

Gerris 在海洋大振幅内孤立波数值模拟中的应用*

曾侃 李恒宇

(中国海洋大学 海洋遥感研究所 青岛 266003)

摘要 本文运用基于自适应网格的流体动力学开源软件 Gerris, 来建立基于 Boussinesq 近似下的二维不可压缩 Euler 方程组的数值模型, 以模拟不同层化条件下稳定状态的完全非线性大振幅内孤立波。文中比较了完全非线性的用 Gerris 实现的 Euler 模型与弱非线性的 KdV 理论模型在刻画大振幅内孤立波结构及特征参数上的差异, 说明在模拟大振幅内孤立波时, 高阶非线性不应忽略。Euler 模型模拟结果表明, 完全非线性大振幅内孤立波的等密度面半宽度随深度变化, 这使得基于 KdV 方程解析解、利用卫星 SAR(Synthetic Aperture Radar)图像提取内孤立波极值间距来反演内波振幅的可行性存疑, 需要重新评估。此外, 本文用两组实测数据验证了用 Gerris 实现的 Euler 模型模拟大振幅内波的有效性。

关键词 大振幅内孤立波; 数值模拟; Euler 模型; Gerris

中图分类号 P731.24 **doi:** 10.11693/hyhz20181200283

海洋内波是密度层化海水内部的一种波动现象。由于内波的恢复力是由层化海水密度差导致的约化重力, 相比于作为海表面波恢复力的重力而言, 只有其千分之一的量级, 所以海洋内波的振幅比海浪大得多而其直接引起的海表面起伏却几乎为零。例如, Osborne 等(1980)在安达曼海观测到振幅约 60m 的内孤立波; Tessler 等(2012)在苏禄海观测到振幅约 40m 的内孤立波; Xie 等(2013)在比斯开湾观测到振幅约 40—70m 的内孤立波; Klymak 等(2006)及 Lien 等(2014)在南海观测到约为 170m 振幅的内孤立波。

海洋内波几乎不引起海表起伏的特性使其难以通过现场观测手段发现和定位, 而卫星遥感观测, 尤其是卫星合成孔径雷达(Synthetic Aperture Radar, SAR)观测, 可以获得清晰反映内波特征的图像, 便于发现和定位内波(孙丽娜等, 2018)。正是遥感观测帮助人们建立起了全球海域内波分布的清晰图景, 让人们意识到海洋内波在世界海域范围内的普遍存在(Jackson, 2004)。在 SAR 图像上看到的内波通常是

内孤立波或者内孤立子。尽管存在多种内孤立波的生成机制, 但目前普遍认为内孤立波主要由正压潮与地形(如海峡, 海山等)的相互作用产生的内潮波在传播过程中逐渐裂变而成(方欣华等, 2005; 王金虎等, 2016)。

从遥感获得的内波图像特征来获得内波的垂直特征却并不直接。基于内波孤立波的非线性理论, 内孤立波的半宽度与振幅存在某种函数关系。这依赖于对内波动力学特征的准确描述(Zheng *et al.*, 2001; Zhang *et al.*, 2016)。

在内波理论方面, 最简单的是在弱非线性弱频散假设下的 KdV 方程, 它能很好地描述浅水分层流体中的小振幅内波。根据上下两层水厚度的不同情况, 该方程被推广到了无限深海的 Benjamin-Ono 方程(Benjamin, 1967; Ono, 1975)和有限深海的 Joseph 方程(Joseph, 1977)。受制于弱非线性假设的约束, 上述 KdV 类方程不适于描述大振幅内波。在 KdV 基础上引入三阶非线性项的 eKdV 方程使得这一情况有所改

* 中国空间技术研究院基金项目, 501-01-2014-0225 号。曾侃, 副教授, E-mail: zengkan@ouc.edu.cn
收稿日期: 2018-12-02, 收修改稿日期: 2019-03-17

善, 它可以描述实际海洋中观测到的波形变宽且有一个平底波谷的情况, 且在振幅的适用范围上比 KdV 更大(Helfrich *et al.*, 2006)。进一步, Miyata(1988)提出了完全非线性的 Miyata 方程, 可以描述大振幅内波, 但其频散项依然只有一阶, 所以只适于描述长波, 且只能用于两层流体。在数值计算方面, 主要分为两类。一类为直接数值求解内孤立波理论方程, 如 Liu 等(1998)运用变系数 KdV 方程来数值计算南海和东海海域的内波从深水向浅水传播过程中的结构变化; 蔡树群等(2001)基于规则化长波(RLW)方程, 来探讨南海北部内波的结构特征和演变; 张善武等(2015)运用变系数 eKdV 方程数值求解中国南海大振幅内孤立波的振幅和波宽等特征参数。另一类基于 N-S(Navier-Stokes)方程组、Euler 方程组的全域离散化网格进行计算, 如 Vlasenko 等(2000)基于 Euler 方程组探讨了稳态大振幅内孤立波的结构; Zhang 等(2014)基于 Euler 方程利用有限体积法建立了一个适应水深变化的二维内波数值模式, 并在等深水域求解等密度线随时间变化的数值解; Shen 等(2006)基于 N-S 方程组建立内波二维数值模型, 并进行内波速度场分析, 从而根据 SAR 成像原理来成像仿真等。Stastna 等(2002)用从 Euler 方程组推导的描述完全非线性内波的 DJL(Dubreil-Jacotin-Long)方程讨论了在非均匀背景流场下浅水层化海洋中内孤立波振幅的上限; Preusse 等(2012)也用 DJL 方程研究了不同背景层化下内孤立波振幅的上限以及内波破碎机制。鉴于 DJL 的完全非线性属性, 本文将之也归到第二类中。

由于内波 KdV 理论模型及其变种是基于各种不同的假设条件下简化导出, 在定量模拟实际海洋的内波时存在较大误差, 所以当以模拟现实作为需求时, 采用基于 N-S 方程组、Euler 方程组或 DJL 方程进行的数值模拟更为可靠, 可以获得实测连续海水层化条件下的完全非线性内孤立波解。然而数值模拟的主要问题是计算量大, 计算时间长。为了准确反映海洋中的密度层化, 层化区的网格必须足够密集。若采用均匀网格, 必然导致大计算量。在内波模拟中, 数值模型为降低计算量, 常在不同的维度设定不同的分辨率(Vlasenko *et al.*, 2000, 2002, 2010; Du *et al.*, 2008; Zhang *et al.*, 2014)。而本文采用的 Gerris 软件可通过自适应网格来降低模型的计算量。Gerris 根据涡度、密度梯度等物理量在模型运行期间动态调节局部网格尺寸, 在保证二阶计算精度的前提下加快计算速度。实验表明, 用 Gerris 实现的 Euler 模型获得一

次稳定内孤立波解的时间约 7min, 从而可以当做一个方便的完全非线性连续层化内孤立波计算工具。

基于 KdV 理论模型从 SAR 图像提取的内孤立波半宽度反演的振幅常常被低估甚至严重低估。采用连续层化的 KdV 模型比两层模型有一定改善(曾侃, 2002)。更进一步的改善是采用高阶非线性方程(Xue *et al.*, 2013)。然而 Euler 模型的模拟结果表明除了内波半宽度与振幅的关系不同外, 内波半宽度还随水层深度增加而增大, 而非 KdV 理论模型所述那样上下一致, 因此基于从 SAR 图像上提取的内波在海表面的半宽度再利用 KdV 理论模型或其变种反演内波振幅的方法存在缺陷。

