第 32 卷 第 3 期 海 洋 与 湖 沼 Vol. 32, No. 3
2 0 0 1 年 5 月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA May, 2001

二阶 Boussinesq 方程的孤立波解*

林建国 邱大洪-

(大连海事大学海洋环境工程学院 大连 116026)

-(大连理工大学海岸与近海工程国家重点实验室 大连 116024)

提要 基于同量阶迭代法, 在保留同阶项的前提下, 对林建国等(1998a) 得到的二阶 Boussinesq 类方程进行求解, 得到了与其量阶相对应的孤立波解, 并将其与 Euler 方程的二阶孤立波解进行了比较, 结果显示, 本文解比传统 Boussinesq 方程的孤立波解有明显的改善, 扩大了孤立波的适用范围。

关键词 非线性, 二阶 Boussinesq 方程, 孤立波

中图分类号 P731

传统 Boussinesq 方程由于其方程形式简单, 且包含了非线性及色散性的影响而被广泛地应用于波浪研究之中, 林建国(1995)[1)]对此问题做过详尽的综述。用传统 Boussinesq 方程解决问题的最大好处在于可以将三维问题转换为二维问题求解, 降低了求解难度, 减少了大量的计算时间。但由于该方程所包含的非线性及色散性均为最低量阶的 $O(\alpha, \beta^2)$ (其中, $\alpha = A/h_0$, $\beta = h_0/L$, A 特征波高, L 特征波长, h_0 特征水深), 这也就限制了该方程进一步向更广泛的范围应用。近十几年来, 人们一直在努力改善 Boussinesq 方程的线性色散关系(LDR), 以扩展其应用范围。Witting(1984)、Madsen 等(1991, 1992)、Nwogu(1993) 等使方程 LDR 的精度达到 $O(\beta^4)$, Schaffer 等(1995)、张永刚等(1997)、林建国等(1998b) 使方程 LDR 的精度达到 $O(\beta^8)$。这些工作均是在仅保留 $O(\alpha, \beta^2)$ 项的方程中, 加入含有待定常数、量阶为 $O(\beta^4)$ 的项, 通过与精确 LDR 的比较, 确定待定常数。但如此得到的方程, 并不能从数学上严格证明其色散项的量阶高于 $O(\beta^2)$。

邹志利(1997)、林建国等(1998a) 分别得到了保留至二阶非线性项 $O(\alpha^2, \alpha\beta^2)$ 及二阶色散项 $O(\beta^4)$ 的方程。林建国等(1998c) 又在忽略 $O(\alpha^2, \alpha\beta^2)$ 及其以上高阶非线性项的基础上, 经严格的数学推导, 得到常水深情况下, 保留一阶非线性 $O(\alpha)$、四阶色散项 $O(\beta^8)$ 的 Boussinesq 类方程, 并将方程中的色散项均由与 $O(\beta^2)$ 同阶的项表示。这使所得到的方程形式与林建国等(1998b)、Schaffer 等(1995) 的改善型方程一致。由此, 从理论上证明了改善型方程对色散项精度的提高, 阐明了此类方程对色散项所保留的量阶为

* 国家自然科学基金资助项目, 59839330 号。林建国, 出生于 1960 年 9 月, 博士, 教授, E-mail: linjg@mail.dlptt.ln.cn

1) 林建国, 1995. 波动力学的流面理论、Boussinesq 类方程及其浮体波动问题的求解. 博士学位论文, 上海交通大学

收稿日期: 1999-03-15, 收修改稿日期: 2000-01-30

$O(\beta^8)$，而并非是改善型方程推导之初的假设为 $O(\beta^2)$。林建国[1)] 进而又得到了非线性为一阶、色散性为任意阶的方程。

孤立波是波动力学中的典型现象, 其结果可由许多波动方程得到。一阶非线性、四阶色散性方程的孤立波解已由林建国等(1997) 得到。Wei 等(1995) 在仅保留 $O(\alpha, \beta^2)$ 项的前提下, 得到了 Nwogu(1993) 改善型方程的孤立波解。Teng(1997) 得到了传统 Boussinesq 方程的精确孤立波解, 但因为传统 Boussinesq 方程的量阶为 $O(\alpha, \beta^2)$，故其精确解的适用范围仍然是 $O(\alpha, \beta^2)$。Laitone(1960) 直接对 Euler 方程求解, 得到了保留二阶非线性项的孤立波解, 侯一筠等(1999) 采用浅水动力学模式研究非线性波, 结果表明, 外界强迫孤立子将导致驱动水波孤立波解产生。本文对林建国等(1998a) 得到的二阶 Boussinesq 类方程进行求解, 得到了与其量阶相对应的孤立波解, 这不仅丰富了海洋波动学的理论, 也为数值求解二阶方程提供了精确的初边值条件。通过比较可知, 本文解与 Laitone (1960) 解在二阶的范围内保持一致。

