第27卷 第6期 海 洋 与 湖 沼 Vol.27, No.6
1996年 11月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA Nov., 1996

海洋重磁测网调差的若干理论研究*

范 守 志
(中国科学院海洋研究所，青岛 266071)

提要 为从海洋重磁测网的观测资料中确定并扣除各测线含有的系统误差(即测网的调差)，本研究对调差方法进行理论研究。结果为：1) 根据统计学原理，建立由测网交点差确定各测线的系统偏差的方程组[见文中式(4)和(6)]。2) 证明它与根据最小二乘法原理使测网精度调到最佳时所生成的方程组是同一个方程组。3) 证明此方程组有无穷多组解，并且任意两组解之间相差一个常数[见式(14)]。 4) 证明需要也只需要增加一个控制条件就能使此方程组有唯一确定的解。 5) 推荐一个有用的控制条件即式(20)，并导出方程组在此控制条件下的公式解，即式(25)，(26)和(27)。

关键词 测网 交点差 线偏差

高精度的海洋重力、地磁调查的测线通常分成两组，并且相交构成测网。由于每一条测线的数据中都不可避免地含有系统误差(线偏差)和偶然误差，因此在测线的交点处，两条测线分别给出的测量值，虽然经过各项必要的公式归算，仍不一样；其差值，即为交点差。利用测网中各个交点上的交点差来识别各条测线资料中的线偏差并扣除它们，对保证成果质量和提高测网精度来说，都十分重要。虽然已有的工作(黄谟涛，1990；范守志等，1992；Fan Shouzhi et al.，1991)表明，经过这步调差后，测网的精度有明显地提高，但所用的调差方法建立在逐步迭代或最小二乘法的原理上，对解的唯一性问题尚需从理论上认真研究。本文旨在从理论上研究调差方案的数学结构及解的唯一性问题。

1 研究方法

首先建立描述各条测线资料中线偏差的方程组，应用线性代数的理论确立方程组的通解公式，并进而研究解的唯一性问题。

2 研究结果

2.1 线偏差方程组

任何一个正规测网都如图1所示，包含有两组测线。一组含有 m 条测线，记为 K_1，$K_2\cdots$，K_m；另一组有 n 条测线，各记为 L_1，L_2，$\cdots$，L_n；测线交点个数是 mn。

用 C_{ij} 代表测线 K_i 与 L_j 的交点，x_{ij} 代表 K_i 线在 C_{ij} 处的测量值，y_{ij} 代表沿 L_j 线在 C_{ij} 处的测量值，C_{ij} 处的交点差是：

$$R_{ij}=x_{ij}-y_{ij} \tag{1}$$

用 A_i 代表 K_i 测线的线偏差，e_{ij} 代表 x_{ij} 中含有的偶然误差；用 B_j 代表 L_j 测线的线偏差，

* "八五"国家科技攻关项目，85-904-01-03号。范守志，男，出生于1941年10月，副研究员。

收稿日期：1995年4月24日，接受日期：1996年5月2日。

f_{ij}代表y_{ij}中的偶然误差；z_{ij}代表C_{ij}处应有的真值；那么$x_{ij}=z_{ij}+A_i+e_{ij}$，$y_{ij}=z_{ij}+B_j+f_{ij}$。因此，

$$R_{ij}=A_i-B_j+g_{ij} \tag{2}$$

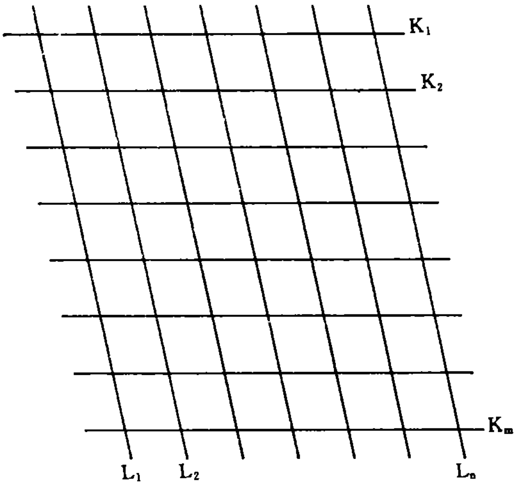

图1 测网与测线

Fig.1 Network and lines

其中$g_{ij}=e_{ij}-f_{ig}$也是偶然误差。只要测线的条数足够多，根据偶然误差的统计性质，就有

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}=0, \quad i=1, 2, \cdots, m;$$

