

驱动非线性浅水波的行波特征研究*

侯一筠 尹宝树 谢强 杨联贵 郑全安†

(中国科学院海洋研究所 青岛 266071)

†(美国特拉华大学 纽瓦克)

提要 采用带有外界强迫效应的浅水动力学模式研究非线性波动,获得了依赖于外界输入形式的驱动水波的行波解。研究表明,驱动水波仍具有非线性波动的一般性质,而当外界强迫波速与水波固有速度一致时,水波出现共振效应。并且外界强迫孤立子将导致驱动水波孤立子产生。

关键词 驱动 非线性浅水波 孤立波

学科分类号 P731.22

非线性波的研究是流体力学中十分活跃的研究领域之一。由于各种渐近方法的引入,在这方面已取得了一系列重要的研究成果(Debnath, 1994)。浅水波在实际应用中的重要性,也引起了人们的极大关注,如 Boussinesq 方程和孤立波(梅强中, 1984)的导出等。但是,这些研究多限于自由波方面,对于驱动水波或带有外界强迫效应的现象研究甚少。本文研究了带有驱动项的非线性浅水方程组。通过一个简单的模式,采用类似于 Phillips (1977)关于短波的问题的研究方法,求得了驱动非线性水波的特解,论述了孤立波具有跨介质传播的特征。

1 模式的建立

在浅水或静压意义下,描写自由波的控制方程可表示为(Whitham, 1974)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(H + \eta)] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中, t 是时间; x 为水平坐标; u 为流体质点速度; η 为波面位移; H 为水深; g 为重力加速度。

若略去式(1)中非线性项,则可导出没有频散效应的长波运动方程,即典型的双曲型方程: $\frac{\partial^2 (u)}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 (u)}{\partial x^2}$, 其中, $C = \sqrt{gH}$ 通常称为典型波速,也是常水深自由波的固有速度。

* 国家自然科学基金资助项目, 49476276号; 中国科学院九五重点项目, KZ952-SI-420号。侯一筠, 男, 出生于1956年11月, 博士导师, 研究员, E-mail: yjhou@ms.qdio.ac.cn

收稿日期: 1997-09-25, 收修改稿日期: 1998-06-09

为研究非线性模式的行波解,令 $u = u(\xi), \eta = \eta(\xi), \xi = k(x - ct)$, 其中 k 为波数; c 为波速, 代入式 (1), 得: $(-c + u)u' + g\eta' = 0$, 其中 “'” 表示对 ξ 求导。从行列式:

$$\begin{vmatrix} -c + u & g \\ H + \eta & -c + u \end{vmatrix} \neq 0, \text{推知 } u' = 0, \eta' = 0. \text{ 因此, 除了 } u = \text{const. 和 } \eta = \text{const. 这一平}$$

凡情形外, 不存在任何其它形式的定形波解。产生这一现象的物理根源为: 式 (1) 为没有频散效应的双曲型方程组, 非线性项的存在将使波峰变陡, 最终破碎 (Stoker, 1957; Tian *et al*, 1994)。事实上, 在气体动力学里, 方程组 (1) 已被用来解释激波的形成 (Whitham, 1974)。因此, 为使方程组的定形波解存在, 必须引进其它动力学效应。例如, 若引进旋转效应, 就是描述非线性惯性重力波的方程组 (Pedlosky, 1987), 而引进动压效应, 则是浅水的 Boussinesq 理论。在本文的研究中, 当式 (1) 中引进外界强迫效应时, 就成为驱动水波问题。

在方程组 (1) 中引进外界强迫效应后, 变为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau}{\rho(H + \eta)} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(H + \eta)] = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中, ρ 为水密度; τ 为外界强迫力。当 $\tau \neq 0$ 时, 表明水波为受外源驱动的系统。

对于一般的 $\tau(x, t)$, 求 (2) 式的解析解极为困难。为此, 可参照 Phillips 关于短波问题的处理方法, 取 $\tau(x, t) = \tau [k(x - ct)]$, 即把外界强迫力取为某种行波系统, 以此来研究驱动非线性水波的特解。首先, 将方程组 (2) 无量纲化, 令 $x^* = kx, t^* = kct, \eta^* = \frac{\eta}{A}, u^* =$