本文按如下方式组织: 第一节介绍用 Gerris 实现的用于内孤立波数值模拟的二维 Euler 模型的基本特征以及进行内波数值模拟的参数设置方法; 第二节讨论了用 Gerris 实现的 Euler 数值模型与用 KdV 模型获得的大振幅内孤立波的结构差异; 第三节用现场的内孤立波观测数据对 Gerris 实现的 Euler 模型的有效性进行验证; 第四节总结了研究结果并讨论了其对 SAR 内波振幅反演的意义。为简化表述, 下文将“Gerris 实现的 Euler 数值模型”简称为“Euler 模型”。

1 模型与实验设置

1.1 模型与软件介绍

本文采用的 Euler 数值模型是用新西兰水文和大气国家研究所 Stephen 博士开发的流体动力学开源软件 Gerris 建立的。Gerris 是一个基于二叉树(三维是八叉树)动态自适应网格的偏微分方程组求解框架。

动态自适应网格技术是一种根据流场实际情况通过动态调整局部网格尺寸来减小计算量的技术。其基本原理是以一个或者多个物理量为判断准则, 动态决定网格是加密还是稀化(王亮等, 2015), 这可以在保证计算精度的同时有效提高计算速度。在流体力学数值模式应用中常采用涡度作为网格自适应控制的判断准则:

$$\frac{|\nabla \times U| \Delta}{\max(|U|)} > \varepsilon, \quad (1)$$

其中, Δ 为网格尺度, U 为水质点的速度矢量, ε 为自定义的阈值($0 < \varepsilon < 1$)。当速度矢量满足公式(1)时, 网格进行加密, 反之, 网格稀化。在本文的内波模拟实验中, 还将密度梯度也作为一个判断准则。当同时定义了多个判断准则时, 其中任何一个准则得到满足均导致网格加密; 反之, 只当所有准则均不满足的

情况才导致网格稀化(Popinet, 2003; Popinet *et al.*, 2007)。在网格被动态调整后, Gerris 再根据 CFL 条件来动态调节时间步长。

实际海洋中, 黏性的最大长度特征尺度在厘米量级, 而内波的水平特征尺度基本在百米到千米量级之间, 故可忽略流体黏性。本文关心的内孤立波属于高频内波, 可忽略地转效应。因此本文用于内波模拟的控制方程为在 Bossinesq 近似下且忽略地转效应的二维 Euler 方程组(Phillips, 1977)

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$$

其中, $\mathbf{g} = (0, -g)$ 是重力加速度矢量, ρ_0 是作为密度参考量的海表面密度均值, ρ' 是海水密度场 $\rho(x, z, t)$ 与密度参考量的差。 p 是实际压强场与密度为 ρ_0 的流体静压强的差。 $g\rho'/\rho_0$ 是约化重力项, 它是内波的恢复力, 在模型设定中体现为源项。

1.2 模型初始化

将 Euler 模型的初始流场设定为连续层化流体的内波 KdV 方程的一模态定形内孤立波解(Leonov *et al.*, 1975)。

$$\psi(x, z, t) = AC_f \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - C_f t}{L}\right) W_n(z), \quad (3)$$

其中, $\psi(x, z, t)$ 为流函数, A 为内孤立波的振幅, C_f 为相速度, L 为孤立波半宽度, x 表示水平坐标, z 表示垂向坐标, t 表示时间。

$$C_f = \frac{N_{\max} H}{\sqrt{\beta_n}} \left(1 - \frac{\gamma A}{3\alpha\beta_n H}\right), \quad L = \sqrt{\frac{-6H}{A\gamma}}, \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{1}{N_{\max}^2} \frac{\int_{-H}^0 N^2(z) W_n^2(z) dz}{\int_{-H}^0 W_n^2(z) dz}, \quad (5)$$

$$\gamma = -\beta_n \frac{2H}{N_{\max}^2} \frac{\int_{-H}^0 N(z) \frac{dN(z)}{dz} W_n^3(z) dz}{\int_{-H}^0 W_n^2(z) dz},$$

其中, H 为水深, $N(z)$ 为浮性频率剖面, N_{\max} 是其最大值, β_n 和 $W_n(z)$ 是 Sturm-Liouville 型边值问题(见公式(5))的本征值 β_n 及对应的本征函数 $W_n(z)$ 。 n 代表模态, 这里只考虑 1 模态。

$$W_n(z)_{zz} + \beta_n \frac{H^2 N^2(z)}{N_{\max}^2} W_n(z) = 0, \quad (6)$$

$$W_n(0) = W_n(-H) = 0$$

若未扰动密度垂直剖面 $\rho_0(z)$ 已知, 并指定一个振幅 A , 则可以计算出内波的流函数, 进而获得速度场和密度场:

$$u(x, z, 0) = \frac{\partial \psi(x, z, 0)}{\partial z}, \quad (7)$$

$$w(x, z, 0) = -\frac{\partial \psi(x, z, 0)}{\partial x},$$

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \rho(z - \psi/C_f) = \rho(z_0). \quad (8)$$

模型的坐标系设为速度等于内波初始相速度 C_f 的移动坐标系, 使得内波在计算域内相对静止, 可减小计算域的长度从而降低计算量。移动坐标相当于在整个计算域引入了一个均匀的背景流场 $U_0 = (-C_f, 0)$ 以及一个恒定的右边界入流条件, 因此模型的右边界满足:

$$\rho = \rho_0(z) \quad u = -C_f, \quad (9)$$

模型的左边界满足:

$$\partial \rho / \partial x = 0 \quad \partial u / \partial x = 0, \quad (10)$$

假设海表面满足刚盖近似, 海底平坦, 则上、下边界条件为:

$$w_z = -H = w_{z=0} = 0. \quad (11)$$

当用 KdV 解设定模型的初始场后, 随着模型的运行, 初始波形将发生变化, 部分波成分被分离出来并被色散掉, 最终剩下的波形稳定部分便是该数值模型获得的稳定内孤立波解。稳定的判断条件是各物理量在 $20T$ 时间内变化不超过 0.1%, 其中 $1T = L_{\text{ref}}/U_{\text{ref}}$ 为无量纲的模式时间单位, 其中 L_{ref} 和 U_{ref} 分别为长度和速度参考量。

除自适应网格外, Gerris 还可以通过多核并行处理来提高计算速度。测试表明, 使用 Intel® Xeon(R) E5-2603 v3 主频 1.60GHz 处理器进行 8 核并行处理, 获得一个内孤立波解的时间约为 7min。这个计算效率使得将之当作一个可多次调用的内孤立波数值计算工具纳入到更复杂的应用框架成为可能。

2 Euler 数值模型与 KdV 模型比较

本文采用 Vlasenko(1994)提出的参数化浮性频率公式来描述海洋的主密跃层, 见公式(12)和图 1。

$$N(z) = N_{\max} \left(\left[\frac{2(z + H_p)}{dH_p} \right]^2 + 1 \right)^{-1}. \quad (12)$$

公式(12)将密度剖面用密跃层的深度(H_p)、厚度(dH_p)以及浮性频率最大值(N_{\max})这 3 个物理意义明确

的参量表示。采用参数化浮性频使得本征方程(5)有解析解, 见公式(14)(Vlasenko, 1994), 便于和 Euler 模型的数值解进行比较。

$$W(z) = C_0 \left(\left[\frac{2(z + H_p)}{dH_p} \right]^2 + 1 \right)^{-1} \sin \left(\frac{k(z)}{k(-H)} \pi \right),$$

$$\beta_1 = \left(\frac{\pi}{k(-H)} \right)^2 - \left(\frac{2H}{dH_p} \right)^2 \tag{13}$$