以及
$$\sum_{i=1}^{m} g_{ij}=0, \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

由(2)式分别对测线K_1，K_2，…，K_m上的各个交点差求和，并利用式(3)就得到方程组

$$\begin{aligned} nA_1-(B_1+B_2+\cdots+B_n)&=P_1 \\ nA_2-(B_1+B_2+\cdots+B_n)&=P_2 \\ &\cdots \\ nA_m-(B_1+B_2+\cdots+B_n)&=P_m \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$P_i=\sum_{j=1}^{n} R_{ij}, \quad i=1, 2, \cdots, m \tag{5}$$

是K_i线上各交点差之和。类似地，对L_1，L_2，…，L_n线可得到方程组

$$\begin{aligned} A_1+A_2+\cdots+A_m-mB_1&=Q_1 \\ A_1+A_2+\cdots+A_m-mB_2&=Q_2 \\ &\cdots \\ A_1+A_2+\cdots+A_m-mB_n&=Q_n \end{aligned} \tag{6}$$

其中

$$Q_j=\sum_{i=1}^{m} R_{ij}, \quad j=1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

是L_j线上各交点差的和。因为各R_{ij}均为已知，各P_i及Q_j也是已知的。用S代表测网中所有交点差的总和，还应当有

$$\sum_{i=1}^{m} P_i=\sum_{j=1}^{n} Q_j=S \tag{8}$$

把(4)和(6)集合成一个方程组，它含有$m+n$个方程。把其中$m+n$个未知数顺序排列为A_1，A_2，…，A_m，B_1，B_2，…，B_n，方程组的系数行列式D就是一个$m+n$阶的行列式。由(4)，(6)可知这行列式D中任一行的$m+n$个元素之和为零，因此

$$D=0 \tag{9}$$

(9)式表明上述方程组或者无解，或者有无穷多组解。累加(4)中m个方程，得到

$$n(A_1+A_2+\cdots+A_m)-m(B_1+B_2+\cdots+B_n)=S \tag{10}$$

累加(6)中 n 个方程，并注意式(8)，仍得到(10)式。这就是说，由(4)和(6)构成的方程组中任何一个方程均可由其余的 $m+n-1$ 个方程导出。

2.2　方程组的通解

现在证明，方程组(4)和(6)中不独立的方程个数是 1。事实上，可从方程组中删去任意一个方程，例如最末一个方程，就有与(4)和(6)等价的方程组：

$$
\begin{aligned}
&nA_1-(B_1+B_2+\cdots+B_{n-1})-B_n=P_1\\
&nA_2-(B_1+B_2+\cdots+B_{n-1})-B_n=P_2\\
&\cdots\\
&nA_m-(B_1+B_2+\cdots+B_{n-1})-B_n=P_m\\
&A_1+A_2+\cdots+A_m-mB_1=Q_1\\
&A_1+A_2+\cdots+A_m-mB_2=Q_2\\
&\cdots\\
&A_1+A_2+\cdots+A_m-mB_{n-1}=Q_{n-1}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

暂且把未知数 B_n 移到等号右方，(11)就变成 $m+n-1$ 个方程构成的方程组，含有 $m+n-1$ 个未知数 $A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$，以及一个待定变数 B_n. 它的系数行列式 D_1 的阶数为 $m+n-1$、并且可以证明

$$D_1=n^{m-1}\cdot(-m)^{n-1}, \quad 即\ D_1\neq 0 \tag{12}$$

这就是说，(11)中各个方程已是线性无关的，否则 $D_1=0$。并且，对于自由变数 B_n 每一个任意给定值，(11)都将确定出相应的一组解$(A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_{n-1})$；因而(11)有无穷多组解。而且与(11)相对应的齐次方程组(即把各 P_i, Q_j 换为零时)的通解中含有的独立基础解的个数为$(n+m)-(n+m-1)=1$，其通解结构式为

$$(A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_n)=C\cdot(u_1, u_2, \cdots, u_{m+n})$$