1　方程求解

由林建国等(1998a) 的方程可得常水深、无量纲的二阶 Boussinesq 类方程如下:

$$\zeta_{,t} + ((1+\alpha\zeta)U)_{,x} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} U_{,t} + \alpha U U_{,x} + \zeta_{,x} = {} & \frac{\beta^2}{3}U_{,txx} + \alpha\beta^2\left(U_{,tx}\zeta_{,x} + \frac{2}{3}\zeta U_{,txx}\right) + \\ & \frac{\beta^2}{15}(U_{,txx} + 6\alpha U U_{,xxx} - 2\alpha U_{,x}U_{,xx} + \zeta_{,xxx}) \end{aligned} \tag{2}$$

式中, $O(\alpha) = O(\beta^2)$; ζ 为波面高度; U 为水深平均速度; 下标的逗号代表对其后的符号 t 或 x 求偏导。

令:

$$\xi = x - C \cdot t \tag{3}$$

其中, C 是波速, 其具体表达式待定。

(1)、(2)式对 ξ 积分一次, 考虑到 $\xi \to \infty$ 时, $\zeta(\xi)$, $U(\xi)$ 均等于零, 得:

$$\zeta = \frac{U}{C - \alpha U} \tag{4}$$

$$-CU + \frac{\alpha}{2}U^2 + \zeta + \frac{\beta^2}{3}CU_{,\xi\xi} = f_1 \tag{5}$$

其中,
$$f_1 = \frac{\beta^2}{15}\{[(6U - 10C\zeta)\alpha - C]U_{,\xi\xi} + \zeta_{,\xi\xi}\} - \frac{\alpha\beta^2}{30}(5C^2 + 8)(U_{,\xi})^2 \tag{6}$$

将(4)式代入(5)、(6)式, 得:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{9}{2}C^2 - 1\right)\alpha^2 U^3 + \frac{C}{2}\left(4 - 7C^2\right)\alpha U^2 + C^2(C^2 - 1)U + \frac{\beta^2 C^2}{15}(1 - 6C^2)U_{,\xi\xi} \\ & = \frac{\beta^2}{30}\alpha C(5C^2 - 2)(C^2 + 2)(U_{,\xi})^2 + \frac{\beta^2}{15}\alpha C(1 - 14C^2)UU_{,\xi\xi} \end{aligned} \tag{7}$$

(7)式乘 U、乘 $U_{,\xi}$ 后积分, 分别得到:

$$\beta^2 UU_{,\xi\xi} = -\left[\frac{15\alpha(4 - 7C^2)}{2C(1 - 6C^2)}U^3 + 15\frac{C^2 - 1}{1 - 6C^2}U^2\right] + O(\alpha^2, \alpha\beta^2) \tag{8}$$

$$\beta^2 U(U_{,\xi})^2 = -\left[\frac{5\alpha(4 - 7C^2)}{C(1 - 6C^2)}U^3 + 15\frac{C^2 - 1}{1 - 6C^2}U^2\right] + O(\alpha^2, \alpha\beta^2) \tag{9}$$

1) 林建国, 1998. 基于流面理论的高阶 Boussinesq 类方程研究. 博士后研究报告, 大连理工大学

将(8)、(9)式代入(7)式后, 乘 $U_{,\xi}$、积分, 考虑到 $\xi\to\infty$时, $U(\xi)$等于零, 并忽略 $O(\alpha^3, \alpha^2\beta^2)$项, 得:

$$b_1 U^4 - b_2 U^3 + U^2 = b_3 (U_{,\xi})^2 \tag{10}$$

其中,

$$b_1 = \frac{\alpha^2}{12}\frac{(10+66C^2-96C^4+35C^6)}{C^2(6C^2-1)(C^2-1)}$$

$$b_2 = \frac{\alpha}{3}\frac{(6-13C^2+17C^4+5C^6)}{C(6C^2-1)(C^2-1)} \tag{11}$$

$$b_3 = \frac{\beta^2}{15}\frac{(6C^2-1)}{(C^2-1)}$$

设: $C = 1 + \frac{\alpha}{2} + C_2(\alpha)\cdot\alpha^2$ (12)

其中, 二阶波速 $C_2(\alpha)$ 待求。将(12)式代入(11)式, 忽略高阶项, 得:

$$b_1 = \frac{\alpha}{4};\quad b_2 = 1 + \frac{\alpha}{5}\left(\frac{9}{4} - 10C_2(\alpha)\right);\quad b_3 = \frac{\beta^2}{15\alpha}\left[5 - \left(10C_2(\alpha) - \frac{19}{4}\right)\alpha\right] \tag{13}$$