其中, C_0 为使得 $W(z)$ 最大值为 1 的归一化系数, 且

$$k(z) = \frac{dH_p}{2H} \left(\arctan \frac{2(H_p + z)}{dH_p} - \arctan \frac{2H_p}{dH_p} \right), \tag{14}$$

另外, 根据浮性频率的定义

$$-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz} = N^2(z), \tag{15}$$

可得到未扰动时参数化密度垂直剖面(曾侃, 2002):

$$\rho_0(z) = -\frac{\rho_0 N_{\max}^2 dH_p}{4g} (m(z) - m(0))$$

$$m(z) = \frac{2dH_p (H_p + z)}{dH_p^2 + 4(H_p + z)^2} + \arctan \left(\frac{2(H_p + z)}{dH_p} \right) \tag{16}$$

其中 ρ_0 为海表参考密度。

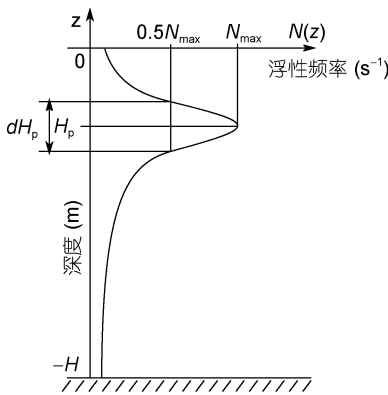


图 1 参数化浮性频率示意图(Vlasenko, 1994)

Fig.1 The profile of parametric buoyancy frequency (Vlasenko, 1994)

注: N_{\max} 表示最大浮性频率, H_p 表示密跃层的深度, dH_p 表示密跃层的厚度

下面讨论在不同海水层化条件和不同振幅条件下的内孤立波结构特征。表 1 按最大浮性频率由强到弱列出 4 种层化条件, 图 2 是对应的密度剖面和浮性频率剖面。参数设定方法如下: 首先固定海表密度为 1000kg/m^3 , 水深为 300m, 跃层深度 H_p 为 35m, 再设

定 dH_p 为不同值, 然后调节相应的 N_{\max} 使得海底密度相同。

表 1 模型中的层化条件(水深 $H=300\text{m}$)

Tab.1 Stratification conditions used in the model (depth $H=300\text{m}$)

分层	N_{\max} (s^{-1})	H_p (m)	dH_p (m)
1	0.03	35	35
2	0.0195	35	95
3	0.016	35	155
4	0.015	35	196.5

注: N_{\max} 表示最大浮性频率, H_p 表示密跃层的深度, dH_p 表示密跃层的厚度

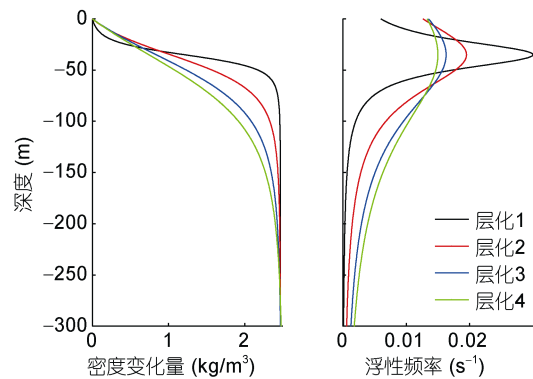


图 2 不同层化条件的密度和浮性频率剖面

Fig.2 The density and buoyancy frequency profiles of different stratification conditions

图 3 为层化条件 1 时用 Gerris 模拟的内孤立波的演变图, 色标以 ρ' 的最大值归一化, 其中 ρ' 为密度变化量。图 3a—图 3d 分别是 0, 5, 10, 20T 时刻的密度分布图, 它们给出了初始波形在 Euler 方程控制下分裂并色散的过程。分离出的小振幅波成分由于运动速度偏慢而与主波成分逐渐远离直至超出计算域。图 3d 表明在 20T 时刻只剩下已处于稳定状态的主要波成分, 它即为该数值模型获得的内孤立波解。自适应网格的疏密由涡度和密度梯度共同控制, 图 4 为图 3d 黄框位置放大显示的网格分布。注意, 为了显示清楚, 这里少绘了最细一层次的网格。

图 5 是分别用自适应网格和均匀网格模拟的速度场在图 3d 中黄框所示区域的差异分布图。显然, 在内孤立波中心位置附近差异较大。水平速度场和垂直速度场的平均偏差分别为 -0.0015m/s 和 $-5.38 \times 10^{-5}\text{m/s}$, 标准差分别为 0.0062m/s 和 0.0026m/s , 可以忽略不计。可见自适应网格在保障计算精度的同时降低了计算量。

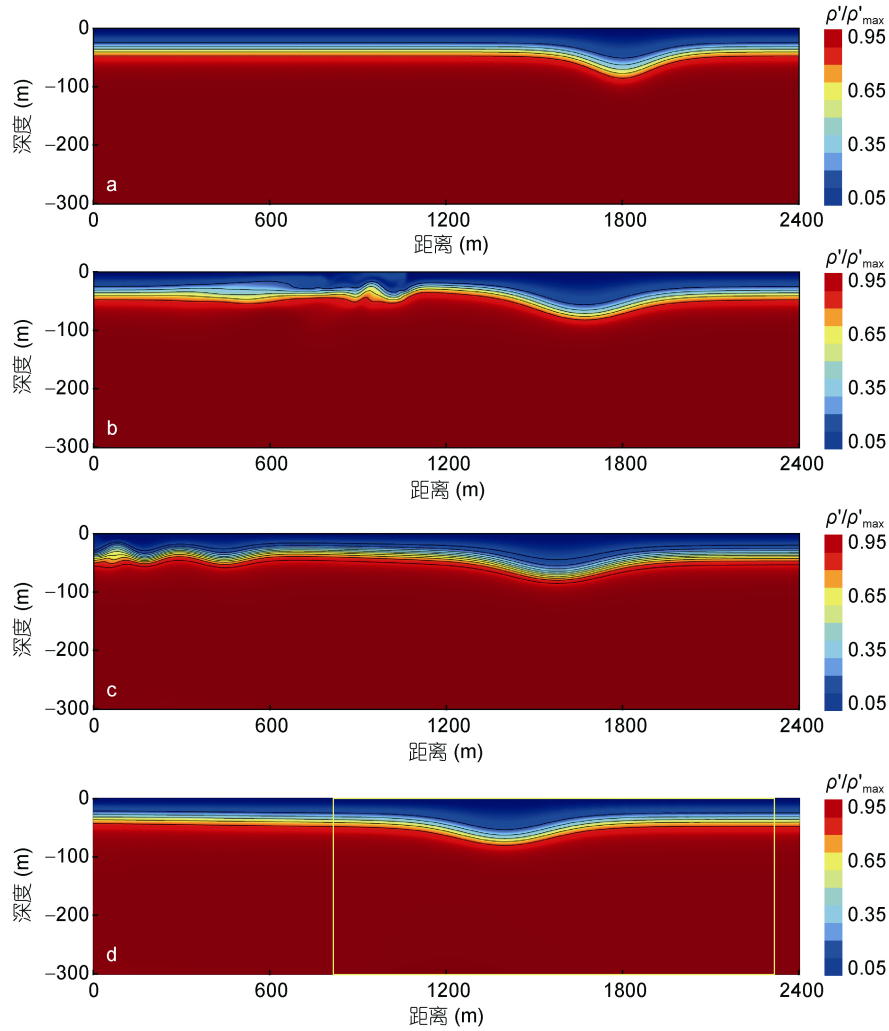


图 3 用 Gerris 模拟的内孤立波演变图

Fig.3 Evolution of the internal solitary wave simulated by Gerris

注: a、b、c、d 依次为 0, 5, 10, 20T 时刻密度分布图; ρ' 表示密度变化量, ρ'_{max} 表示其最大值

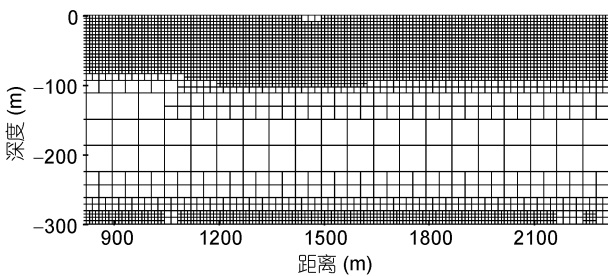


图 4 在内孤立波模拟时 Gerris 动态生成的网格

Fig.4 The mesh dynamically generated by Gerris during the simulation of internal solitary wave

