

界面附近目标对柱面波的声散射*

徐海亭

(中国科学院声学研究所北海研究站, 青岛 266023)

提要 运用表面 helmholtz 积分公式研究柱目标位于不同阻抗界面附近的声散射。根据 Green 函数的定义, 在两维空间中, 应用 Fourier 变换方法, 将柱面波展开成平面波的迭加, 并用越过法求解柱面波在界面上的声反射; 同时定义扩展反射系数描述柱面波在平面上的反射大小, 从而获得二维半无限空间 Green 函数的表达式。以刚性圆柱在界面附近的声散射为例进行计算, 得到不同于自由场目标的散射特性, 即界面附近目标的反向散射形态函数具深度起伏; 除垂直界面入射外, 散射指向性呈非对称特性。

关键词 目标反射 刚性柱 数值方法

一般情况下, 目标在界面附近的声散射场不存在严格解, 只有当目标在自由场中的散射声具有用本征函数表示的严格解, 并且本征函数的加法表示式是可以分离的、同时界面为理想边界条件的情况下, 散射声才有严格解, 如 Bertrand (1976) 研究柱目标在无限刚性反射面附近的声散射, 具有严格解的情况是很少的, 大多采用数值方法进行研究, 如 Kristensson 等(1978)用 Transition Matrix 方法研究阻抗界面附近弹性目标的声散射问题, 但此法麻烦, 且散射机理不甚清晰。边界积分方程法(Schenck, 1967)是求目标散射声场的准确解法之一, 随着计算声学的发展, 此法被广泛应用于求目标的辐射声场和散射声场的数值解。Seybert (1988)选择适当的 Green 函数, 使对无限平面上的积分为零, 使问题得到简化; 王鸿振(1991)¹⁾采用该法计算理想界面附近球的辐射问题。杨士莪(1991)²⁾采用高阶球面波的多极子声场的组合, 研究流体界面附近弹性球体的声散射, 这种方法适合高频散射。上面这些研究, 其应用受到限制。本文首先求解二维半无限空间的 Green 函数, 然后采用积分方程法, 求解不同阻抗界面附近柱目标的声散射。

1 二维半无限空间目标声散射的积分公式

在无限空间中, 假定目标表面为 s , 入射波速度势是 φ_i , 散射波速度势是 φ_s , 那么在空间中 p 点的总声场 φ_T 的积分公式是(Schenck, 1967):

$$\varphi_T(p) = \frac{1}{C(p)} \int_s \left[\varphi_T(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n(q)} - G(p, q) \frac{\partial \varphi_T(q)}{\partial n(q)} \right] ds(q) + 4\pi\varphi_i(p) \quad (1)$$

$\varphi_T = \varphi_i + \varphi_s$; q 是目标表面上一点; $n(q)$ 是 q 点表面的单位外法线矢量; $G(p, q)$ 是无

* 国防科技预研基金项目, 91J3.02。徐海亭, 男, 出生于1940年8月, 副研究员。

收稿日期: 1995年1月5日, 接受日期: 1996年7月10日。

1) 王鸿振、郭梵, 1991, 声场声信息国家重点实验室年报 I. 中国科学院声学研究所, 293—298。

2) 杨士莪, 1991, 沉底和掩埋水雷探测的基础研究论文集, 中国科学院声学研究所东海研究站, 6—23。

限空间的 Green 函数, 在二维无限空间中,

$$G(p, q) = i \cdot H_0^{(1)}(kr_{pq}) \quad (2)$$

$H_0^{(1)}(kr_{pq})$ 是零阶 Hankel 函数; k 是声波数; $r_{pq} = |r_p - r_q|$; $C(p)$ 是常数, 其值为:

$$C(p) = \begin{cases} 0 & \text{当 } p \text{ 点位于 } s \text{ 内} \\ 2 & \text{当 } p \text{ 点位于 } s \text{ 上} \\ 4 & \text{当 } p \text{ 点位于 } s \text{ 外} \end{cases} \quad (3)$$

