第28卷 第3期 海 洋 与 湖 沼 Vol.28, No.3
1997 年 5 月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA May, 1997

不规则海洋重磁测网的调差*

范 守 志
(中国科学院海洋研究所，青岛 266071)

摘要 不规则测网是海洋重磁调查中的重要情况之一。本文建立了利用测网中实交点处交点差的资料确定各测线资料中含有的系统偏差的方程组，证明了此方程组有无穷多组数学解，但通解公式中仅含有一个任意常数，因而需要也只需要引进一个附加的控制条件就能有确定的解；还确定了线性控制条件应满足的数学条件，并依F取极小值的原则推导出一个可用的线性控制条件，从而为不规则测网的线调差提供一条途径。

关键词 不规则测网 交点差 线偏差 调差

不规则测网是测网中两组测线相交不齐全的情况，即主测线(或从测线)族中有一条或数条未能同时与所有的从测线(或主测线)都实际相交。这种测网在海洋重磁调查实践中常遇见。例如，由于某些测线的局部区段上资料缺失，在测网中进行了加密的短程测量，把两个测网资料合为一个测网，但这两个测网只在部分区域中相交——都会导致不规则测网。用卫星资料推算的重力资料补充海测资料时，也要处理一个不规则测网。

本文研究如下特点的不规则测网的调差方法：1. 测网由两组测线构成；2. 每条测线上的交点个数可以各不相同；3. 不存在与任何其它测线都不相交的"孤立"测线，也不存在孤立的(与测网其余部分都不相交的)测线组。国外采用的调差方法其实质是，在对一组资料进行调差时，以其它航次的资料为参考依据(Wessel et al., 1988; Neumann et al., 1993)。这无形中就假定了其它航次的测线资料中没有系统误差。显然，这假定本身就是一个问题。不规则测网的调差方法，需要认真的理论分析。本文系在规则测网的调差方法(黄谟涛，1990; 范守志，1996)的基础上，研究并解决了不规则测网调差的数学方法、解的结构、解的唯一性和控制条件等理论问题。

1 研究方法

采用误差理论和线性代数相结合的方式，建立并研究不规则测网的线偏差方程组。

2 研究结果

2.1 线偏差方程组 图1是不规则测网的模型。$K_1, K_2, \cdots K_m$代表m条主测线；$L_1, L_2, \cdots L_n$是n条从测线；实线表示实测部分；虚线表示未测部分(延长部分)。

如测线K_i与L_j实际相交，其交点C_{ij}为实交点，其上的交点差R_{ij}是有资料的；如C_{ij}是K_i及L_j延长线的交点，C_{ij}为虚交点，R_{ij}是未知的(没有资料)。对每个C_{ij}引进相交指数ω_{ij}，定义如下：

* "八五"国家科技攻关项目，85-904-01-03号。范守志，男，出生于1941年10月，研究员。
收稿日期：1995年6月20日，接受日期：1996年12月26日。

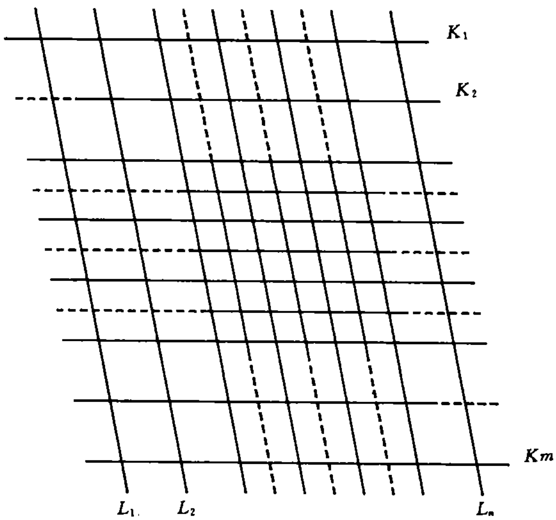

图1 不规则测网

Fig. 1 Irregular network

若 C_{ij} 是实交点，那么

$$\omega_{ij}=1 \tag{1}$$

若 C_{ij} 是虚交点，那么

$$\omega_{ij}=0 \tag{2}$$

主测线 K_1, K_2, $\cdots$ K_m 上实交点的个数各记为 N_1, N_2, $\cdots$, N_m; 从测线 L_1, L_2, $\cdots$ L_n 上实交点个数各记为 M_1, M_2, $\cdots$, M_n,那么

$$N_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{3}$$

$$M_j=\sum_{i=1}^{m}\omega_{ij}, \quad j=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