图 6 为在层化 1 条件下, 振幅为 33m 时, 分别用 KdV 模型与 Euler 模型模拟得到的内孤立波等密度线分布。图 6 表明, 对水下 46m 处水层, 两个模型等密度线的垂向最大位移恰好相等; 对 46m 以浅的水层,

Euler 模型的等密度线的垂向最大位移大于 KdV 模型; 对 46m 以深的水层, 则情况相反。由于 KdV 模型将内波运动分解成水平和垂直两个独立的部分相乘, 因而仅垂向位移在不同深度有变化, 而孤立波半宽度则是上下一致的。然而, Euler 模型的垂向位移和孤立波半宽度均随水层深度不同而变化。就这点而言, 两个模型存在本质区别。下文将从不同方面讨论两个模型在垂直结构上的区别。

图 7 为在层化 1 的条件下, KdV 模型和 Euler 模型在不同振幅时的垂向结构对比图。图 7a、图 7b 和图 7c 均以与 Euler 模型结果相同振幅下的 KdV 模型解析解为标准将 Euler 模型数值解进行归一化处理。归一化后, KdV 模型各物理量垂向结构不随振幅变化, 而 Euler 模型对应的各物理量垂向结构随振幅而改变,

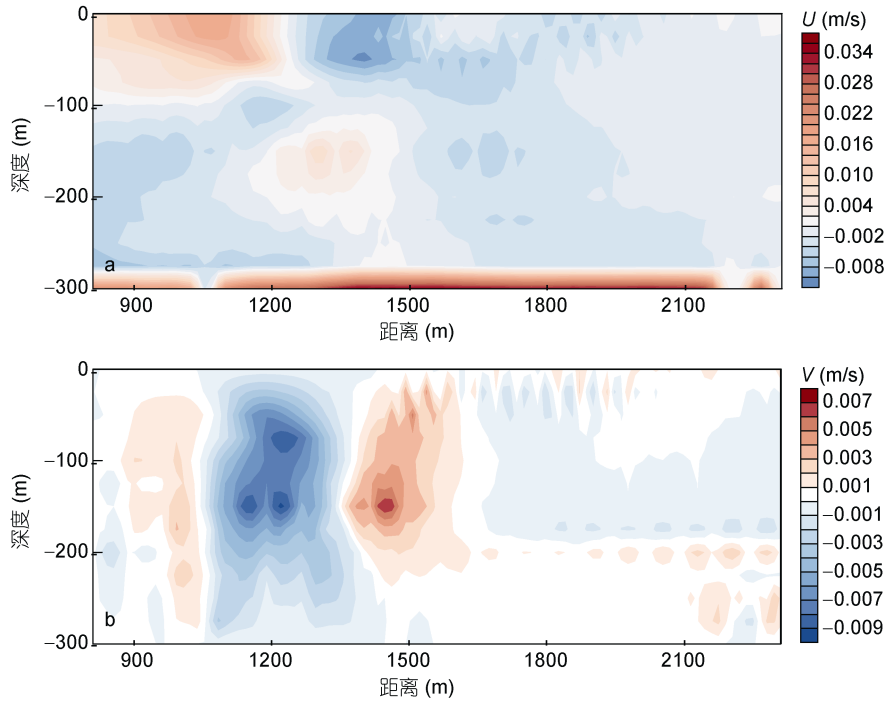


图 5 用 Gerris 在分别采用自适应网格和均匀网格的情况下模拟的速度场的差异分布图
 Fig.5 Difference in velocity field simulated between adaptive grid and uniform grid
 注: a. 水平速度场 U 差异分布; b. 垂向速度场 V 差异分布

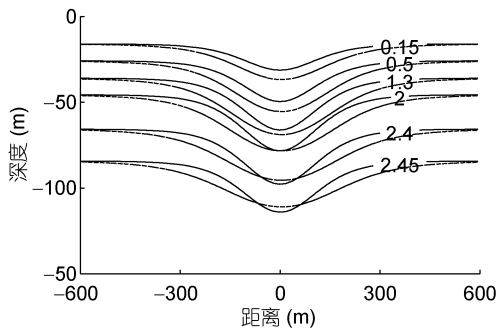


图 6 KdV 模型(实线)和 Euler 模型(虚线)在同一振幅下的内孤立波等密度线(单位: kg/m^3)垂向剖面(水深 $H=300\text{m}$)
 Fig.6 Isopycnal profiles (unit: kg/m^3) of KdV model (solid line) and Euler model (dashed line) at the same amplitude (depth $H=300\text{m}$)

这样可以突出 Euler 模型结果与 KdV 模型结果的比例关系。图 7a 为内孤立波中心位置等密度线垂向位移的垂直剖面, 可见, 振幅越大, Euler 模型给出的中心位置等密度线垂向位移最大值所对应深度越小。图 7b 和图 7c 分别为内孤立波中心位置水平速度分量和垂向速度分量最大位置的垂向速度分量的垂向剖面, 它们表明随着振幅增加, 水平速度分量为 0 对应的深度及垂向速度分量最大值对应的深度均增加, 并且 Euler 数值模型的最大水平速度分量和最大垂向速度

分量均小于 KdV 模型的对应该值。总的说来, 在相同层化条件下, 振幅越大, Euler 模型数值解与 KdV 模型解析解的差异越大。KdV 方程是在弱非线性和弱频散条件下导出的, 小振幅是其可忽略高阶非线性的条件。然而, 随着振幅增大, 高阶非线性效应必然越来越大而越来越难以忽略, 故舍弃它们导致的误差也越来越大。

稳态内孤立波数值解的半宽度采用等效波长长的定义(Miyata, 1988; Vlasenko *et al*, 2000)

$$\lambda(z) = \frac{1}{2a(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x, z) dx, \quad (17)$$

其中, $a(z)$ 为未扰动时在深度为 z 处的密度层在孤立波中心位置的垂向位移, 称为内孤立波在深度 z 处等密度线的振幅; $\zeta(x, z)$ 为深度为 z 的等密度线在不同水平位置上的垂向扰动。显然 $a(z) = \max(|\zeta(x, z)|)$, 而 $\max(a(z))$ 就是内孤立波的振幅。上述定义便于确定内孤立波数值解的半宽度, 而且该定义与 KdV 内孤立波解析解的半宽度也是一致的。

下面讨论内波半宽度在不同深度的变化特征。既然密度是深度的单调增函数, 因此也可以等效讨论内波半宽度随密度增加的变化性。而且半宽度本身也是通过等密度线计算获得的, 因此讨论半宽度与密