如果目标不存在, $\varphi_s = 0$, $\varphi_T = \varphi_i$, 利用这个条件, 求得无限空间中目标散射的积分公式, 即 Kirchhoff 积分公式:

$$\varphi_s(p) = \frac{1}{C(p)} \int_s \left[\varphi_s(q) \frac{\partial G(p, q)}{\partial n(q)} - G(p, q) \frac{\partial \varphi_s(q)}{\partial n(q)} \right] ds(q) \quad (4)$$

应用公式(4)求目标在无限平面 s_p 附近的半无限空间中的声散射(图1), 除了要考
虑表面 s_p 对入射波的影响外, 重要的是计算时, 需要在目标表面 s 和无限平面 s_p 上求积
分, 这是很麻烦的。如果选择的 Green 函数 $G_h(p, q)$, 使在 s_p 上的积分消失, 则(4)式化
为:

$$\varphi_s(p) = \frac{1}{C(p)} \int_s \left[\varphi_s(q) \frac{\partial G_h(p, q)}{\partial n(q)} - G_h(p, q) \frac{\partial \varphi_s(q)}{\partial n(q)} \right] ds(q) \quad (5)$$

公式(5)即是半无限空间声散射的积分公式, $G_h(p, q)$ 就是二维半无限空间的 Green 函
数。

由于在界面 s_p 上, 声场 φ_T 满足边界条件:

$$ik\varphi_T + \frac{z_1}{\rho c} \frac{\partial \varphi_T}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

$z_1 = \rho_1 c_1$, 是界面上的声阻抗, ρ, c 和 ρ_1, c_1 分别是两种介质的密度和声速。如果 $G_h(p, q)$
在 s_p 上也满足边界条件:

$$ikG_h(p, q) + \frac{z_1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial n} G_h(p, q) = 0 \quad (7)$$

就会使公式(5)在 s_p 上的积分消失; 所以, 用(7)式也就确定了 $G_h(p, q)$ 。

根据 Green 函数的定义和光学虚象原理, 声源 q 在 p 点产生的声场是由两部分组
成, 一部分是直达波, 另一部分是 s_p 的反射波; 因此, s_p 的作用可以用 q 的虚源 q' 的存
在来代替, 其声源强度与界面的阻抗有关(图1)。所以, 半无限空间的 Green 函数是由
无限空间 Green 函数组成, 它们分别是源点 q 和 q' 产生的解:

$$G_h(p, q) = G(p, q) + G'(p, q') \quad (8)$$

根据互易原理, $G'(p, q') = G'(q', p)$, 因此, 虚源的声场等效于声源 q 在接收点 p' 产生
的声场。

2 二维半无限空间的 Green 函数和扩展反射系数

对阻抗边界, 由于入射到 s_p 上的波阵面的对称性与平界面之间形式的不一致, 直接

求柱面波的反射是困难的。因此, 需要把柱面波分解为平面波的迭加。Skudrzyk (1971) 用 Fourier 变换将 Green 函数展开为自然函数, 应用函数的正交性求出二维无限空间 Green 函数的平面波展开:

$$G'(p, q') = \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i[k(x-x_0') + k_y(y-y_0')]}}{\sqrt{k^2 - k_x^2}} dk_x \quad (9)$$

设 k 的方向与 y 轴的夹角为 θ (图 1), 则:

$$k_x = k \cdot \sin\theta, \quad k_y = k \cdot \cos\theta, \quad k_x = 0 \sim \pm\infty \\ r^2 = (x-x_0')^2 + (y-y_0')^2 = r_{pq'}^2.$$

因此, $k_y = k \sim i\infty$, $dk_x = k \cos(\theta) d\theta$, 由 $\cos\theta = \frac{k_y}{k}$, θ 的积分路径是在复 θ 平面的上黎曼