这里 C 是任意常数，$(u_1, u_2, \cdots, u_{m+n})$是这个齐次方程组的一个基础解。注意到解$(u_1, u_2, \cdots, u_{m+n})=(1, 1, \cdots, 1)$，即 $A_1=A_2\cdots=A_m=B_1=B_2=\cdots=B_n=1$ 显然是此齐次方程组的一个解，因而通解可写成

$$(A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_n)=C\cdot(1,1,\cdots,1,1,\cdots,1) \tag{13}$$

而非齐次线性方程组(11)的通解应是它的一个特解$(v_1, v_2, \cdots, v_{m+n})$与对应的齐次方程组的通解(13)之和，即

$$
\begin{aligned}
(A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_n)=&C\cdot(1,1,\cdots,1,1,\cdots,1)\\
&+(v_1, v_2, \cdots, v_m, \cdots v_{m+n})
\end{aligned}
\tag{14}
$$

它含有无穷多组解，因为 C 是任意常数。

综上所述，仅用交点差数据建立起来的确定线偏差的方程组(4)和(6)，由于条件(8)的影响，等价于方程组(11)，它有无穷多组理论解，解的结构式是(14)。

由(14)可知，(11)的任何两个解之间相差一个常数值。即，如果$(A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, \cdots, B_n)=(a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$是(11)的一个解，那么$(A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_n)=(a_1+c, a_2+c, \cdots, a_m+c, b_1+c, \cdots, b_n+c)$也是(11)的一个解。因此，测网线

调差的问题就归结为合理地选定(11)的一个特解及 C 值。为此，需要为(11)增加控制条件。

2.3 线调差与测网精度的关系

怎样的线调差方案会使测网精度最大改善，这是否会为方程组(11)带来所需的定解条件？用 W_0 表示各交点差的平方和，即 $W_0=\sum_i^m\sum_j^n R_{ij}^2=\sum_i^m\sum_j^n(x_{ij}-y_{ij})^2$。测网精度 E_0 通常定义为 $E_0=\sqrt{\dfrac{W_0}{2mn}}$。$W_0$ 越小，则 E_0 越小，测网精度(未调差前)就越高。

单纯为提高测网精度而进行的线调差，即所谓用最小二乘法进行调差的问题，在数学上可表述为：寻求一组数 A_1，A_2，…，A_m，用来从测线 K_1，K_2，…，K_m 的观测值中分别减去；同时寻求一组数 B_1，B_2，…，B_n，用来从测线 L_1，L_2，…，L_n 的观测值中分别减去，使得调整后测网各交点差的平方和 W 取最小值，从而测网精度的指标值 E 最佳。注意到调差后，

$$W=\sum_i^m\sum_j^n(R_{ij}-A_i+B_j)^2 \tag{15}$$

使 W 取最小值的条件就是下列方程组的解：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial W}{\partial A_i}=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m\\&\frac{\partial W}{\partial B_j}=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{aligned} \tag{16}$$

具体写出来并加整理就是

$$\begin{aligned}&nA_1-(B_1+B_2+\cdots+B_n)=\sum_j^n R_{1j}\\&nA_2-(B_1+B_2+\cdots+B_n)=\sum_j^n R_{2j}\\&\cdots\\&nA_m-(B_1+B_2+\cdots+B_n)=\sum_j^n R_{mj}\end{aligned} \tag{17}$$

及

$$\begin{aligned}&A_1+A_2+\cdots+A_m-mB_1=\sum_i^m R_{i1}\\&A_1+A_2+\cdots+A_m-mB_2=\sum_i^m R_{i2}\\&\cdots\\&A_1+A_2+\cdots+A_m-mB_n=\sum_i^m R_{in}\end{aligned} \tag{18}$$

由式(5)和(7)可知，方程组(17)就是方程组(4)，而方程组(18)正是方程组(6)。这就是说，在最小二乘法的意义下使测网精度有最大改善的线调差量 A_1，A_2，…，A_m 及 B_1，B_2，…，B_n 正是线偏差方程组(11)的解。如前所证，这个问题也有无穷多组理论解，解的结

构式仍为(14)，并且不同的解之间只相差一个任意常数值 C。而且，(15)式表明，满足(14)的解尽管有无穷多个，但都给出新的相同的 W 值，因为 $-(A_i+C)+(B_j+C)=-A_i+B_j$。因而，条件(16)并没能给方程组(11)提供新的控制条件。