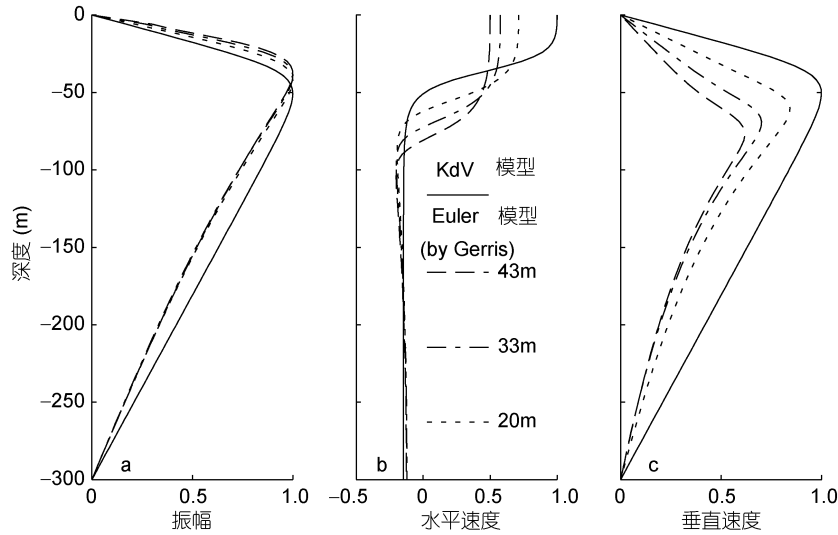


图 7 KdV 模型和 Euler 模型在不同振幅下的归一化内波垂向结构
 Fig.7 Vertical profiles of KdV model and Euler model at different amplitudes
 注: a. 振幅归一化; b. 水平速度归一化; c. 垂直速度归一化

度而非深度的关系更为方便。接下来将不同密度层的内孤立波半宽度视为密度的函数, 并且将 KdV 模型和 Euler 模型均以深度 $z = -H_p$ 时各自的半宽度 λ_{H_p} 为标准进行归一化。经上述操作获得的归一化半宽度的垂向分布如图 8 所示。由于 KdV 半宽度与深度无关, 所以 KdV 模型各密度层半宽度归一化后恒为 1。而 Euler 模型中, 内波各密度层的半宽度随密度增大而增大, 且振幅越大, 半宽度的垂向变化性越显著。

卫星 SAR 是观测内波的重要手段。既然 SAR 图像上的内波条纹的明暗变化与内波表面流场的梯度相关, 那么就有必要研究下内波表面流场及其梯度的规律。当用 KdV 及其变种理论来解释 SAR 的内波成像机制时, 可将内波表面流场梯度最大值和最小值之间的距离 L_u 与内波半宽度关联起来, 进而计算出内波振幅。然而从 Euler 模型结果可知, 在完全非线性条件下, 内波不同密度层的半宽度不同, 因而表面流场梯度极值的间距与内波最大振幅密度层的半宽度的关系不再固定。图 9a 为在振幅 33m 的情况下, 内波表面流速在不同层化(见表 1)的分布。图 9a 表明在相同的振幅下, 层化越弱, 表面水平流速的极大值越小。在表层, 由于水层垂直起伏为 0, 基于等效波长的半宽度定义失效, 但我们依然可以将 L_u 当作一个与半宽度作用类似的表面流速特征尺度, 见图 9b。 L_u 随跃层厚度的变化如图 9c 所示。图 9c 表明在海表和

海底密度以及跃层深度不变的情况下, 随着跃层厚度增加, 层化强度变弱, L_u 呈现上升趋势。综合图 9 表明表面流速、表面流速梯度分布在一定程度上可以反映跃层的强弱变化。对于 KdV 解析解, L_u 与内孤立半宽度的关系是确定的, 而在 Euler 模型中, L_u 与内波半宽度不再有简单的对应关系, 这也就增大了从 L_u 反演内波振幅的难度。

3 Euler 模型模拟结果的现场印证

本节用两组大振幅内孤立波实测数据来验证 Gerris 实现的 Euler 模型的有效性。第一组数据着重验证内孤立波的水平与垂向结构特征; 第二组数据着重验证其流场分布。

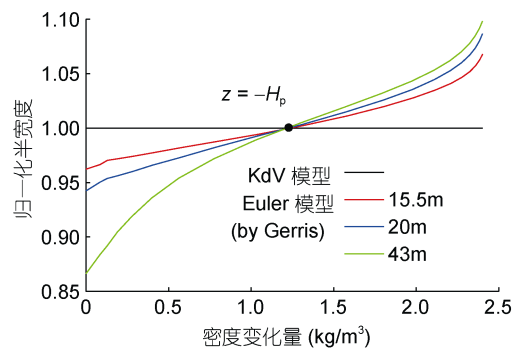


图 8 KdV 模型和 Euler 模型给出的在不同振幅下归一化内孤立波半宽度随密度的变化曲线
 Fig.8 The normalized half width of internal solitary waves simulated by KdV and Euler model with different amplitudes

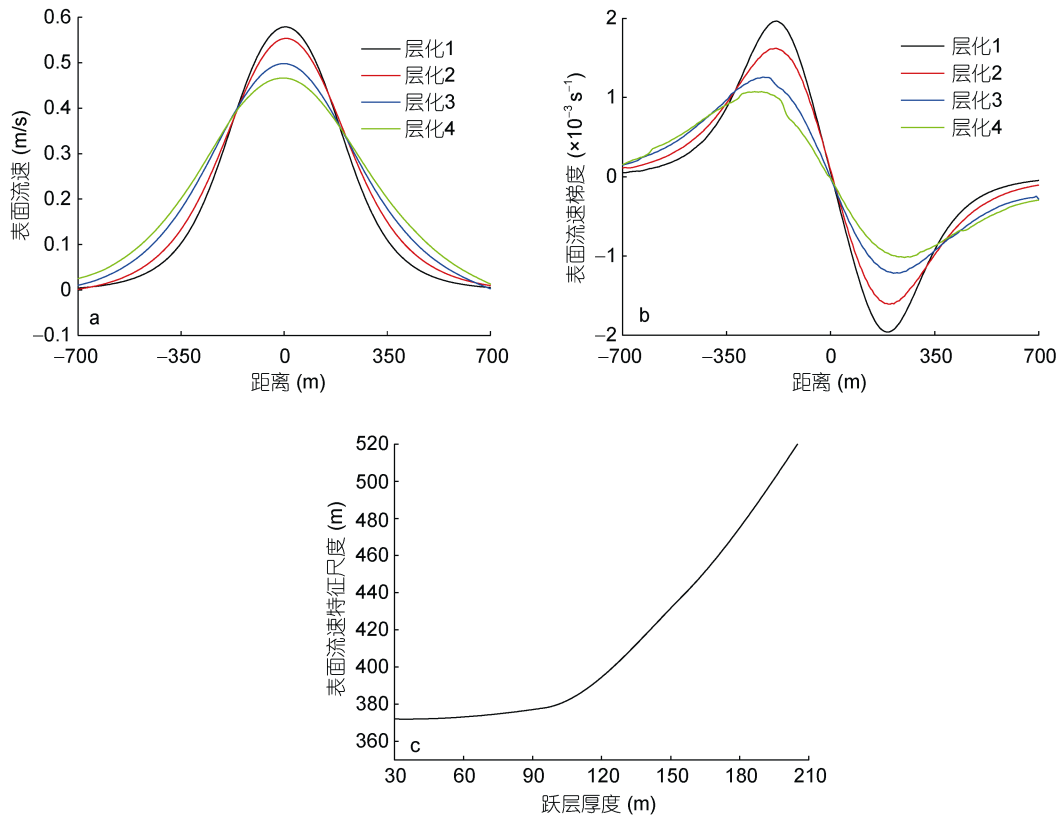


图9 Euler模型模拟的不同层化下内孤立波海表流场

Fig.9 Surface velocity field of internal solitary waves simulated by Euler model with different stratifications