$\frac{u}{U}, \tau^* = \frac{\tau}{\Pi}$, 式中, 带 “*” 号的量是无因次量, 而 A, U 和 Π 分别表示振幅、速度和外源强迫力的特征尺度。将上述无因次量代入方程 (2), 去掉 “*” 号, 有

$$\begin{cases} kcU \frac{\partial u}{\partial t} + kU^2 u \frac{\partial u}{\partial x} = -gAk \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\Pi}{\rho H} \frac{\tau}{(1 + \varepsilon \eta)} \\ kcA \frac{\partial \eta}{\partial t} + UHk \frac{\partial}{\partial x} [u(1 + \varepsilon \eta)] = 0 \end{cases}$$

此处, $\varepsilon = A / H$ 为水波的非线性控制参数。由第一式的后两项同量级可定出 $\Pi = \rho AkgH$,

而由第二式的两项同量级可定出 $U = Ac / H$ 。因此, 同浅水自由波一样, 驱动水波仍具有三种独立的长度尺度, 即波幅 A 、波长 $2\pi / k$ 和水深 H 。所不同的是, 这里的波幅和波长取决于外源强迫, 它们和强迫波速 c 一起, 决定了驱动水波的基本特征。

无量纲的驱动水波控制方程为:

$$\begin{cases} \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\tau}{(1 + \varepsilon \eta)} \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(1 + \varepsilon \eta)] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\lambda = \frac{c^2}{gH} = \frac{c^2}{C^2}$ 为强迫波速与水波固有速度之比的平方。

2 驱动非线性浅水波的行波特解

为研究方程组(3)中行波解, 令 $u = u(\xi)$, $\eta = \eta(\xi)$, 这里的无量纲 ξ 为 $x - t$, 代入(3)中, 有

$$\begin{cases} \lambda(-u' + \varepsilon u u') = -\eta' + \frac{\tau}{1 + \varepsilon\eta} \\ -\eta' + [u(1 + \varepsilon\eta)]' = 0 \end{cases} \quad (4)$$

将(4)式之第二式积分一次, 取积分常数为零, 导得: $u = \frac{\eta}{1 + \varepsilon\eta}$, $u' = \frac{\eta'}{(1 + \varepsilon\eta)^2}$,

将两式代入(4)式之第一式, 可导得:

$$\left[1 + \varepsilon\eta - \frac{\lambda}{(1 + \varepsilon\eta)^2} \right] \eta' = \tau \quad (5)$$

两边对 ξ 积分, 有:

$$\eta + \frac{\varepsilon}{2} \eta^2 - \frac{\lambda\eta}{1 + \varepsilon\eta} = F \quad (6)$$

其中, $F = \int \tau d\xi$, 表示外界强迫力势。

把(6)式稍加变换可导得关于 η 的三次代数方程

$$\frac{\varepsilon^3}{2} \eta^3 + \frac{3}{2} \varepsilon\eta^2 + (1 - \lambda - F\varepsilon)\eta - F = 0 \quad (7)$$

由于三次代数方程必有实根, 故对任何形式的外界强迫, (7)式的实解总是存在的, 即驱动水波问题总是有解的。另外, 若输入 F 关于 ξ 是周期的, 则驱动水波亦有周期解。

在 η 的求解上, 为了避免复杂的根式计算, 可以针对 ε 为小参量这一特点, 对(7)式求渐近解。为此, 令

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + O(\varepsilon^3) + \dots \quad (8)$$

代入(7)式, 得: ε^0 阶: $(1 - \lambda)\eta_0 - F = 0$; ε^1 阶: $\frac{3}{2}\eta_0^2 + (1 - \lambda)\eta_1 - F\eta_0 = 0$; ε^2 阶: $\frac{1}{2}\eta_0^3 +$

$3\eta_0\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2 - F\eta_1 = 0$; 解得:

$$\begin{cases} \eta_0 = \frac{F}{1 - \lambda} \\ \eta_1 = -\frac{1 + 2\lambda}{2(1 - \lambda)^3} F^2 \\ \eta_2 = \frac{4\lambda^2 + 5\lambda}{2(1 - \lambda)^5} F^3 \end{cases} \quad (9)$$

因此, 在准确至 ε^2 阶时, 可导出

$$\eta = \frac{F}{1 - \lambda} - \frac{1 + 2\lambda}{2(1 - \lambda)^3} \varepsilon F^2 + \frac{4\lambda^2 + 5\lambda}{2(1 - \lambda)^5} \varepsilon^2 F^3 \quad (10)$$