以及 $N_1+N_2+\cdots+N_m=M_1+M_2+\cdots+M_n=Z$, Z 是测网中实交点总数。对照(1)，(2)知，一般地，$Z\leqslant mn$。

规则测网是不规则测网的特殊情况，即所有的交点都是实交点，各 $\omega_{ji}=1$, $N_i=n$, $M_j=m$, $Z=mn$。

用 A_i 及 B_j 分别代表测线 K_i 及 L_j 资料中含有的系统误差；X_{ij} 及 Y_{ij} 分别代表沿测线 K_i 及 L_j 在其交点 C_{ij} 处已有的或缺失的测量值；用 Z_{ij} 代表 C_{ij} 处被测参数的真值，那么

$$X_{ij}=Z_{ij}+A_i+e_{ij}; \qquad Y_{ij}=Z_{ij}+B_j+f_{ij}$$

交点差是

$$R_{ij}=X_{ij}-Y_{ij}=A_i-B_j+g_{ij} \tag{5}$$

其中，e_{ij}, f_{ij} 及 g_{ij} 均表示随机误差分量。

用 P_i 代表任一 K_i 测线上 N_i 个实交点处交点差的总和，并利用(1)，(2)，(5)式，就有 $\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}R_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(A_i-B_j+g_{ij})=P_i$。依统计学原理，当 N_i 足够大时，偶然误差 g_{ij} 之和为零，再利用(3)，上式就变成:

$$N_iA_i-\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}B_j=P_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{6}$$

同样，记 L_j 测线上 M_j 个实交点差交点处之和为 Q_j，就有

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_{ij}A_i-M_jB_j=Q_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{7}$$

各 N_i, M_j, ω_{ij}, R_{ij}，P_i 及 Q_j 已知；A_i 及 B_j 即各测线的线偏差，待求。方程组(6)，(7)是不规则测网的线偏差方程组，求解这个方程组就可给出测网的调差方案。

2.2 线偏差方程组的数学解 方程组(6)，(7)中有 $m+n$ 个方程及未知数(各 A_i 及 B_j)，是形式上完整的线性非齐次代数方程组，似乎可用高斯消元法在计算机上求解。但它的系数行列式为零，不能这样求解。依 A_1, A_2, $\cdots$, B_1, B_2, $\cdots$, B_n 的顺序排列未知

数，系数行列式是：

$$D_0=\begin{vmatrix}
N_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\omega_{11} & -\omega_{12} & -\omega_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & -\omega_{1n} \\
0 & N_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\omega_{21} & -\omega_{22} & -\omega_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & -\omega_{2n} \\
0 & 0 & N_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\omega_{31} & -\omega_{32} & -\omega_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & -\omega_{3n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & N_m & -\omega_{m1} & -\omega_{m2} & -\omega_{m3} & \cdot & \cdot & \cdot & -\omega_{mn} \\
\omega_{11} & \omega_{21} & \omega_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{m1} & -M_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\omega_{12} & \omega_{22} & \omega_{32} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{m2} & 0 & -M_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\omega_{13} & \omega_{23} & \omega_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{m3} & 0 & 0 & -M_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\omega_{1n} & \omega_{2n} & \omega_{3n} & \cdot & \cdot & \cdot & \omega_{mn} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -M_n
\end{vmatrix}$$