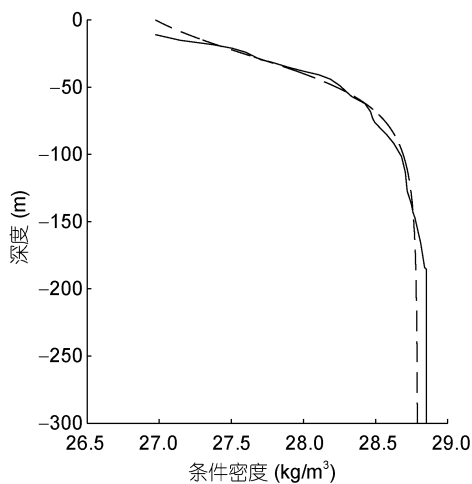


图10 墨西拿海峡北部实测密度剖面(实线, 从 Vlasenko *et al.*, 2000 提取)及其参数化密度剖面(虚线)

Fig.10 The observed density profile (solid line, extracted from Vlasenko *et al.*, 2000) in the north of Messina Strait and its parametric density profile (dashed line)

3.1 墨西拿海峡北部内孤立波验证

第一组实测数据(Vlasenko *et al.*, 2000)是1995年大西洋爱奥尼亚海巡航期间在墨西拿海峡海底山脊

北部25km处测得的振幅为55m的内孤立波。该内波所处位置总水深300m,内波传播方向为东,它被认为是潮地作用下形成的山后波在脱离地形逆流传播过程中演变而成(Brandt *et al.*, 1997)。温度、盐度和深度数据通过温盐深剖面仪(Conductivity Temperature Depth, CTD)及温度链获取;流场数据通过75kHz ADCP(Acoustic Doppler current profiler)获取。图10为实测数据密度剖面,其中参数化密度剖面为Euler数值模型的初始化密度场,如公式(16)所示。

图11为用KdV模型、Euler模型得到的墨西拿海峡北部大振幅内孤立波的垂向结构与实测数据的对比图。图11a为内波中心位置的垂向位移剖面,可见Euler模型得到的内孤立波最大振幅的深度较KdV模型更接近实测。图11b为内孤立波中心位置的水平速度场的垂向剖面,Euler模型得到的最大水平速度以及水平速度为0时的深度均较KdV模型更接近实测。图11c为内孤立波最大垂向速度位置处的垂直速度场的垂向剖面,同样,与KdV模型相比,Euler模型得到的最大垂直速度及其对应深度均与实测数据更为接近。综合图11表明,与KdV模型相比,在垂向

剖面上, Euler 模型得到的垂向位移、水平速度场及垂直速度场的特征参数、变化趋势均与实测数据吻合更好。部分参数对比见表 2。

图 12 为墨西拿海峡北部大振幅内孤立波实测数据与 KdV 模型、Euler 模型各密度层半宽度对比图。从图 12 中可以看出, Euler 模型变化趋势较 KdV 模型与实测数据更为吻合, 即在一定范围内, 随密度值的增加, 半宽度呈现上升趋势。而 KdV 模型的半宽度并不随密度变化而变化。

表 2 墨西拿海峡北部内波特征参数对比
Tab.2 Comparison of internal wave characteristic parameters in the northern Messina Strait

特征参数	实测	Euler 模型	KdV 模型
振幅(m)	55	50	50
相速度(m/s)	1.0	0.9	0.9
最大水平东向速度(m/s)	0.61	0.68	1.06
最大垂向速度(m/s)	0.16	0.15	0.20
最小垂向速度(m/s)	-0.11	-0.15	-0.20

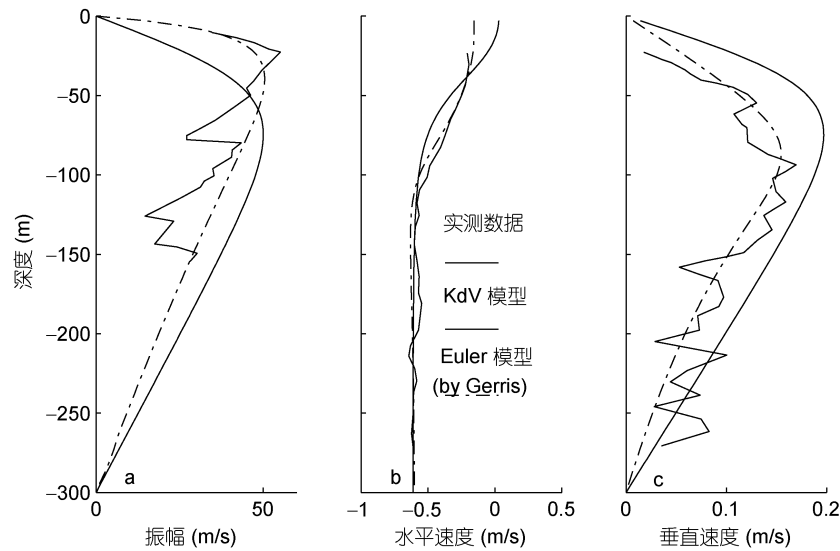


图 11 用 Euler 模型和 KdV 模型模拟的墨西拿海峡北部内孤立波的垂向结构与实测数据(Vlasenko *et al*, 2000) 的比较
Fig.11 Comparison of the vertical structure between the observed data (thick solid line, extracted from Vlasenko *et al*, 2000), and the Euler model (thin solid line) and KdV model (dashed line) in the northern of the Messina Strait

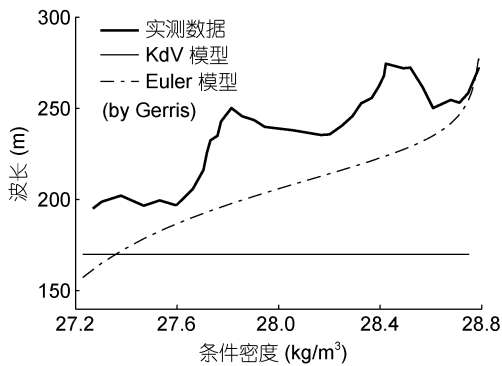


图 12 墨西拿海峡北部内孤立波在不同模型下的水平特征尺度与实测数据(Vlasenko *et al*, 2000)对比图
Fig.12 The contrast of the horizontal characteristic scales of internal waves between different models and observed data (extracted from Vlasenko *et al*, 2000) in the northern Messina Strait

3.2 南海深水区内孤立波验证

第二组实测数据(于博, 2015)为国家“973 计划”

项目在南海深水区投放的 ME2 潜标测得, 潜标布放的位置是(20.99°N, 118.16°E), 水深为 2029m, 内孤立波振幅为 186m, 传播方向为西向。该海域内波被认为是潮地作用下, 下凹波在传播过程中裂变成形或者混合区的塌陷对周围层化的水体产生的冲击作用演变而成(Du *et al*, 2008)。图 13 为实测密度剖面分布以及拟合的参数化密度剖面。

