风暴潮漫滩的半隐半显数值模式及其在珠江口的应用*

杜涛 方国洪

(中国科学院海洋研究所 青岛 266071)

提要 研究给出了风暴潮漫滩预报的一种半隐半显数值模式,并将其用于珠江口风暴潮漫滩的后报。该模式将风暴潮漫滩的控制方程进行半隐半显离散,使计算稳定性不受时间步长的限制;分别用共轭斜量加速 Jacobi 法和文中提出的简化算法求解差分方程以提高计算效率。数值模拟试验表明:该模式计算的沿岸风暴潮与天文潮耦合水位与实测水位值吻合较好,因而对漫滩位置、范围和持续时间的计算应是合理、准确的;因模式允许使用的时间步长比 ADI 模式允许使用的时间步长大数倍,所以计算量大大减少,漫滩预报时间显著缩短。

关键词 风暴潮漫滩 半隐半显数值模式 共轭斜量加速 Jacobi 法

学科分类号 P731

对风暴潮漫滩数值预报模式的改进,一般是从提高计算精度、减少计算时间这两方面进行。提高精度,除了采用高精度的差分格式或采用流场运动边界的运动学条件以实现岸界的连续移动(Johns, 1982)外,通常是通过缩小差分网格的格距以更好地拟合岸界来完成的。但随着网格距的减少,计算点迅速增加、计算量成倍增长,这对减少计算量显然不利。而要减少计算时间,就必须使用合理的计算方法,巧妙地构造出在大时间步长时仍然保持计算稳定、精度高,而且在每一时间步长内的计算量又不太大的数值模式。基于上述考虑,本文工作首次把在大时间步长时、具有较好计算稳定性和计算精度的半隐半显离散方法(Casulli, 1990)用于风暴潮漫滩控制方程的差分离散,用共轭斜量加速 Jacobi 法和文中提出的简化算法分别求解离散得出的差分方程,得到一种新的数值模式并把它用于珠江口风暴潮漫滩的后报。

1 数值模式

1.1 控制方程

鉴于风暴潮漫滩数值预报的范围通常是在近岸、小海区,水深较浅,而且主要是对水位进行预报,所以选用直角坐标下的平均流方程作为控制方程。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial (Hu)}{\partial x}+\frac{\partial (Hv)}{\partial y}=0 \tag{1}$$

* 国家八五攻关资助项目,85-903-03-02。杜涛,男,出生于 1963 年 2 月,博士。E-mail: xfang@l: b.ouqd.edu.cn

收稿日期: 1997-06-06, 收修改稿日期: 1997-12-16

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\tau_{sx}}{H}-\frac{ku(u^2+v^2)^{1/2}}{H}+A\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu=-g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\tau_{sy}}{H}-\frac{kv(u^2+v^2)^{1/2}}{H}+A\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{3}$$

式中，t为时间；ζ为由未扰动水面起算的水位；H为总水深$(h+\zeta)$； h为未扰动水深；u,v为风暴潮流沿x、y方向的分量从海底到海面的平均值； f为Corilos参量； k为底摩擦系数； g为重力加速度； τ_{sx}、τ_{sy}为风应力在x、y方向的分量； ρ为海水密度； A为侧向涡动粘性系数(本文取$10^7 \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$)。

1.2 差分方程

$i-1$		i		$i+1$	
+	−	+	−	+	$j+1$
×		×		×	$j+1/2$
+	−	+	−	+	j
×		×		×	$j-1/2$
+	−	+	−	+	$j-1$
	$i-1/2$		$i+1/2$		

图1 计算格点

Fig.1 Layout of grid points

+ ζ； − u； + v；

计算采用Arakawa–C网格，水位点在整数行列标号上，流速分量(u, v)在半行、半列上(图1)。用有限差分法离散上述方程组时，在空间步长上采用半隐半显的处理技巧。具体做法：(1)对动量方程中水位梯度项$g\partial\zeta/\partial x$, $g\partial\zeta/\partial y$和连续方程中的速度$u$、$v$作隐式处理以消除由于重力波给计算稳定性带来的对时间步长的限制；(2)对平流项作Eulerian–Lagrangian显式离散以消除对时间步长的Courant条件限制；(3)为了保证计算的稳定性，对底摩擦项中的u、v作隐式处理。而对其中的$\sqrt{\left(u^2_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2+\left(\bar{v}^{\,2}_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2}\Big/H^n_{i+\frac{1}{2},j}$和$\sqrt{\left(\bar{u}^{\,2}_{i,j+\frac{1}{2}}\right)^2+\left(v^2_{i,j+\frac{1}{2}}\right)^2}\Big/H^n_{i,j+\frac{1}{2}}$作显式处理，是为了保证离散后的方程是线性的；(4)对方程中的其它项作显式处理以保持计算的高效率。离散后方程为：

