boldsymbol{k},\omega)=\int_{\boldsymbol{k}'}S(\boldsymbol{k}',\omega)W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')d\boldsymbol{k}' \tag{7}$$

式中,$W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')=\sum_m\sum_n\alpha_{mn}(\boldsymbol{k})H_m(\boldsymbol{k}',\omega)H_n^*(\boldsymbol{k}',\omega)\cdot\exp[-i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}_m)]$;$W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ 称为窗函数。由式(7)可看出,窗函数越接近于 δ-函数,方向谱的估计值 $\hat{S}(\boldsymbol{k},\omega)$ 便越接近于真值 $S(\boldsymbol{k},\omega)$。因方向谱的真值与窗函数非负,可通过使方向谱的估计值为最小来达到窗函数接近于 δ-函数的目的。据 Davis 等(1977)将 $\alpha_{mn}(\boldsymbol{k})$ 写成:

$$\alpha_{mn}(\boldsymbol{k})=\gamma_m^*(\boldsymbol{k})\gamma_n(\boldsymbol{k}) \tag{8}$$

将式(8)代入式(6)中,则得方向谱的估计值为:

$$\hat{S}(\boldsymbol{k},\omega)=\gamma^+(\boldsymbol{k})\Phi(\omega)\gamma(\boldsymbol{k}) \tag{9}$$

式(9)中 $\gamma(\boldsymbol{k})=\{\gamma_1(\boldsymbol{k}),\gamma_2(\boldsymbol{k}),\cdots,\gamma_M(\boldsymbol{k})\}^t$。定义

$$D_j(\boldsymbol{k},\omega)\equiv H_j(\boldsymbol{k},\omega)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_j)(j=1,2,\cdots,M) \tag{10}$$

结合式(8)和式(10),则窗函数变为:

$$W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')=|\gamma^+(\boldsymbol{k})D(\boldsymbol{k}',\omega)|^2 \tag{11}$$

将式(7)中的积分以求和表示,则有:

$$\hat{S}(\boldsymbol{k},\omega)=S(\boldsymbol{k},\omega)W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k})+\sum_{\boldsymbol{k}'\neq\boldsymbol{k}}S(\boldsymbol{k}',\omega)W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') \tag{12}$$

因为式(12)右端的两项均为正,欲使方向谱的估计值尽可能接近其真值,需在 $W(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k})=1$,根据式(11),即

$$\gamma^+D=Z,\ (|Z|=1) \tag{13}$$

的条件下,使得 $\hat{S}(\boldsymbol{k},\omega)$ 达到最小值。

本征矢方法源于声波侦测,其基本思想是把交叉谱矩阵分成两部分,分别称为信号和含有噪音的部分,即 $\hat{\Phi}=\hat{S}+\hat{N}$,$\hat{S}$ 和 $\hat{N}$ 分别代表信号和含有噪音的部分。为使方向谱的估计值在式(13)的限制下达到最小值,仅需其含有噪音的部分为最小。因此为了确定 γ,只需求

$$\delta^2=\gamma^+\hat{N}\gamma+\lambda(\gamma^+D-Z) \tag{14}$$

的条件极值。式(14)中 λ 为待求的拉氏乘子。

使 δ^2 为极小的 $\gamma=\dfrac{Z^*\hat{N}^{-1}D}{D^+\hat{N}^{-1}D}$,将 γ 代入式(9)中,因此得到方向谱的估计值为:

$$\hat{S}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{D^+\hat{N}^{-1}\hat{\Phi}\hat{N}^{-1}D}{(D^+\hat{N}^{-1}D)^2} \tag{15}$$

交叉谱矩阵的信号与含有噪音的部分的划分通过该矩阵的对角化实现。相应于较大的 P 个本征值的本征矢代表信号部分,较小的 $M-P$ 个代表含有噪音的部分,P 值的确定将在本文的第二部分加以说明。交叉谱矩阵为 Hermit 矩阵,有 M 个实的本征值 $\{\lambda_l, l=1,2,\cdots,M\}$,且 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_M$。相应于 λ_l 的归一化本征矢为 $\Psi^l=(\Psi_1^l,$

$\Psi_2^l, \cdots \Psi_M^l)'$。

根据线性代数的知识,可将交叉谱矩阵的元素以其本征值和归一化本征矢来表示,即

$$\hat{\Phi}_{ij} = \sum_{l=1}^{M} \lambda_l \Psi_i^l \Psi_j^{l*} = \sum_{l=1}^{P} \lambda_l \Psi_i^l \Psi_j^{l*} + \sum_{l=P+1}^{M} \lambda_l \Psi_i^l \Psi_j^{l*} = \hat{S}_{ij} + \hat{N}_{ij} \tag{16}$$

由式(16)根据 Hermit 矩阵的性质,可以证明 $\hat{S}$ 和 $\hat{N}^{-1}$ 正交,于是式(15)变为:

$$\hat{S}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{(D^+ \hat{N}^{-1} D)} \tag{17}$$