图 14 为南海深水区内孤立波的一个垂直剖面的水平速度和垂直速度时序变化图。其中右侧是剔除了背景流场的实测流场, 时间跨度是 75min。左侧两幅图为对应的 Euler 模型模拟的结果。当模式时间大于 40T 时(1T=400s), 模拟的内孤立波处于稳定状态, 故选取 40T 以后 11.25T(75min)时间段内的数据与实测数据进行比较, 确保模式数据与实测数据的时间跨度相同。而且为方便与实测数据的速度场分布图进行比较, 还将 Euler 模型结果换算成与实测数据相同

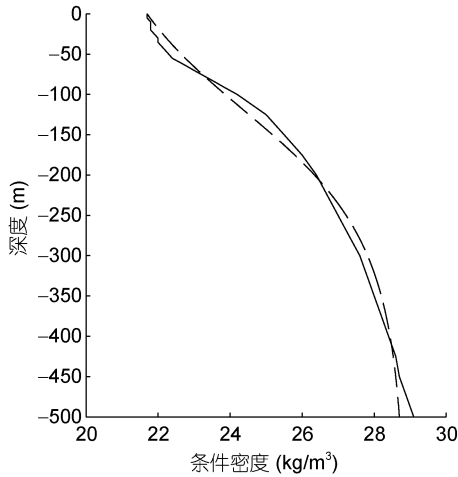


图 13 南海深水区实测密度剖面(实线)及参数化密度剖面(虚线)示意图(水深 $H=2000\text{m}$)

Fig.13 Map of observed density profile (solid line) and parametric density profile (dashed line) in the deep-water area of the South China Sea (depth $H=2000\text{m}$)

的时间标尺。粗实线为最大垂向位移的等密度线。图 14 表明 Euler 模型结果比较准确的反映了实测内孤立

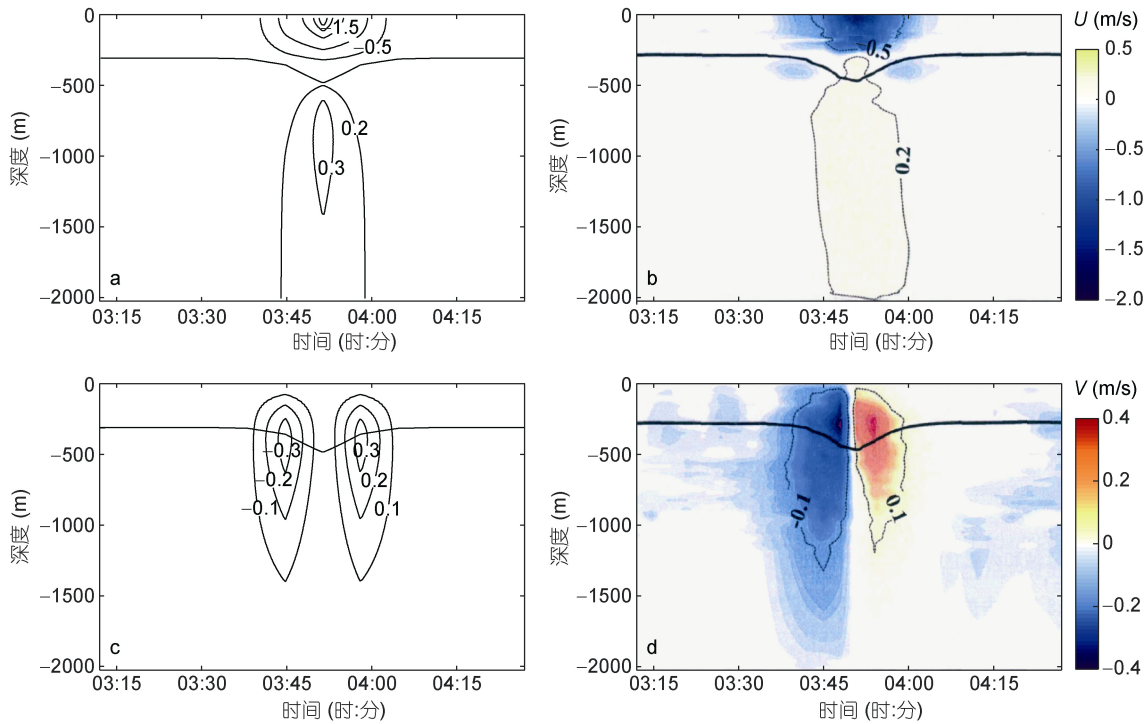


图 14 南海深水区内孤立波水平速度场(a、b)及垂直速度场(c、d)随时间分布图

Fig.14 Map of horizontal and vertical velocity fields with time in the deep-water area of the South China Sea

注: a 和 c 为 Euler 模型数值解, b 和 d 为实测数据(于博, 2015)

4 结论

本文采用开源的流体动力学软件 Gerris 建立的

波的内部结构, 例如, 内孤立波的周期, 垂向位移最大的等密度线的初始深度, 水平速度及垂向速度的极值等。表 3 中所示为南海深水区两模型特征参数对比数据。数据再次表明, Euler 模型的结果优于 KdV 模型的结果。

通过与两组实测数据的对比, 无论就大振幅内孤立波的结构特征还是其速度场而言, Euler 模型均能够较好的模拟大振幅内孤立波, 且优于 KdV 模型给出的模拟结果。在上述两个实验中, 若以同一层化同一振幅下的 KdV 解为单位 1, 则在 Euler 模型解中, 最大水平速度分别为 0.65 和 0.55, 最大垂向速度分别为 0.8 和 0.75, 可见 KdV 模拟的水平 and 垂向速度分量的最大值均偏大, 即 KdV 模型高估了非线性效应 (Vlasenko *et al.*, 2000)。由于 KdV 模型是弱非线性方程, 要求振幅远小于较浅水层, 而以上两实例均不满足这个要求, 故高阶非线性不可忽略, 这应是造成 KdV 模型与实测及 Euler 模型结果相去甚远的一个重要原因。

Euler 数值模型模拟了不同层化条件下的稳态大振幅内孤立波。由于 Gerris 采用了自适应网格和并行处理技术, 该模型兼具高精度和高效率的特点。并且, 由

于采用 Euler 方程作为控制方程, 故该模型可获得完全非线性的稳态内孤立波解。比较 Euler 模型与 KdV 模型的结果表明 Euler 模型克服了 KdV 模型在分析大振幅内波结构时的局限性。

表 3 南海深水区内波特征参数对比

Tab.3 Comparison of internal wave characteristic parameters in deep-water area of the South China Sea

特征参数	实测	Euler 模型	KdV 模型
振幅(m)	186	180	180
相速度(m/s)	3.51	3.44	3.69
最大水平西向速度(m/s)	-1.81	-1.87	-3.38
最大垂向速度(m/s)	0.35	0.35	0.50
最小垂向速度(m/s)	-0.39	-0.35	-0.50

Euler 模型的结果表明, 内孤立波的振幅、波中心位置水平速度分量、等密度层最大垂向速度分量均随着深度的变化而变化, 但变化趋势与 KdV 理论不同。尤其, 在 KdV 理论中, 各等密度层的半宽度是相同的, 而 Euler 模型获得的半宽度却随深度而改变。

与两组现场观测数据的比较结果表明, Euler 模型的模拟结果无论在波参数上还是在速度流场分布上均比 KdV 模型的结果更接近实测数据。因此, 有理由认为 Euler 模型获得的大振幅内孤立波的结构比 KdV 更准确。基于此, 再反观 KdV 模型给出的最大水平和垂直速度分量均大于 Euler 模型的对应结果这一现象, 可以认为 KdV 高估了大振幅内孤立波的非线性效应。