$$\begin{aligned}\zeta^{n+1}_{i,j}=\zeta^n_{i,j}&-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(H^n_{i+\frac{1}{2},j}u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}-H^n_{i-\frac{1}{2},j}u^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}\right)\\&-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(H^n_{i,j+\frac{1}{2}}v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}-H^n_{i,j-\frac{1}{2}}v^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

$$u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}=Fu^n_{i+\frac{1}{2},j}-g\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\zeta^{n+1}_{i+1,j}-\zeta^{n+1}_{i,j}\right)-\Delta t\times\gamma^n_{i+\frac{1}{2},j}\times u^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}+\Delta t\frac{(\tau_x)^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}}{\rho H^n_{i+\frac{1}{2},j}} \tag{5}$$

$$v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}=Fv^n_{i,j+\frac{1}{2}}-g\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\zeta^{n+1}_{i,j+1}-\zeta^{n+1}_{i,j}\right)-\Delta t\times\gamma^n_{i,j+\frac{1}{2}}\times v^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}+\Delta t\frac{(\tau_y)^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}}{\rho H^n_{i,j+\frac{1}{2}}} \tag{6}$$

式中，F是一个显式、非线性差分算子，它包括对平流项的空间Eulerian–Lagrangian显式离

散以及对科氏力和水平涡动粘性项的空间离散。

$$Fu^n_{i+\frac{1}{2},j} = u^n_{i+\frac{1}{2}-a,\,j-b} + \Delta t \times f \times \bar{v}^n_{i+\frac{1}{2}-a,\,j-b} + A \times \Delta t \times$$

$$\left(\frac{u^n_{i+\frac{3}{2}-a,\,j-b} - 2u^n_{i+\frac{1}{2}-a,\,j-b} + u^n_{i-\frac{1}{2}-a,\,j-b}}{\Delta x^2} + \frac{u^n_{i+\frac{1}{2}-a,\,j+1-b} - 2u^n_{i+\frac{1}{2}-a,\,j-b} + u^n_{i+\frac{1}{2}-a,\,j-1-b}}{\Delta y^2}\right);$$

$$Fv^n_{i,j+\frac{1}{2}} = v^n_{i-a,\,j+\frac{1}{2}-b} + \Delta t \times f \times \bar{u}^n_{i-a,\,j+\frac{1}{2}-b} + A \times \Delta t \times$$

$$\left(\frac{v^n_{i+1-a,\,j+\frac{1}{2}-b} - 2v^n_{i-a,\,j+\frac{1}{2}-b} + v^n_{i-1-a,\,j+\frac{1}{2}-b}}{\Delta x^2} + \frac{v^n_{i-a,\,j+\frac{3}{2}-b} - 2v^n_{i-a,\,j+\frac{1}{2}-b} + v^n_{i-a,\,j-\frac{1}{2}-b}}{\Delta y^2}\right);$$

$$H^n_{i\pm\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}\left[(h+\zeta^n)_{i,j} + (h+\zeta^n)_{i\pm1,j}\right];\quad H^n_{i,j\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[(h+\zeta^n)_{i,j} + (h+\zeta^n)_{i,j\pm1}\right];$$

$$\gamma^n_{i+\frac{1}{2},j} = k\sqrt{\left(u^2_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2 + \left(\bar{v}^2_{i+\frac{1}{2},j}\right)^2}\Big/ H^n_{i+\frac{1}{2},j};$$

$$\gamma^n_{i,j+\frac{1}{2}} = k\sqrt{\left(\bar{u}^2_{i,j+\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(v^2_{i,j+\frac{1}{2}}\right)^2}\Big/ H^n_{i,j+\frac{1}{2}};$$

$$\bar{u}^n_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(u^n_{i-\frac{1}{2},j+1} + u^n_{i+\frac{1}{2},j+1} + u^n_{i-\frac{1}{2},j} + u^n_{i+\frac{1}{2},j}\right);$$

$$\bar{v}^n_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{4}\left(v^n_{i,j+\frac{1}{2}} + v^n_{i,j-\frac{1}{2}} + v^n_{i+1,j+\frac{1}{2}} + v^n_{i+1,j-\frac{1}{2}}\right);$$