2.4　测网调差的控制条件

2.4.1　控制条件的个数　由(12)知 $D_1\neq 0$，因而组(11)中只有一个自由变数，因此只需再增加一个控制条件与(11)联立，调差问题就有完全确定的解。

2.4.2　控制条件的选择　由于海洋重磁调查目前尚不能直接提供这类控制条件，因此需要研究者设计一种合理的控制条件，并取得统一。这个条件最好是满足误差分配的基本要求之一：调整总量尽可能地小。

作为一种选择，考查如下的控制条件：调差值 A_1，A_2，$\cdots A_m$，B_1，B_2，$\cdots$，B_n 的选择，除去满足偏差方程组(11)外，还应使下述目标函数

$$F=nA_1^2+nA_2^2+\cdots nA_m^2+mB_1^2+mB_2^2+\cdots+mB_n^2 \tag{19}$$

取极小值，即

$$F(A_1,A_2,\cdots,A_m,B_1,B_2,\cdots,B_n)=\min \tag{20}$$

由控制条件(20)求(11)特解就是在条件组(11)下求多元函数 F 的极值点。因此，需先构造一个函数 Φ，$\Phi=F+\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+\cdots+\lambda_mG_m+\mu_1H_1+\mu_2H_2+\cdots\mu_{n-1}H_{n-1}$。其中 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_m，μ_1，μ_2，$\cdots$，μ_{n-1} 是待定因子；诸 G_1，G_2，$\cdots$，H_1，H_2，$\cdots$，H_{n-1} 是把方程组(11)的各式右方的常数项(诸 P，Q)移到等号左方后在等号左方生成的多项式，所求的 A_1，A_2，$\cdots$，A_m，B_1，B_2，$\cdots$，B_n 应由组(11)及下列方程组联立解出：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial A_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,m;\quad 及\ \frac{\partial\Phi}{\partial B_j}=0,\quad j=1,2,\cdots,n$$

上式即

$$\begin{aligned}
&2nA_1+n\lambda_1+(\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_{n-1})=0\\
&2nA_2+n\lambda_2+(\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_{n-1})=0\\
&\cdots\\
&2nA_m+n\lambda_m+(\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_{n-1})=0\\
&2mB_1-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)-m\mu_1=0\\
&2mB_2-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)-m\mu_2=0\\
&\cdots\\
&2mB_{n-1}-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)-m\mu_{n-1}=0\\
&2mB_n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)=0
\end{aligned} \tag{21}$$

累加(21)中前 m 个方程，有

$$2n(A_1+A_2+\cdots+A_m)+n(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)+m(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1})=0,$$

累加(21)中后 n 个方程，有

$$2m(B_1+B_2+\cdots+B_n)-n(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)-m(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{n-1})=0,$$

由这两个方程可得控制条件为

$$n(A_1+A_2+\cdots+A_m)+m(B_1+B_2+\cdots+B_n)=0, \tag{22}$$

利用(22)，方程组(11)中前 m 个方程可化为

$$\begin{aligned} nA_1+\frac{n}{m}(A_1+A_2+\cdots+A_m)&=P_1 \\ nA_2+\frac{n}{m}(A_1+A_2+\cdots+A_m)&=P_2 \\ &\cdots \\ nA_m+\frac{n}{m}(A_1+A_2+\cdots+A_m)&=P_m \end{aligned} \tag{23}$$

再累加(23)中各方程，可得到

$$A_1+A_2+\cdots+A_m=\frac{S}{2n} \tag{24}$$

代回(23)，就有

$$\begin{aligned} A_1&=\frac{P_1}{n}-\frac{S}{2mn} \\ A_2&=\frac{P_2}{n}-\frac{S}{2mn} \\ &\cdots \\ A_m&=\frac{P_m}{n}-\frac{S}{2mn} \end{aligned} \tag{25}$$

又，由(22)及(24)，有 $B_1+B_2+\cdots+B_n=\frac{-S}{2m}$；由(24)及(11)中后 $n-1$ 个方程，有

$$\begin{aligned} B_1&=\frac{-Q_1}{m}+\frac{S}{2mn} \\ B_2&=\frac{-Q_2}{m}+\frac{S}{2mn} \\ &\cdots \\ B_{n-1}&=\frac{-Q_{n-1}}{m}+\frac{S}{2mn} \end{aligned} \tag{26}$$