在 D_0 中，各列都累加到某一列上时，这一列的各元素依式(3)及(4)可知全变成零，从而知

$$D_0=0 \tag{8}$$

这表明，线偏差方程组从数学上来讲或无解(矛盾方程组)或有无穷多组解(不完全方程组)。以下(9)—(12)式证明，线偏差方程组有无穷多组解，且只有一个自由变数。

用 S 代表测网中所有实交点上的交点差的总和，那么有

$$S=\sum_{i=1}^{m}P_i=\sum_{j=1}^{n}Q_j \tag{9}$$

首先累加(6)中的 m 个方程并利用式(4)和(9)，得到

$$\sum_{i=1}^{m}N_iA_i-\sum_{j=1}^{n}M_jB_j=S \tag{10}$$

再累加(7)中的 n 个方程，并利用(9)及(3)，也得到(10)。因而，方程组(6)，(7)中的任何一个方程均可由其余的 $m+n$ 个方程导出，即(6)，(7)中至少有一个是不独立的。于是可从中删去一个方程，例如最末一个($j=n$)，并把其余 $m+n-1$ 个方程改写为

$$N_iA_i-\sum_{j=1}^{n-1}\omega_{ij}B_j=P_i-\omega_{in}B_n \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_{ij}A_i-M_jB_j=Q_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

方程组(11)与线偏差方程组(6)，(7)同解，B_n 是一个自由变数。(11)的系数行列式 D 是 $m+n-1$ 阶的，可以证明(证明刊略)：只要不含有孤立测线及孤立的测线组，总有

$$D\neq 0 \tag{12}$$

这表明，线偏差方程组有无穷多组数学解，它含有一个自由变数：指定 B_n 为任何一个值后，都可由(11)解出相应的一组值 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m,\ B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_{n-1}$ 来。因而，(11)或

者(6)，(7)的通解是

$$(A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_n) = V + CU_0 \tag{13}$$

其中，$V=(v_1, v_2, \cdots, v_m, \cdots, v_{m+n})$是(6)，(7)的任何一个特解，$C$是任意常数，而$U_0=(1, 1, \cdots, 1, 1, \cdots, 1)$。

综上所述，对于一个具体的测网，为得到线调差的确定方案，需要也只需要引入一个附加条件(控制条件)与(11)或与(6)，(7)联立求解；或者，在(11)中先给B_n某值，例如$B_n=0$，求出一组解作为(13)中的V，再由控制条件定(13)中的C值。因此必须找到一个合适的控制条件。

2.3 控制条件应满足的数学要求 控制条件应能最终表达为一个数学方程，这个方程必须能与(6)及(7)构成有唯一解的线性方程组。控制条件如果是线性的，会有利于理论分析和计算机计算，因此需要研究什么样的线性条件能满足上述数学要求。

线性条件的一般型式是

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_mA_m + b_1B_1 + b_2B_2 + \cdots + b_nB_n = r \tag{14}$$

其中，$a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$和$r$均是常数(与诸$A_i$及$B_j$无关)。

删去(6)，(7)中的一个，例如最末一个方程，代之以(14)，得到$m+n$个方程构成的线性代数方程组；它有唯一确定解的充要条件就是它的系数行列式Δ不为零，而Δ与D_0的差别现在仅在最末一行。将Δ中各列都累加到Δ的第$m+n$列，这一列除去第$m+n$个元素变成了

$$\Omega = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \tag{15}$$

以外，其余的元素均为零。依这一列展开行列式Δ，就得到$\Delta=\Omega \cdot D$，其中的D正是方程组(11)的系数行列式。

由(12)式知D不等于零，因此线性条件(14)要能成为一个控制条件，必须也只需满足的数学条件就是：

$$\Omega \neq 0 \tag{16}$$

由(16)可知，在已有测网的基础上再引进任何的"补充测线"都不能生成新的控制条件。因为，无论它与测网中已有的测线如何相交，由这条补充线上的交点差资料建立的线偏差方程也是一个线性条件，但它的$\Omega=0$。