(10)式的解为: $U(\xi) = \dfrac{4C_0\exp(-\xi/\sqrt{b_3})}{(b_2 + C_0\exp(-\xi/\sqrt{b_3}))^2 - 4b_1}$ (14)

其中的积分常数 C_0 由 $U(0) = U_0$ 确定如下:

$$C_0 = \begin{cases} \dfrac{-1}{2U_0}(2U_0b_2 - 4 + \sqrt{1 - U_0b_2 + U_0^2b_1}) \\ \dfrac{-1}{2U_0}(2U_0b_2 - 4 - \sqrt{1 - U_0b_2 + U_0^2b_1}) \end{cases} \tag{15}$$

当 $\xi = 0$ 时, $\zeta(0) = 1$, $\frac{d}{d\xi}\zeta(0) = 0$, 由(4)式可得:

$$U_0 = \frac{C}{1+\alpha} \tag{16}$$

$$\frac{d}{d\xi}U(0) = 0 \tag{17}$$

将(17)式代入(14)式, 得: $1 - U_0b_2 + U_0^2b_1 = 0$ (18)

由(18)式知, (15)式的积分常数为: $C_0 = \frac{2}{U_0} - b_2$ (19)

将(12)、(13)、(16)式代入(18)式, 得:

$$C_2(\alpha) = \frac{4\alpha^3 - \alpha^2 + (1+\alpha)(\sqrt{1600 - 880\alpha^2 + 320\alpha^3 + 81\alpha^4} - 40)}{10\alpha^2(8 + 8\alpha + \alpha^2)} \tag{20}$$

表面看, (20)式在 $\alpha = 0$ 似乎有奇性, 但将其以泰勒级数形式展开为:

$$C_2(\alpha) = -\frac{3}{20} + \frac{9}{80}\alpha - \frac{1}{20}\alpha^2 + O(\alpha^3) \tag{21}$$

可知, (20)式即使在 $\alpha = 0$ 也是解析的。

至此, 得到了完整的孤立波解(14)和(15)式, 在无量纲参数 α 已知的情况下, 其计算步骤如下。

(1) 将(20)式代入(12)式, 便得到波速 C。

(2) 由(11)式得到 b_1、b_2、b_3。

(3) 由(16)式得到 U_0, 由(19)式得到积分常数 C_0。

(4) 由(14)式计算水深平均速度 U。

(5) 由(14)式计算水深平均速度 U。

2　分析和讨论

Laitone(1960) 由 Euler 方程得到的二阶无量纲孤立波解为:

$$\zeta = S^2\left(1 - \frac{3}{4}\alpha T^2\right) \quad S = \operatorname{sec}h(k\xi) \quad T = \tanh(k\xi)$$
$$C = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{20}\alpha^2 \quad k = \frac{\sqrt{3\alpha}}{2\beta}\left(1 - \frac{5}{8}\alpha\right) \tag{22}$$

其中的无量纲化与本文一致。

由(21)、(12)式可知, 在仅保留二阶的前提下, 本文得到的波速与(22)式完全一致, 这验证了本文解的正确。

传统 Boussinesq 方程(只保留(2)式右端第一项)的近似孤立波解为:

$$\zeta = \operatorname{sec}h^2\left(\frac{\sqrt{3\alpha}}{2\beta}\xi\right) \qquad C = 1 + \frac{\alpha}{2} \tag{23}$$

Teng(1997)给出了传统 Boussinesq 方程的精确孤立波解, 其波速的表达式为:

$$C = \sqrt{\frac{6(1+\alpha)^2}{\alpha^2(3+2\alpha)}[(1+\alpha)\ln(1+\alpha) - \alpha]} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{5}{24}\alpha^2 + O(\alpha^3) \tag{24}$$

由(22)式知道, 正确的二阶项系数应是 $-3/20$, 而 Teng(1997)得到的却是 $-5/24$, 显然是错的。原因是, 传统 Boussinesq 方程本身的非线性只有一阶精度, 即使得到的解是精确地满足传统 Boussinesq 方程, 其适用范围也只能在 $O(\alpha)$ 的量阶内, 而其二阶项不可能正确。也就是说, Teng(1997)的精确解的适用范围与(23)式是一样的, 在 $O(\alpha)$ 的量阶内, (23)式却比它简单得多。