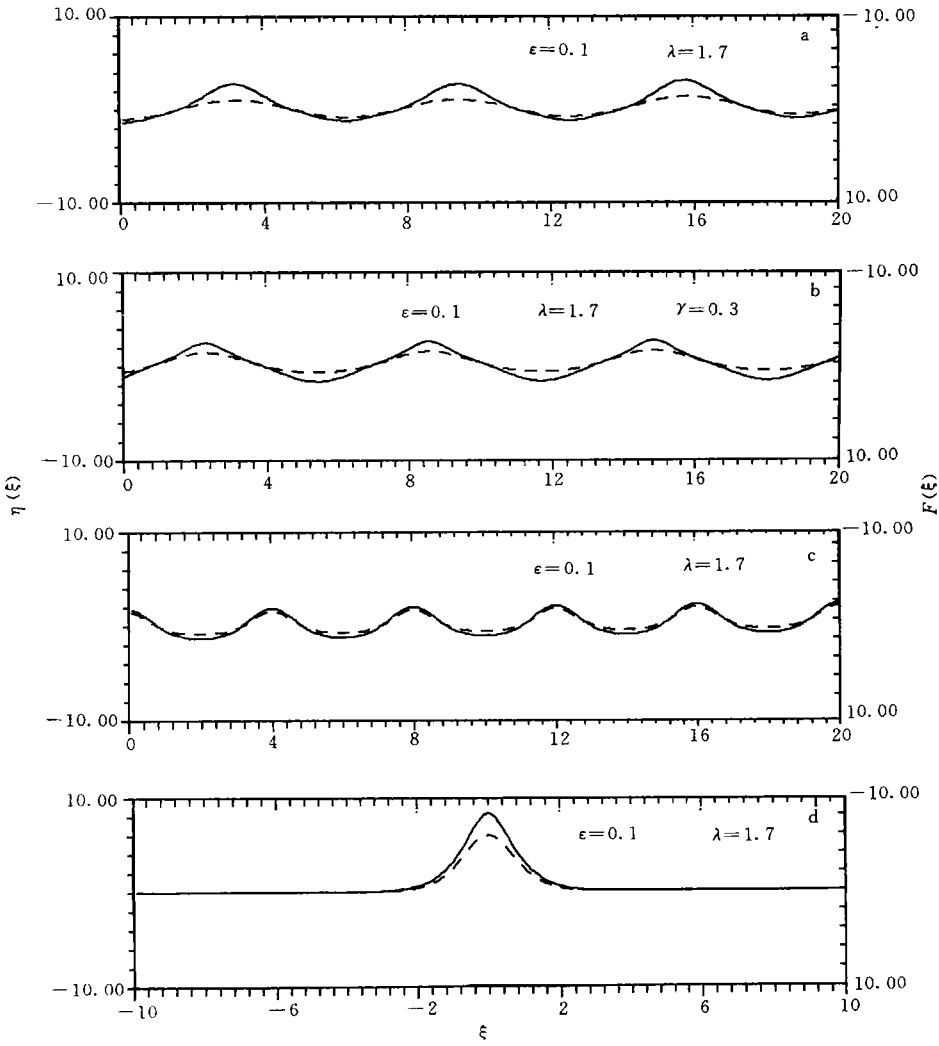


图1 输入简谐函数(a)、分式简谐函数(b)、椭圆余弦函数(c)、双曲函数(d)时的输出结果
 Fig.1 The result of inputting harmonic function (a), fractional harmonic function

(b), elliptic function (c), hyperbolic function (d)

(虚线 F 代表输入, 实线 η 代表输出)

图 1a: $F = \cos \xi$, 简谐函数, 表明外界输入为小振幅波; 图 1b: $F = \frac{\cos \xi}{1 - \gamma \cos \xi}$, 分式简谐函数, 表明

外界输入为有限振幅波(侯一筠, 1994); 图 1c: $F = \text{cn}^2 \xi$, 椭圆余弦函数, 表示外界输入亦为有限振

幅波(梅强中, 1984); 图 1d: $F = \text{sech}^2 \xi$, 双曲函数, 表明外界输入为孤立波(梅强中, 1984)