如果能建立一条"基准测线"与测网相交，就能产生一个满足(16)式的线性控制条件。所谓"基准测线"就是不含有系统误差的测线。用"基准测线"作为L_n，就有了一个控制条件

$$B_n = 0 \tag{17}$$

显然，对式(17)有$\Omega=1$，因而$\Delta\neq 0$。由于目前海洋重磁场调查技术不能提供这样的基准测线，因此不得不从理论上寻求控制条件。

2.4 测网线调差与测网精度改善的关系 现在证明，使测网精度有最大改善的要求，并依此要求选择诸A_i及B_j这一附加条件也不能作为控制条件。事实上，这一附加条件就是：选择诸A_i及B_j使得调整后测网中所有实交点差的平方和

$$W = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} (R_{ij} - A_i + B_j)^2 \tag{18}$$

取极小值，其中的 ω_{ij} 及 R_{ij} 是由(1)，(2)及(5)给定的值。这样有

$$\frac{\partial W}{\partial A_i}=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{19}$$

及

$$\frac{\partial W}{\partial B_j}=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{20}$$

但代入(18)式后，(19)就变成了(6)，而(20)就变成了式(7)。这就是说，(19)，(20)并没有为(6)，(7)带来新的条件。相反地，所述测网精度的改善与线调差问题归为同一个数学问题。这并不是偶然的，线偏差的存在降低了测网精度，线偏差值正是最大限度改善测网精度时需要确定并从测量数据中扣除的成分，改善资料质量(去除线偏差)与提高测网的精度指标(降低 W 值)是一致的。

满足使 W 最小的数学解有无穷多组解，式(13)表明任意两组解之间仅相差一个常数 C，因此任何一个解都给出 W 值相同的改善。从式(18)直接看出：所有的 A_i 及 B_j 同时改变一个常数 C 并不改变 W 的数值。因此，如果只想评定线调差后测网能达到的精度，可以任取(13)的一个解。为此只须任选一个符合条件(16)的条件(14)作为控制条件，例如(17)，求出一组数学解，由(18)式计算 W 值，进而计算精度指标：$E=\sqrt{\frac{W}{2Z}}$。

2.5　依据调差总量最小的原则建立的控制条件　原始观测资料经过各项归算、校正之后进行测网的调差时，调整总量最小是误差分配的一般原则。现在证明，根据这个原则能建立一个满足(16)式的线性控制条件。设计如下的目标函数 F 代表调差总量：

$$F=N_1A_1^2+N_2A_2^2+\cdots+N_mA_m^2+M_1B_1^2+M_2B_2^2+\cdots+M_nB_n^2 \tag{21}$$

依照条件极值的理论，线偏差方程组(11)的各种解中能使 F 取极小值的解，应是下列方程组与(11)相联立决定的解

$$\frac{\partial\varphi}{\partial A_i}=0\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{22}$$

及

$$\frac{\partial\varphi}{\partial B_j}=0\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ n) \tag{23}$$

这里，

$$\varphi=F+\lambda_1G_1+\lambda_2G_2+\cdots+\lambda_mG_m+\mu_1H_1+\mu_2H_2+\cdots+\mu_{n-1}H_{n-1} \tag{24}$$

其中，各 G_i 及 H_j 是把式(11)中等号右方的项全移到等号左方后在等号左方生成的表达式，而各 λ_i 及 μ_j 是待定系数。利用(21)，(24)，(11)及(22)式给出

$$2N_iA_i+\lambda_iN_i+\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j\omega_{ij}=0\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

累加这 m 个方程，并利用式(4)，就有：

$$2\sum_{i=1}^{m}N_iA_i+\sum_{i=1}^{m}\lambda_iN_i+\sum_{j=1}^{n-1}\mu_jM_j=0 \tag{25}$$

同样，由(21)，(24)，(11)及(23)式得到：

$$2M_jB_j-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\omega_{ij}-\mu_jM_j=0\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

及

$$2M_nB_n-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\omega_{in}=0,$$

累加这 n 个方程，并利用(3)式，就有

$$2\sum_{j=1}^{n}M_jB_j-\sum_{i=1}^{m}\lambda_iN_i-\sum_{j=1}^{n-1}\mu_jM_j=0 \tag{26}$$