最后，

$$B_n=\frac{-Q_n}{m}+\frac{S}{2mn} \tag{27}$$

式(25)，(26)和(27)就给出了方程组(11)在控制条件(20)下的特解。这控制条件在(11)的作用下转为条件(22)，它的涵义很清楚——在所有的交点上，调差值的总和为零。

依上述各线偏值调整后，C_{ij} 交点上的交点差 R_{ij} 就变成了 $r_{ij}=R_{ij}-A_i+B_j$；并且任一 K_i 线上各交点差之和 P_i 现在变成了 $p_i=\sum_{j=1}^{m}r_{ij}=\cdots=0$。任一测线 L_j 上各交点差之和 Q_j 现在变成了 $q_j=\sum_{i=1}^{m}r_{ij}=\cdots=0$。同时，测网所有交点上的交点差之和由 S 变成了 $s=0$。

因此，没有必要进行第二轮调差，因为把 p_i，q_i 及 s 代入(25)，(26)和(27)给出的第二轮调差修正值对各 A_i 及 B_j 讲都是零。于是，所设计的控制条件同时具有三点特点：F 最小；调差总量为零，即式(22)；一轮到位。

3 结论与讨论

3.1 仅由交点差的数据对单一测网进行线偏差调整时，无论是由交点误差特性还是由提高测网精度的角度来看，都归结于线偏差方程组(11)的求解问题。

3.2 方程组(11)有无穷多组数学解，任何两组数学解之间的差值是常数(对各测线相同)，通解的表达式为(14)。

3.3 任何一个数学解都给出相等的调差后的测网精度。

3.4 只需再增加一个控制条件，就能得到问题的定解，但这个条件与(11)联立时不得生成矛盾方程组或是不完备方程组。

3.5 依 F 取极小值而设计的控制条件与线偏差方程(11)联立后转化为条件(22)。它的优点是给出了测网调差公式即式(25)，(26)和(27)，不仅易于计算，而且线调差无需再做迭代就一次到位。作为对比，分组两次调差(实际是三次迭代)方法(黄谟涛，1990)，其所用的迭代公式，如果换用本文的符号进行若干推证，可以证明，与本文式(25)，(26)和(27)是完全一样的。此迭代法所依据的假设和近似处理实质上是引进了一种效果与条件(22)相等价的控制条件。本文的研究还表明了，如果改用另一种控制条件代替 F 取极小值或式(22)，那么调差结果会有不同。同样，迭代法(黄谟涛，1990)中用的假设若不同，结果也会变样，并不具有一般性。

3.6 在没有其它控制条件可用的情况下，条件(22)是可取的。是否还有更合理的控制条件，仍有深入研究的必要，以便海洋重磁测网的调差方法有更坚实的理论基础。

参 考 文 献

黄谟涛，1990，海洋通报，**9**(4):81— 86。

范守志、吴金龙，1992，海洋科学，**2**:45— 48。

Fan Shouzhi, Wu Jinlong, 1991, *Marine Science*, **13**(2): 50— 53.

SOME THEORIETICAL STUDIES ON THE ADJUSTMENT OF MARINE GRAVITY AND GEOMAGNETICS SURVEY NETWORK

Fan Shouzhi

(*Institute of Oceanology, Chinese Academy of Sciences, Qingdao* 266071)

Abstract To determine and remove the systematic errors in data of each survey line of marine gravity and geomagnetic network, i. e. to do network adjustment, this theorietical study presents some results: 1. Statistical principles were applied to set up an equation system to determine the systematic errors in each line of a survey network from the discrepances at its cross-over points, as described by (4) and (6) in this paper. 2. The equation system was proved to be identical to that set up by using the least-square method to adjust the network to get its best accuracy. 3. This equation system has an infinite number of solutions, with the difference in values between two solutions being a constant for every line, as described by (14). 4. Also, it is indicated that one, and only one, additional control condition is needed to make the solution unique. 5. A useful control condition, called F-minimum condition, described by (20), is recommended in this paper. The unique solution under this condition is given in the formulas (25), (26) and (27).

Key words Network Discrepancy Line offset