本文得到的孤立波解是完整地保留了二阶非线性, 因此, 在二阶的范围内, 与 Laitone

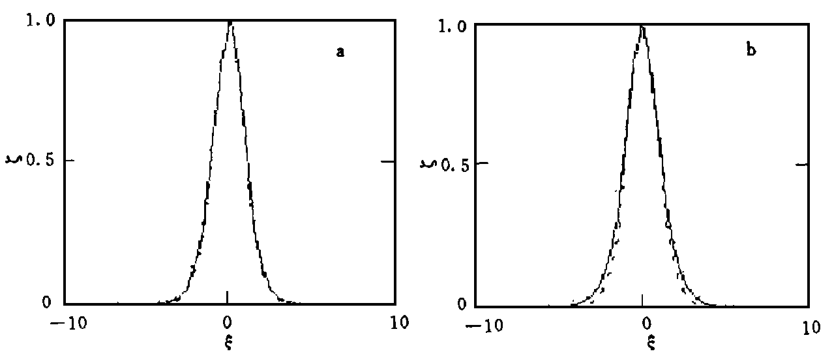

图 1　结果比较

Fig. 1　The comparison of results

a. $\alpha = 0.1$, $\beta = \sqrt{0.1}$; b. $\alpha = 0.5$, $\beta = \sqrt{0.5}$

——本文解; – – – 一阶解(23)式; ……Laitone 解(22)式

(1960)的解一致。

由图 1 可见, 在 α 较小时, 三者吻合得很好; 在 α 较大时, 一阶解(23)式与 Laitone 解(22)式的差别加大, 误差的量阶是$O(\alpha^2)$; 本文解与 Laitone 解(22)式的差别体现为$O(\alpha^3)$的量阶。

3 结语

本文基于同量阶迭代法, 在保留同阶项的前提下, 得到了二阶 Boussinesq 方程的孤立波解, 当非线性参数较大时, 本文的二阶孤立波解比传统 Boussinesq 方程的孤立波解有明显的改善, 从而扩大了孤立波的适用范围。另外, 本文结果也丰富了海洋波动学的理论内容, 为数值求解高精度海洋波动问题提供了精确的初边值条件。

参 考 文 献

林建国, 邱大洪, 1998a. 二阶非线性与色散性的 Boussinesq类方程. 中国科学(E 辑), 28(6): 567—573

林建国, 邱大洪, 邹志利, 1998b. 新型 Boussinesq 方程的进一步改善. 海洋学报, 20(2): 113—119

林建国, 邱大洪, 1998c. 一阶非线性项、四阶色散项的 Boussinesq 类方程. 力学学报, 30(5): 531—539

林建国, 邱大洪, 1997. 一阶非线性项、四阶色散项 Boussinesq 类方程的孤立波解. 大连理工大学学报, 37(4): 490—494

张永刚, 李玉成, 1997. 促进其频散特征的另一种形式的 Boussinesq 方程. 力学学报, 29(2): 142—150

邹志利, 1997. 高阶 Boussinesq水波方程. 中国科学(E 辑), 27(5): 460—473

侯一筠, 尹宝树, 谢 强等, 1999. 驱动非线性浅水波的行波特征研究. 海洋与湖沼, 30(4): 397—401

Fenton J, 1972. A ninth-order solution for the solitary wave. J Fluid Mech, 53: 257—271

Laitone E V, 1960. The second approximation to cnoidal and solitary waves. J Fluid Mech, 9: 430—444

Madsen P A, Murray R, Sorensen O R, 1991. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Coastal Eng, 15: 371—388

Madsen P A, Murray R, Sorensen O R, 1992. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2, a slowly varying bathymetry. Coastal Eng, 18: 183—205

Nwogu O, 1993. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. J of Waterway Port Coastal and Ocean Eng, 119: 618—638

Schaffer H A, Madsen P A, 1995. Further enhancements of Boussinesq-type equations. Coastal Eng, 26: 1—14

Teng M T, 1997. Solitary wave solution to Boussinesq equations. J of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering, 23(3): 138—140

Witting J M, 1984. A unified model for the evolution of nonlinear water waves. J Comput Phys, 56: 203—236

Wei Ge. James T Kirby, 1995. Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. J of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering, 121(5): 251—260

SOLITARY WAVE SOLUTION TO SECOND-ORDER BOUSSINESQ EQUATIONS

LIN Jian-Guo, QIU Da-Hong*

(Institute of Marine Environment, Dalian Maritime University, Dalian, 116026)

* *(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology Dalian, 116024)*

Abstract Based on the method of iteration with the same order, the solitary wave solution to Boussinesq equations with the second-order nonlinear and dispersive terms has been obtained in this paper. A comparison with the second-order solitary wave solution to Euler equations shows that the solution obtained in the present paper is the more reasonable than the solitary wave solution to the traditional Boussinesq equations. The results of the present paper extend the applicable range of the solitary wave, enrich the theory of the marine wave-dynamics, and provide the exact initial-boundary conditions for solving numerically the second-order Boussinesq equations.

Key words Nonlinear, Second-order Boussinesq equations, Solitary wave