叶内, 由 $\left(-\frac{\pi}{2} + i\infty\right)$ 到 $\left(\frac{\pi}{2} - i\infty\right)$, (9) 式变为:

$$G'(p, q') = \frac{i}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + i\infty}^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ik[\sin\theta(x-x_0') + \cos\theta(y-y_0')]} d\theta \quad (10)$$

这个表达式就是 Hankel 函数的积分表示, 积分路径与三维空间 Green 函数的平面波展开的积分路径相同(布列霍夫斯基赫, 1960)。

由于 $y-y_0' = r\cos\theta_0$, $x-x_0' = r\sin\theta_0$, θ_0 是 p, q 两点在界面上的镜面反射角, 所以在 q 处声源辐射的柱面波经 s_p 平面反射后在 p 处接收到的声场为:

$$\varphi_s(p, q) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + i\infty}^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ikr\cos(\theta-\theta_0)} v(\theta) d\theta \quad (11)$$

显然, $\varphi_s(p, q) = g'(p, q')$; $v(\theta)$ 是表面 s_p 的反射系数。将(11)式代入(8)式, 就得到半无限空间 Green 函数的普遍表达式。

对理想边界, $v=1$ (Neumann condition) 和 $v=-1$ (Dirichlet condition),

$$G'(p, q') = v \cdot G(p, q') \quad (12)$$

对阻抗边界条件, (11)式的求解是困难的, 当 $kr \gg 1$, 由于 $v(\theta)$ 是缓变函数, 采用越过法求近似积分值(Skudrzyk, 1971), 结果为:

$$G(p, q') = G_s(p, q') + G_c(p, q') \quad (13)$$

$$G_s(p, q') = \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{ikr - \frac{\pi}{4}} \left[v(\theta_0) - i \frac{v''(\theta_0)}{2kr} \right] = \frac{i}{4\pi} H_{0\infty}^{(1)}(kr) \cdot V(\theta_0)$$

$$V(\theta_0) = v(\theta_0) - i \frac{v''(\theta_0)}{2kr}$$

$G_s(p, q')$ 表示几何光学近似下的反射波; v'' 表示对 θ 求二阶导数; θ_0 表示越过点的角度, 它与入射角相等。 $G_c(p, q')$ 是被积函数中 $v(\theta)$ 的支点的贡献, 物理意义表示侧面波的存在, 因为侧面波的振幅与频率和距离的平方成反比, 它的值很小, 所以这里不考虑

它的影响。 $H_{0\infty}^{(1)}(kr)$ 是零阶 Hankel 函数的渐近表达式。因此，公式(13)的物理意义是柱面波在界面上的反射；所以， $V(\theta_0)$ 表示扩展意义的反射系数。另外，也可以把柱面波在界面上的反射看成为虚源 q' 产生的声辐射，虚源的强度就是扩展反射系数。

3 计算结果

3.1 最小平方正交法求谐振频率的声散射

虽然积分方程法被广泛用于求解目标的散射和物体的辐射声场，但是当波数是目标内部 Dirichlet 问题的本征值时，将使积分方程在特征值及其邻域产生非唯一解，严重影响解的准确性。这些产生奇异解的特征值是目标内部问题本征函数的根，它反映了在目标内部形成驻波(谐振)，而驻波的节点刚好是在目标表面上。所以，在特征值处产生的非唯一解问题，并不能说明散射声场的任何物理意义。

根据 Schenck (1967) 提出的混合积分方程法，用目标内部声场约束表面声场；并用最小平方正交法求解，能有效地解决在谐振频率附近积分方程产生的非唯一解问题(徐海亭，1995)。