若以本征值和相应的归一化本征矢表示式(17),则得到自M维复合阵列的海浪方向谱的扩展本征矢方法的估计值,为:

$$\hat{S}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{\sum_{l=P+1}^{M} \lambda_l^{-1} |D^+ \Psi^l|^2} \tag{18}$$

3 几个推论

3.1 $P = 0$ 的情形　将整个交叉谱矩阵视为含有噪音的部分,使方向谱的估计值在式(13)的限制下为最小,则得方向谱的估计值为:

$$\hat{S}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{1}{D^+ \hat{\Phi}^{-1} D} \tag{19}$$

即等同于式(18)中取全部本征值的结果,与 Isobe 等(1984)的扩展最大似然方法(EMLM)相同。因此,EMLM 为 EEV 一个特例。

3.2 纵摇-横摇浮标情形　当复合阵列为三维单点测量系统(以纵摇-横摇浮标为例)时,$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_3$,且 $D = \beta = (1,\ ik\cos\theta,\ ik\sin\theta)'$。由式(18)得到与 Marsden 等(1987)一致的结果,故他们的工作为此方法的一个特例。

3.3 仪器阵列情形　当复合阵列为仪器阵列时,$H_m(\boldsymbol{k}, \omega) = 1, (m = 1, 2, \cdots, M)$,且列矩阵$D$变成:

$$D = \{\exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}_1), \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}_2), \cdots, \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}_M)\}'$$

由式(18)得到自仪器阵列数据的海浪方向谱的扩展本征矢方法估计式,这是一个新的结果。

3.4 苜蓿叶浮标情形　若复合阵列为苜蓿叶浮标,则 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \cdots = \boldsymbol{x}_6$,且列矩阵$D$为:

$$D = \{1,\ ik\cos\theta,\ ik\sin\theta, -k^2\cos^2\theta,\ -k^2\cos\theta\sin\theta,\ -k^2\sin^2\theta\}'$$

由式(18)得到自苜蓿叶式浮标数据的海浪方向谱的扩展本征矢方法估计式,这也是一个新的结果。

4 结语

基于交叉谱矩阵按本征值划分信号和含有噪音部分的思想,我们提出了一种称为扩展本征矢的估计海浪方向谱的方法。该方法可应用于单点测量、仪器阵列和由二者构成的复合阵列。并且 MLM (Davis et al., 1977; Oltman-Shay et al., 1983), EMLM (Isobe et al., 1984) 以及 Marsden 等(1987)的工作均为所导出的方法的特例。

参 考 文 献

Barber, N. F., 1963, The directional resolving power of an array of wave detectors, *In* Ocean Wave Spectra, Prentice-Hall Inc. (Englewood Cliffs, N. J., U. S. A.), pp. 137—150.

Davis, R. E., Regier, L. A., 1977, Methods for estimating directional wave spectra from multi-element arrays, *J. Mar. Res.*, **35**(3): 453—477.

Isobe, M., Kondo, K., Horikawa, K., 1984, Extension of MLM for estimating directional wave spectrum, Proc. Sympo. on Description and Modelling of Directional Seas, Lyngby, Denmark, Paper No. A-6, 15pp.

Longuet-Higgins, M. S., Cartwright, D. E., Smith, N. D., 1963, Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, *In* Ocean Wave Spectra, Prentice-Hall Inc. (Englewood Cliffs, N. J., U. S. A.), pp. 111—136.

Marsden, R. F., Juszko, B. A., 1987, An eigenvector method for the calculation of directional spectra from heave, pitch and roll buoy data, *J. Phys. Oceanogr.*, **17**: 2 157—2 167.

Oltman-Shay, J., Guza, R. T., 1983, A data-adaptive ocean wave directional-spectrum estimator for pitch and roll type measurements, *J. Phys. Oceanogr.*, **14**: 1 800—1 810.

Paniker, N. N., Narayana, N., Borgman, L., 1974, Enhancement of directional wave spectrum estimates, Proc. 14th Coastal Eng. Conf. (New York), Vol. 1, pp. 258—279.

AN EXTENDED EIGENVECTOR METHOD FOR ESTIMATION OF DIRECTIONAL SPECTRA OF SEA WAVES

I. DERIVATION OF THE METHOD

Guan Changlong, Wen Shengchang, Zhang Dacuo
(*Institute of Physical Oceanography, Ocean University of Qingdao, Qingdao* 266003)

Abstract

Based on the idea that the cross-spectral matrix can be partitioned into noise and signal components determined by the eigenvalues of the matrix, this new method for estimation of the directional spectra of sea waves is called extended eigenvector method (EEV) and can be applied to point, staff array and arbitrarily mixed instrument array measurements. For a mixed staff array with M wave properties, the estimated directional spectrum of sea waves from the EEV is expressed as

$$S(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{1}{\sum_{l=P+1}^{M}\lambda_l^{-1}|D^{+}\Psi^{l}|^2}$$

The EEV is data adaptive and nonlinear. The maximum likelihood method (MLM) for estimating directional spectrum, the extension of the MLM (EMLM) and the eigenvector method (EV) for pitch/roll buoy data are only subsets of the EEV.

Key words Sea wave Directional spectrum Estimation method Eigenvector