从文中给出的多组比较数据可以看出, 对于大振幅内孤立波, 高阶非线性效应不应忽略。

另外, 考虑到在 Euler 模型的内孤立波解中等密度面半宽度也随深度变化这一事实, 在 SAR 内波振幅反演研究工作中, 若能与 Euler 模型或者其它完全非线性模型(例如 DJL 模型)相结合, 有望获得更为准确的 SAR 内波振幅反演算法。

参 考 文 献

于 博, 2015. 南海北部内孤立波能量和水体输运研究. 青岛: 中国海洋大学硕士学位论文, 17—20

王 亮, 毛科峰, 陈希等, 2015. Gerris 数值方案及其在海洋数值模拟中的应用. 南京信息工程大学学报: 自然科学版, 7(1): 92—96

王金虎, 陈 旭, 徐 洋, 2016. 粗糙地形对内波生成影响的实验研究. 海洋与湖沼, 47(4): 706—713

方欣华, 杜 涛, 2005. 海洋内波基础和中国海内波. 青岛: 中国海洋大学出版社

孙丽娜, 张 杰, 孟俊敏, 2018. 基于遥感与现场观测数据的南海北部内波传播速度. 海洋与湖沼, 49(3): 471—480

张善武, 范植松, 石新刚, 2015. 变系数 EKdV 模型在模拟南海北部大振幅内孤立波传播和裂变中的应用. 中国海洋大学学报(自然科学版), 45(4): 9—17

曾 侃, 2002. 从卫星合成孔径雷达海表图像研究海洋内波的三个问题. 青岛: 青岛海洋大学博士学位论文, 48—55

蔡树群, 甘子钧, 龙小敏, 2001. 南海北部孤立子内波的一些特征和演变. 科学通报, 46(15): 1245—1250

Benjamin T B, 1967. Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *Journal of Fluid Mechanics*, 29(3): 559—592

Brandt P, Rubino A, Alpers W *et al*, 1997. Internal waves in the strait of Messina studied by a numerical model and synthetic aperture radar images from the ERS 1/2 satellites. *Journal of Physical Oceanography*, 27(5): 648—663

Du T, Tseng Y H, Yan X H, 2008. Impacts of tidal currents and Kuroshio intrusion on the generation of nonlinear internal waves in Luzon Strait. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 113(C8): C08015

Helfrich K R, Melville W K, 2006. Long nonlinear internal waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 38(1): 395—425

Jackson C R, 2004. *An Atlas of Internal Solitary-like Waves and their Properties*. 2nd ed. Washington DC, USA: NOAA

Joseph R I, 1977. Solitary waves in a finite depth fluid. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 10(12): L225—L227

Klymak J M, Pinkel R, Liu C T *et al*, 2006. Prototypical solitons in the South China Sea. *Geophysical Research Letters*, 33(11): L11607

Leonov A I, Miropol'sky, Y Z, 1975. Toward a theory of stationary nonlinear internal gravity waves. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 11(5): 298—304

Lien R C, Henyey F, Ma B *et al*, 2014. Large-amplitude internal solitary waves observed in the northern South China Sea: properties and energetics. *Journal of Physical Oceanography*, 44(4): 1095—1115

Liu A K, Chang Y S, Hsu M K *et al*, 1998. Evolution of nonlinear internal waves in the East and South China Seas. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 103(C4): 7995—8008

Miyata M, 1988. Long internal waves of large amplitude. In: *Proceedings of the IUTAM Symposium*. Tokyo, Japan: Springer, 399—406

Ono H, 1975. Algebraic solitary waves in stratified fluids. *Journal of the Physical Society of Japan*, 39(4): 1082—1091

Osborne A R, Burch T L, 1980. Internal solitons in the Andaman Sea. *Science*, 208(4443): 451—460

Phillips O M, 1977. *The Dynamics of the Upper Ocean*. 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press

Popinet S, 2003. Gerris: a tree-based adaptive solver for the incompressible Euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 190(2): 572—600

Popinet S, Rickard G, 2007. A tree-based solver for adaptive ocean modelling. *Ocean Modelling*, 16(3—4): 224—249

Preusse M, Stastna M, Freistühler H, *et al*, 2012. Intrinsic breaking of internal solitary waves in a deep lake. *PLoS One*,

- 7(7): e41674
- Shen H, He J Y, 2006. SAR imaging simulation of horizontal fully two-dimensional internal waves. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 18(3): 294—302
- Stastna M, Lamb K G, 2002. Large fully nonlinear internal solitary waves: the effect of background current. *Physics of Fluids*, 14(9): 2987—2999
- Tessler Z D, Gordon A L, Jackson C R, 2012. Early stage soliton observations in the Sulu Sea. *Journal of Physical Oceanography*, 42(8): 1327—1336
- Vlasenko V, Brandt P, Rubino A, 2000. Structure of large-amplitude internal solitary waves. *Journal of Physical Oceanography*, 30(9): 2172—2185
- Vlasenko V, Hutter K, 2002. Numerical experiments on the breaking of solitary internal waves over a slope shelf topography. *Journal of Physical Oceanography*, 32(6): 1779—1793
- Vlasenko V, Stashchuk N, Guo C *et al*, 2010. Multimodal structure of baroclinic tides in the South China Sea. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 17(5): 529—543
- Vlasenko V I, 1994. Multimodal soliton of internal waves. *Atmospheric and Oceanic Physics*, 30(2): 161—169
- Xie X H, Cuypers Y, Bouruet-Aubertot P *et al*, 2013. Large-amplitude internal tides, solitary waves, and turbulence in the central Bay of Biscay. *Geophysical Research Letters*, 40(11): 2748—2754
- Xue J S, Graber H C, Lund B *et al*, 2013. Amplitudes estimation of large internal solitary waves in the Mid-Atlantic Bight using synthetic aperture radar and marine X-band radar images. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 51(6): 3250—3258
- Zhang H S, Jia H Q, Gu J B *et al*, 2014. Numerical simulation of the internal wave propagation in continuously density-stratified ocean. *Journal of Hydrodynamics*, 26(5): 770—779
- Zhang X D, Wang J, Sun L N *et al*, 2016. Study on the amplitude inversion of internal waves at Wenchang area of the South China Sea. *Acta Oceanologica Sinica*, 35(7): 14—19
- Zheng Q N, Yuan Y L, Klemas V *et al*, 2001. Theoretical expression for an ocean internal soliton synthetic aperture radar image and determination of the soliton characteristic half width. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 106(C12): 31415—31423

APPLICATION OF GERRIS IN NUMERICAL SIMULATION OF OCEAN LARGE-AMPLITUDE INTERNAL SOLITARY WAVES

ZENG Kan, LI Heng-Yu

(*Ocean Remote Sensing Institute, Ocean University of China, Qingdao 266003, China*)

Abstract The fully nonlinear steady-state large-amplitude internal solitary waves in continuously stratified fluids were simulated in Gerris, an open source fluid dynamics software, based on the 2D incompressible Euler equations with Boussinesq approximation. The comparison of internal waves simulated by the Euler model and by the KdV model indicates that high-order nonlinear terms should not be neglected when large-amplitude is concerned. The simulation of internal waves by the Euler model reveals that the half width of isopycnic surface of a fully nonlinear large-amplitude internal solitary wave varies with depth, which makes the method to retrieve the internal wave amplitude using the distance between two extreme values of internal wave pattern extracted from a spaceborne SAR image based on the analytical solution of the KdV equation doubtful. Therefore, the retrieval method is necessary to be reassessed. In addition, the validity of the Euler model implemented by Gerris to simulate internal solitary waves has been verified by two sets of in-situ measurements.

Key words large-amplitude internal solitary wave; numerical simulation; Euler model; Gerris