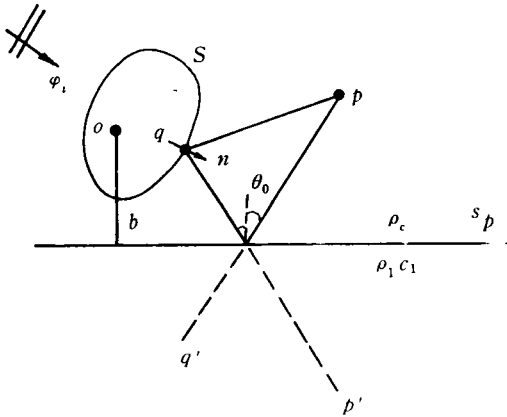


图1 二维半空间中目标的声散射
Fig.1 Sound scattering from a target in a two-dimensional half space

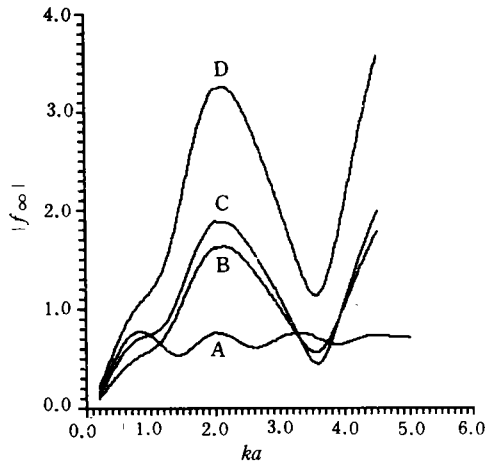


图2 圆柱声散射的形态函数($\theta_i=270^\circ$, $b=3a$)
Fig.2 Form function of sound scattering from a cylinder
A. 单柱自由场; B. 单柱自由场、对称平面波入射;
C. 阻抗界面附近; D. 刚性界面附近.

3.2 远场散射特性

当 $kr_{pq} \gg 1$, $r_{pq} \gg b$ (b 是目标离 s_p 的距离，见图 1)， $V(\theta) \approx v(\theta)$ ，Hankel 函数可以用渐近表达式表示，并把(8)，(13)式代入(5)式，求得：

$$\varphi_s(\infty) = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2ka}{\pi}} e^{i(kr - \frac{\pi}{4})} f_{s\infty} \tag{14}$$

$f_{s\infty}$ 是远场形态函数，它等于：

$$f_{s\infty} = f_{\infty} + f_{\infty}' \tag{15}$$

$$f_x = - \int_s [\varphi_s \cos(\theta - \theta_p) + \cos(\theta_i - \theta) \varphi_i + v(\theta) \cos(\theta'_i - \theta) \varphi'_i] e^{-ik a \cos(\theta - \theta_p)} ds$$

$$f'_x = - \int_s [\varphi_s \cos(\theta - \theta_p) + \cos(\theta_i - \theta) \varphi_i + v(\theta) \cos(\theta'_i - \theta) \varphi'_i] e^{-ik a \cos(\theta - \theta_p)} ds$$

f_x 是单柱目标 s 的形态函数; f'_x 是虚目标的形态函数; a 是柱半径; θ_i 是入射方向角; θ'_i 是与 θ_i 对称的入射方向角。由于入射波是双入射波, 因此得出, 对于刚性界面, 反射声场可能是单柱反射(图 2A)的 4 倍, 计算结果如图 2D 所示。由于目标和虚目标散射的相干作用, 形态函数表现极强的起伏特性。

如果不考虑虚目标的存在, 问题就变成了单个柱在对称平面波入射下的散射, 显然, 它的散射场是界面存在时散射大小的一半, 如图 2B 所示。

3.3 近场散射特性

当入射平面波的方向与界面 s_p 平行时, 即 k 的方向为 180° , 这种情况目标表面上的声场与在自由场中的表面场相同, 但是散射场则不同。对目标周围和 s_p 上的散射声的计算结果分别表示在图 3 和图 4 上, s_p 上声场的极大位置是 $x=2$, 这与图 3 散射的方向图相一致; 这个结果也类似于球的散射结果(Seybert, 1988)。