而 $a = u\Delta t / \Delta x$, $b = v\Delta t / \Delta y$，称为网格的 Courant 数。以 c 表示速度 $(u,\ v)$，则 $c^n_{i-a,\,j-b}$ 为 $n+1$ 时刻通过 $(i,\ j)$ 点的特征线上位于 $(i-a,\ j-b)$ 点的流点在 n 时刻的流速。令 $a = n + r$，$b = m + s$（n，m 为整数，$0 \le r < 1$，$0 \le s < 1$），则 $c^n_{i-a,\,j-b}$ 通过双线性差值求得：

$$c^n_{i-a,\,j-b} =$$

$$(1-r)\left[(1-s)c^n_{i-n,\,j-m} + s \times c^n_{i-n,\,j-m-1}\right] + r\left[(1-s)c^n_{i-n-1,\,j-m} + s \times c^n_{i-n-1,\,j-m-1}\right]$$

将式(5)和(6)带入(4)，可得到关于 $\zeta^{n+1}_{i,j}$ 的 5 点差分方程。

$$\zeta^{n+1}_{i,j}\left\{1 + g\left[\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(Hs^n_{i+\frac{1}{2},j} + Hs^n_{i-\frac{1}{2},j}\right) + \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\left(Hs^n_{i,j+\frac{1}{2}} + Hs^n_{i,j-\frac{1}{2}}\right)\right]\right\} - g\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}Hs^n_{i+\frac{1}{2},j}$$

$$\times \zeta^{n+1}_{i+1,j} - g\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} Hs^n_{i-\frac{1}{2},j}\zeta^{n+1}_{i-1,j} - g\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} Hs^n_{i,j+\frac{1}{2}}\zeta^{n+1}_{i,j+1} - g\frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} Hs^n_{i,j-\frac{1}{2}}\zeta^{n+1}_{i,j-1} = \zeta^n_{i,j}$$

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(Hs^n_{i+\frac{1}{2},j} Fu^n_{i+\frac{1}{2},j} - Hs^n_{i-\frac{1}{2},j} Fu^n_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{\Delta t}{\rho} Hs^n_{i+\frac{1}{2},j}\frac{(\tau_x)_{i+\frac{1}{2},j}}{H^n_{i+\frac{1}{2},j}} - \frac{\Delta t}{\rho} Hs^n_{i-\frac{1}{2},j}\frac{(\tau_x)_{i-\frac{1}{2},j}}{H^n_{i-\frac{1}{2},j}}\right)$$

$$-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(Hs^n_{i,j+\frac{1}{2}} Fv^n_{i,j+\frac{1}{2}} - Hs^n_{i,j-\frac{1}{2}} Fv^n_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho} Hs^n_{i,j+\frac{1}{2}}\frac{(\tau_y)_{i,j+\frac{1}{2}}}{H^n_{i,j+\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta t}{\rho} Hs^n_{i,j-\frac{1}{2}}\frac{(\tau_y)_{i,j-\frac{1}{2}}}{H^n_{i,j-\frac{1}{2}}}\right) \quad (7)$$

式中，$Hs^n_{i\pm\frac{1}{2},j} = H^n_{i\pm\frac{1}{2},j}\Big/\left(1 + \Delta t \times \gamma^n_{i\pm\frac{1}{2},j}\right)$；$Hs^n_{i,j\pm\frac{1}{2}} = H^n_{i,j\pm\frac{1}{2}}\Big/\left(1 + \Delta t \times \gamma^n_{i,j\pm\frac{1}{2}}\right)$。该方程组的系数矩阵是严格对角占优的对称阵，用共轭斜量加速 Jacobi 法求解，可使用较大的时间步长，从而减少计算量，提高求解效率。