再累加(25)和(26)就消去一切待定系数，得到只含诸 A_i 及 B_j 的方程

$$\sum_{i=1}^{m}N_iA_i+\sum_{j=1}^{n}M_jB_j=0 \tag{27}$$

这是一个满足条件(16)的线性控制条件，因为对它显然有

$$\Omega=\sum_{i=1}^{m}N_i+\sum_{j=1}^{n}M_j=2Z\neq 0$$

所以，F 取极小这一条件是可用的控制条件，并能表达为(27)，即各实交点处调差总量为零。由(27)与(11)联立就可产生测网调差所需的一组解(诸 A_i 及 B_j)。同时，规则测网作为不规则测网的特殊情况，(27)式的形式是：$n(A_1+A_2+\cdots+A_m)+m(B_1+B_2+\cdots+B_n)=0$，相应的特解可表达为简洁的公式(范守志，1996)。在不规则测网的情况下，需用高斯消元法对(11)和(27)式数值求解。

3 讨论与结论

3.1 对于不规则测网，只要测线上交点个数足够多，随机误差相互抵消，仍然可以利用测网中实测的交点差资料建立描述各测线的系统误差(线偏差)的方程组，并通过求解此方程组的途径进行测网线调差。

3.2 线偏差方程组有无穷多组数学解，通解式(13)中只含有一个任意常数，并且任何两组解之间的差等于常数。线偏差的存在降低了测网精度，线偏差方程组的任何一个解都给出测网精度的同等改善。

3.3 为了得到测网调差的具体方案，需要也只需要引进一个控制条件。如果这个控制条件是关于各线偏差的线性方程，那它需要也只需要满足的数学条件是(16)。任何补充的检查测线都不满足(16)，除非它是一条“基准测线”(即其系统差已知)。

3.4 调差总量最小(F 取极小值)的原则提供了一个满足条件(16)的线性控制条件(27)，可用来与线偏差方程组(11)联立产生测网调差的一个具体方案。

3.5 规则测网可视为不规则测网的特殊情况，只需令诸 $\omega_{ij}=1$。

3.6 什么是最合理的控制条件，这个问题仍有待进一步探索。

参 考 文 献

范守志，1996，海洋与湖沼，**27**(6)：569—575。
黄谟涛，1990，海洋通报，**9**(4)：81—86。
Neumann, G. et al., 1993, *Geophy. Res. Letters*, **20**(15): 1 639—1 642.
Wessel, P. and Watts, A., 1988, *J. G. R.*, **93**(B1): 393—413.

ADJUSTMENT OF IRREGULAR SURVEY NETWORK OF MARINE GRAVITY AND GEOMAGNETICS

Fan Shouzhi

(*Institute of Oceanology, Chinese Academy of Sciences, Qingdao* 266071)

Abstract Irregular network is of importance in marine gravity and geomagnetics surveyings. A group of survey lines K_1, K_2, $\cdots$, K_m crosses over another group of lines L_1, L_2, $\cdots$, L_n not completely, as seen in Fig. 1. To determine and remove the line offsets which are systematic errors in data of each line, and are denoted as A_1, A_2, $\cdots$, A_m, and B_1, B_2, $\cdots$, B_n, some theoretical results in this study are as ffollows. 1. Statistical principles were applied to set up an equation system, described by (6) and (7) in the paper, to determine the values of A' s and B' s by using the discrepancies at those real and known cross-over points in the network. 2. The equation system was proved to be identical to that set up by using the least-square method to adjust the network to get its best accuracy. 3. This equation system has an infinite number of mathematical solutions, with the difference in values between two solutions being a constant for every line, as described by formula (13). 4. It is also proved that one and only one additional control condition is needed for getting a definite solution for a specific network and that the control condition should satisfy the inequalify $\Omega \neq 0$ if it is a linear equation itself, as described by (14) and (15). 5. Further more, an "F-minimum requirement" is recommended, which can produce a linear control condition described by formula (27), and provides a useful way to carry out adjustment for any irregular network by combining (27) with (6) and (7) after deleting any one equation from (6) or (7).

Key words Irregular network Discrepancy Line offset Adjustment