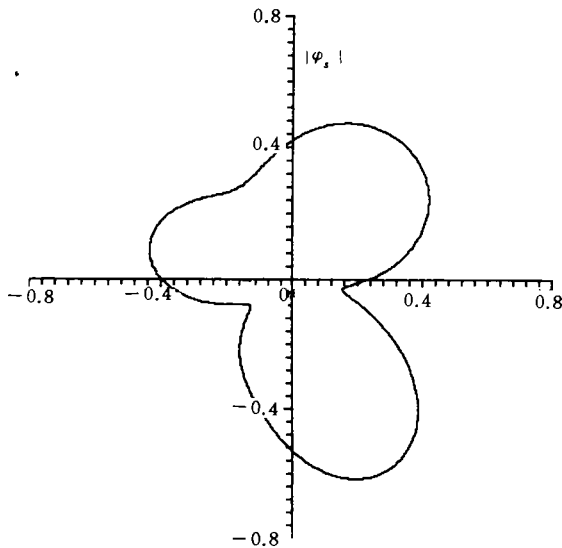


图3 界面附近柱散射的指向性
 $[r=3a, \theta_i=180^\circ (k=1, a=1, b=3a)]$

Fig.3 Scattering Directivity from a cylinder near a plane boundary

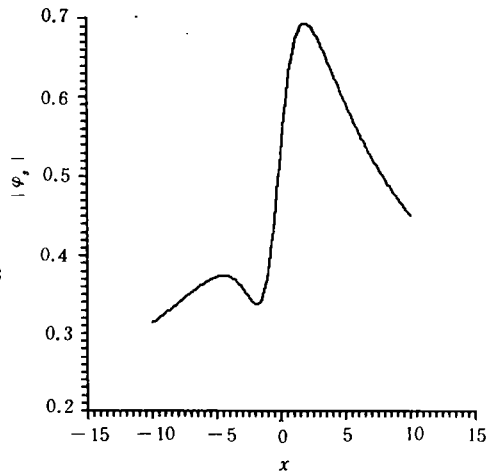


图4 s_p 上的散射声场
 $[\theta_i=180^\circ (k=1, a=1, b=3a)]$

Fig.4 Scattering sound on s_p

3.4 局部反应阻抗边界面

假定 s_p 是局部反应阻抗表面, 介质的阻抗与声波的人射角度无关, 反射系数 $v(\theta)$ (布列霍夫斯基赫, 1960) 表示为:

$$v(\theta) = \frac{\cos\theta - y}{\cos\theta + y} \quad (16)$$

式中, $y = \rho c / \rho_1 c_1$; θ 是波入射方向与表面垂直方向的夹角, 由于, $\cos\theta$ 和 y 都是大于零的量, 积分公式(11)的被积函数不会存在奇点。当 $\cos\theta_i = y$ 时, $v(\theta) = 0$, θ_i 是全透射角。假定由海水和泥沙海底组成的界面是局部反应表面, $y = 0.31$, $\theta_i = 72^\circ$; 图5给出了反射系数 $v(\theta)$ 和扩展反射系数 $V(\theta)$ 的计算结果, 可以看出, 在高频远场条件下, $V(\theta)$ 和 $v(\theta)$ 的绝对值相差不大。

对局部反应阻抗界面附近柱的远场反射特性的计算结果如图2C所示。在远场, 由于, $V(\theta) \approx v(\theta)$, 扩展反射系数是实数, 因此, 其远场反射特性与刚性边界界面附近目标的反射特性(图2D)相似。

在散射近场, 公式(11)中不满足 $kr \gg 1$, 所以不能用越过法求解; 同时, 在界面上产生的侧面波的影响也不能忽略。总之, 求虚源产生的声场比较复杂, 将在另外的文章中进行讨论。