1.3 共轭斜量加速 Jacobi(CGAJ)法

若线性方程组为 $Ax = b$，用 CGAJ 法求解的步骤是：(1)任取初始向量 $x^{(0)}$； (2)由 Jacobi 迭代公式 $x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + f_J$ 求得 $x^{(1)}$，其中 Jacobi 迭代矩阵 $B_J = I_n - D^{-1}A$; (3)令 $\delta^{(k)} = B_J x^{(k)} + f_J - x^{(k)}$为伪残余向量； (4)$x^{(k+1)} = \omega_{k+1}\{\xi_{k+1}\delta^{(k)} + x^{(k)}\} + (1-\omega_{k+1})x^{(k-1)}$

$$\xi_{k+1} = \frac{1}{1 - \dfrac{\delta^{(k)T} W^T WB\delta^{(k)}}{\delta^{(k)T} W^T W\delta^{(k)}}}; \quad \omega_{k+1} = \frac{1}{1 - \dfrac{\delta^{(k)T} W^T W\delta^{(k)}\xi_{k+1}}{\delta^{(k-1)T} W^T W\delta^{(k-1)}\xi_k\omega_k}};$$

$$\omega_1 = 1; \quad k = 1, 2, \cdots\cdots$$

$W = D^{\frac{1}{2}}$是使 $W(I_n - B)W^{-1}$为对称正定矩阵的可对称化矩阵，D 是 A 的对角部分。

1.4 解差分方程的简化算法

在对控制方程组(1)—(3)的离散过程中，由于对动量方程中的水位梯度项和连续方程中的速度所作的全隐式离散会产生附加阻尼，使计算的水位等随着波的传播而衰减。为避免这种情况可采用 Crank–Nicolson隐格式将它们离散，然后再用 CGAJ 法求解1)。数值试验表明：CGAJ 法允许使用较大的时间步长，在上述全隐离散和 C–N离散的情况下，取$\Delta t = 1800$s 时计算结果与实测值吻合的较好；但随着时间步长的不断增大，每一步迭代收敛的时间也会增加，而且Δt过大也会影响计算结果的精度。所以，计算效率并不是随着Δt的增加而持续提高。在保证计算结果的精度和计算效率大致相同的情况下，若要避免直接求解复杂的 5 点差分方程，可使用下面的简化算法：(1)假定开边界上给出的是水位ζ值，且 n 时刻的ζ，u，v 场已知，在 $n+1$ 时刻，$j = 1$ 行的水位$\zeta^{n+1}_{i,1}$由开边界条件给出；

1) 杜涛，1997，中国科学院海洋研究所博士论文

(2)以 n 时刻 $j=3$ 行的水位 $\zeta^{n}_{i,3}$ 代替 $n+1$ 时刻 $j=3$ 行的水位 $\zeta^{n+1}_{i,3}$，得到以 $n+1$ 时刻 $j=2$ 行的 $\zeta^{n+1}_{i,2}$ 为未知数的一组三对角方程，由此解出 $\zeta^{n+1}_{i,2}$ 的近似值并记为 $\tilde{\zeta}^{n+1}_{i,2}$。这样逐行替代、求解，可得到所有 $\zeta^{n+1}_{i,j}$ 的近似值 $\tilde{\zeta}^{n+1}_{i,j}$；(3)重复步骤(2)，每次用上一次求出的 $\tilde{\zeta}^{n+1}_{i,j+1}$ 代替 $\zeta^{n+1}_{i,j+1}$，经过 1—2 次迭代就可得到对 $\zeta^{n+1}_{i,j}$ 比较满意的近似。显然，也可逐列或逐行、列交替进行上述 (2)，(3)。

1.5　漫滩判别准则

假设 n 时刻的水位场和流速场已知，求 $n+1$ 时刻的水位场和流速场时，首先检查各漫滩边界点是否发生漫滩，即先判断下列不等式是否成立。

(i)　若 $(\zeta^{n}_{i-1,j}+h_{i-1,j}) \le \varepsilon$；但 $H^{n}_{i,j} > \varepsilon$；$(\zeta^{n}_{i,j}+h_{i-1,j}) > \varepsilon$

(ii)　若 $(\zeta^{n}_{i+1,j}+h_{i+1,j}) \le \varepsilon$；但 $H^{n}_{i,j} > \varepsilon$；$(\zeta^{n}_{i,j}+h_{i+1,j}) > \varepsilon$

满足(i)海水向左漫滩，计算 $\zeta^{n+1}_{i-1,j}$。满足(ii)海水向右漫滩，计算 $\zeta^{n+1}_{i+1,j}$。同理，可写出海水向其它两个方向漫滩的判别式(丁文兰等，1995)。ε 为一大于零的小量(本文取 5cm)。