(10)式即为驱动非线性浅水波的行波解。它主要取决于外界输入的形式(图 1a—d)。

3 结果与讨论

不同于自由水波, 当外界输入为行波系统时, 驱动非线性水波将具有行波形式的解, 该解主要取决于外界强迫波的形式。而且从渐近解(10)式中可以得出如下结论:

3.1 波解的主部 [(10)式中第一项]保留了外界输入的形式。但是当 $\lambda \rightarrow 1$ 时, 波解趋于无

穷。表明当外界波速与水波固有速度趋于一致时, 驱动水波将产生共振效应, 这与传统的水波共振原理相符。

3.2 当 $\lambda > 1$ 时, 波解主部与外界输入符号相反, 表明当外界波速大于水波固有速度时, 驱动水波存在着位相延迟。例如, 当输入为 $\cos \xi$ 时, 输出比例于 $-\cos \xi = \cos(\xi + \pi)$, 由于 ε 为小参数, 故无论是(7)式或(10)式的波解, 以上两性质基本保留。

3.3 同其它非线性波动现象一样, ε 高阶项的存在, 将导致驱动水波出现倍频效应。即类似于 Stokes 波的分波展开, 即使输入为简谐波时, 输出亦是如此。例如, $\cos^2 \xi$ 中的 $\cos 2\xi$ 。

3.4 当输入为分式简谐函数或椭圆函数这两种有限振幅波时, 驱动水波仍然保持着波峰陡峭, 波谷平坦的非线性特性(梅强中, 1984)。

3.5 若外界强迫为孤立波时, 驱动水波亦是孤立波形式。特别是当 $\lambda > 1$ 时, 输入上凸孤立子, 输出为下凹孤立子; 而输入下凹孤立子, 输出为上凸孤立子。人们早就发现(Whitham, 1974), 当两个孤立波发生碰撞后, 仍然以孤立波的形式继续传播, 且保持形状不变。本文的结果则论证了孤立波具有跨介质传播的特征。其形状除了根据外界强迫波数与水波固有波速的相对比值有放大或缩小甚至颠倒的趋势外, 还由非线性项的存在有些微小的改变。

参 考 文 献

侯一筠, 李 炜, 1994. 深水非线性重力波. 中国科学, 24(5): 547—555

梅强中, 1984. 水波动力学. 北京: 科学出版社, 285—287

Debnath L, 1994. Nonlinear Water Wave. Boston, Sandiego: Academic Press, 1—488

Pedlosky J, 1987. Geophysical Fluid Dynamics. New York: Academic Press, 60—140

Phillips O M, 1977. Dynamics of the Upper Ocean. 2nd ed. London: Cambridge University Press, 107—117

Stoker J J, 1957. Water Waves. New York: Interscience Publishers Inc, 1—567

Tian Jiwei, Li Hongyan, Zhang Fagao, 1994. The study of long-wave breaking. Chin J Oceanol Limnol, 12(2): 136—143

Whitham G B, 1974. Linear and Nonlinear Waves. New York: John Wiley & Sons Inc, 157—162

TRAVELING WAVE CHARACTERISTIC STUDY OF DRIVEN NONLINEAR SHALLOW WATER WAVE

HOU Yi-jun, YIN Bao-shu, XIE Qiang, YANG Lian-gui, ZHENG Quan-an[†]

(*Institute of Oceanology, The Chinese Academy of Sciences, Qingdao, 266071*)

[†](*The University of Delaware, USA, Newark*)

Abstract Adopting a shallow water dynamical model with external forcing effects to study nonlinear water waves, a traveling wave solution of driven water wave depending on external input form has been found. The results demonstrate that if the external wave speed is larger than the internal one of water waves, then phase tardiness for driven water wave will happen; if the two approach similarity, the resonance effect will occur. Analogous to Stokes, cnoidal waves and so on, then the driven water wave still maintains its nonlinear properties with regard to wave crest steepness, wave trough flatness and expansion of double frequency waves. If the external force is a solitary wave, then the driven water wave also has the form of a solitary wave. In particular, if the external wave speed is larger than the internal one of the water wave, and the input is compression soliton, then output is expansion soliton; in the same way, if the input is expansion soliton, then output is compression soliton.

Key words Driven Nonlinear shallow water wave Solitary wave

Subject classification number P731.22