4 结论

由于散射声场是散射面各面元散射效果的迭加, 应用声散射的积分公式求解存在界面时目标的散射问题是很方便的, 它适合求解任意几何形状目标在任意阻抗边界面存在时的散射声场。这里关键问题是先要求出在目标一侧的半无限空间的 Green 函数, 即半空间的响应函数。用扩展反射系数描述柱面波在平面上的反射和用虚目标的散射声场等效平面的散射作用, 使散射物理图象更加清晰。

参 考 文 献

- 布列霍夫斯基赫, 1956, 杨训仁译, 1960, 分层介质中的波, 科学出版社(北京), 188—230。
 徐海亭、涂哲民, 1995, 声学学报, 20(1): 26—32。
 Bertrand, J. C., Young, J. W., 1976, *J. Acoust. Soc. Am.*, 60(6): 1265—1269。
 Kristersson, G., Strom, S., 1978, *J. Acoust. Soc. Am.*, 64(3): 917—936。
 Schenck, H. A., 1967, *J. Acoust. Soc. Am.*, 44(1): 41—58。
 Seybert, A. F., Soenarko, B., 1988, *Transactions of the ASME*, 110(1): 112—117。
 Skudrzyk, E., 1971, *The Foundations of Acoustics*, Springer-Verlag (New York), pp. 651—616。

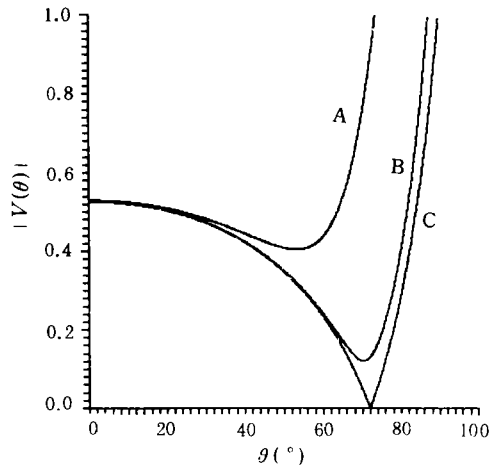


图5 局部反应阻抗边界的反射系数 $v(\theta)$ 和扩展反射系数 $V(\theta)$

Fig.5 Reflection coefficient $v(\theta)$ and extended reflection coefficient $V(\theta)$ on locally reacting surface

A. $|V(\theta)|$, $kr=3$; B. $|V(\theta)|$, $kr=20$; C. $v(\theta)$.

SOUND SCATTERING OF CYLINDRICAL WAVE FROM A TARGET NEAR A PLANE BOUNDARY SURFACE

Xu Haiting

(Qingdao Acoustics Laboratory, Chinese Academy of Sciences, Qingdao 266023)

Abstract The Boundary Helmholtz Integral Formula is developed to compute the field scattered from a cylinder near a plane boundary surface with varied impedance in this paper. The key problem is to derive the Green function. According to the definition of the Green function and the image principle of optics, the Green function G_h in a half space with boundary surface s is composed of two parts, $G_h = G + G'$, G is the direct sound field, G' depends on s and can be considered as the field of the image source symmetric about s . For a two-dimension half space, a cylindrical wave is expanded in superposition of plane waves by using the Fourier Transformation method, and Steepest Descent Method is used to find the reflection of the cylindrical wave. The extended reflective coefficient $V(\theta)$ representing the intensity of the image is defined to express the reflection of a cylindrical wave, $V(\theta) = v(\theta) - iv''(\theta) / 2kr$, where $v(\theta)$ is the reflection coefficient of a plane wave. The Green function in a two-dimension half space is $G_h(r) = G(r) + V(\theta) \cdot G(r')$.

As example, the scattering computations are made for a rigid long cylinder near a plane boundary surface. The results indicated that the fluctuation of the form function of the back scattering from the cylinder in a half space is stronger than that in a free field. Except the vertical incident on s , directivity of the scattering sound is not symmetry.

Key words Sound reflection Rigid cylinder Numerical method