2　珠江口风暴潮漫滩的数值计算

鉴于珠江口海区的地形，采用外海大海区内套近岸小海区的计算模型。大海区范围取 19°—24°N，110°—118°E，模式分辨率为 0.125°×0.125°，通过大海区的计算得到小海区开边界风暴潮逐时水位。小海区范围 21°45′—22°48′N，113°15′—114°15′E，模式分辨率为 1′×1′，由小海区计算得到风暴潮漫滩的位置、范围以及持续时间等情况。有关大海区的数值模式和小海区的边界条件、风场模型等(丁文兰等，1995)，这里不再叙述。图 2 给出了计算所用台风的路径、小海区计算网格和可能的漫滩范围。

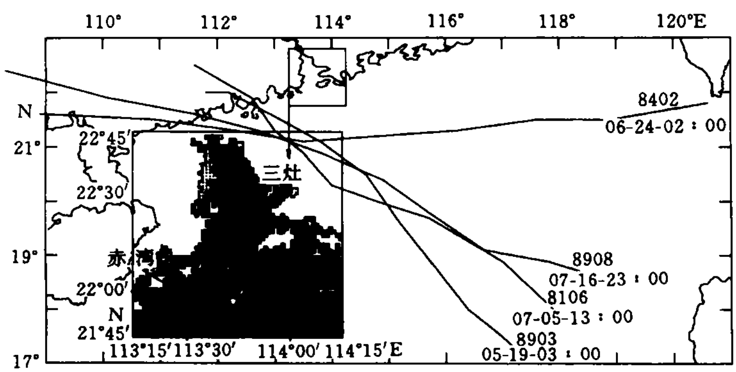

图 2　台风路径与计算网格

Fig.2　Typhoon tracks and computational grid

由于珠江口沿岸风暴潮漫滩资料的缺乏，无法直接验证漫滩计算的正确性。为此选取沿岸有观测资料的 4 次台风过程，分别用共轭斜量加速 Jacobi 法求解($\Delta t=1800$s)和上面提出的简化算法求解($\Delta t=600$s)，将得到的总水位(风暴潮＋天文潮)与计算海区内观测站的实测值进行比较(图 3 给出了两次台风过程的比较结果)，可以看出，尽管由于全隐式离散产生的阻尼使得由式(7)计算的岸边水位比实测值(赤湾)略低，但总的来说两种算法的计算结果都与实测值吻合的较好。据此，可以认为本模式所作的风暴潮漫滩计算是合理、可信的。8908 号台风是一次强台风，它对珠江口海区的影响较大。图 4 给出了 8908

号台风在赤湾站的水位达最大时的漫滩情况。

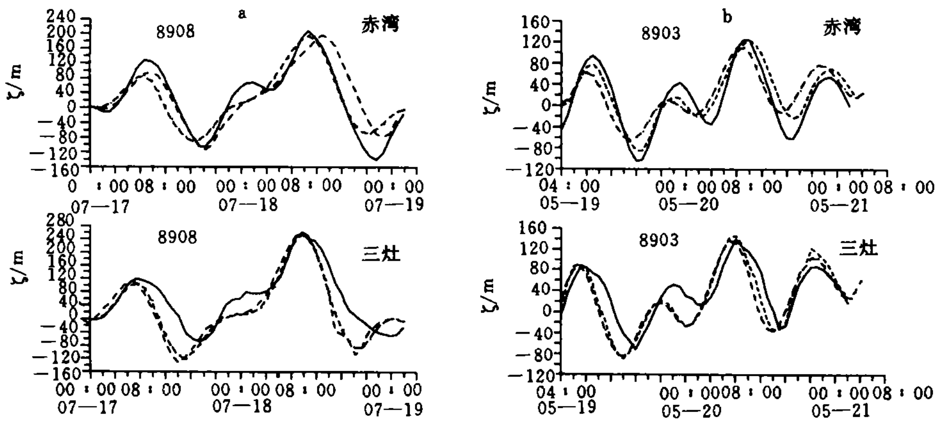

图 3 赤湾和三灶(2 次台风过程)风暴潮与天文潮耦合水位模拟

Fig.3 Simulation of total sea level(tide plus storm surge) at Chiwan and Sanzao for two typhoon events

a) 8908 号台风; b) 8903 号台风

——实测值; - - -计算值(简化算法); - • -计算值(CGAJ 法)

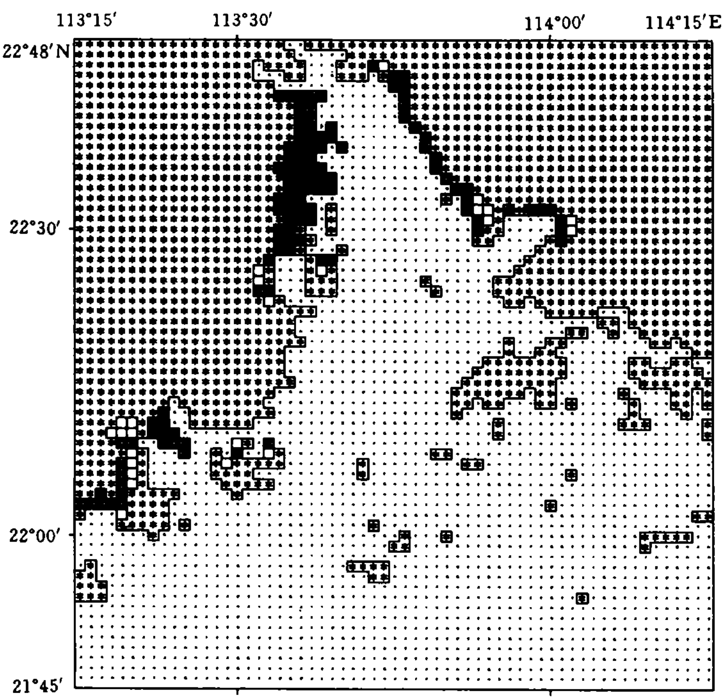

图 4 8910 号台风最大漫滩区域

Fig.4 The largest inundation area for typhoon No.8908

* 陆地; • 水域; ⊞ 漫滩

3 结语

本文给出了风暴潮漫滩的一种半隐半显数值模式以及用共轭斜量加速 Jacobi 法和一种简化算法求解差分方程的步骤，对珠江口海区的风暴潮漫滩进行了后报。通过数值试验得到结论：(1)由于该模式对沿岸风暴潮水位变化的预报精度较好，因而对风暴潮漫滩位置、范围和持续时间的计算是客观、真实的。(2)对控制方程组的半隐半显离散以及求解差分方程的两种方法，对提高模式在较大时间步长范围内的计算稳定性、计算精度和计算效率是非常有效的。(3)该模式的时间步长($\Delta t = 1800s$, $\Delta t = 600s$)比 ADI 模式(丁文兰等，1995)的时间步长($\Delta t = 144s$)和 CFL 条件($\Delta t = 89s$)大数倍，从而使计算量大大减少，这对缩短风暴潮漫滩的预报时间非常有利。(4)改进模式中漫滩的判别条件使漫滩边界实现连续推移，可使模式的预报更接近实际。

参　考　文　献

丁文兰　杜涛　王新怡等，1995．珠江口海区海水漫滩数值预报的研究．高科技研究中的数值计算．长沙：国防科技大学出版社．245—250

Casulli V., 1990, Semi-implicit finite difference methods for the two-dimensional shallow-water equation. Jour. of computational physics, 86:56—74

Johns B., 1982, The simulation of a continuously deforming lateral boundary in problems involving the shallow water equation. Computer and fluid, 10(2):105—116

SEMI-IMPLICIT NUMERICAL MODEL FOR STORM SURGE INUNDATION WITH APPLICATION TO THE ZHUJIANG (PEARL) RIVER ESTUARY

DU Tao FANG Guo-hong

(*Institute of Oceanology, The Chinese Academy of Sciences, Qingdao*, 266071)

Abstract A semi-implicit numerical model for simulating and predicting storm inundation in coastal area is proposed and a simplified algorithm for the model's finite difference equation and conjugate accelerate Jacobian method are described. The model uses depth-averaged governing equation which were discretized with a semi-implicit technique in such a way that the stability of the method does not depend upon the wave celerity. In this model the gradient of water surface elevation in the momentum equations and the velocity divergence in the continuity equation were discretized implicitly, but all the other terms are discretized explicitly while an Eulerian-Lagragian approach is applied to the explicit discretization of the convective terms in the momentum equations in order to eliminate the stability restriction and to reduce some artificial viscosity by simply discretizing them explicitly. The application of the simplified algorithm improves further the computational efficiency of the model.

The model, its simplified algorithm and the conjugate gradiant accelerate Jacobian method are applied to simulate and hindcast the storm surge inundation in the Zhujiang (Pearl) River Estuary. Comparison between the model's computational results of the coupled water surface level (storm surge and tides) in 2 typhoon procedures and observations shows that the model is reliable and efficient and the computation for the storm surge inundation is reasonable and accurate.

Key words Storm surge inundation Semi-implicit numerical model Conjugate gradient accelerating jacobi method

Subject classification number P731