

# 国外論文譯述

## 論潮汐方程的数值积分法

Г. В. 波盧卡罗夫

許多实际問題，在某些給定的初始和边界条件下，可以对偏微分方程进行积分。但很多情况是由于边界的輪廓复杂，很难找到这些方程的分析解，計算时只能采用边界問題的近似解法。

里特次(Ритц)和勃·格·加列尔基恩(Б. Г. Галеркин)的变分法是应用最广泛的一种近似法，借助它，就可以求得分析形式的近似解。此外，数值計算也广泛的用来求解不同的边界問題，同时还可以确定已知函数值或对各个宗量值的已知函数。

在专题文獻和教学用书中可以找到很多使用上述方法求解不同問題<sup>[1]</sup>的例子。

現在我們來敘述一下有关偏微分方程数值积分的一般概念，为此，这些方程已經写成有限差分形式。对于某些边界問題，差分法是唯一可以采用的方法，只有使用这种方法才能够求得給定区域的函数值。但是，数值方法是很繁复的。最近期間，由于可以依靠快速电子计算机来完成計算工作，这种方法才得到广泛地应用。在这个方法中，用网格区域来代替整个真实的区域。在平面問題或者立体——空間問題中，經常选择正方形作为

网格的元素。当然，这并不是唯一的选择：也可以选择直角形、平行四边形、三角形或其他更明显的形式。

图1上，表示了以閉綫C作为界限的积分区域，并标出了网格区域及作为它的边界的一条封閉形曲綫和坐标系統。

正方形的边长是任意的，但是，要使用有限差分代替导微函数时，所引起的誤差应不超过問題本身的誤差。由于很难遵守这个規則，实际上，网格間隔的决定都应用經驗方法，使它与真实大小以正方形累积接近。在函数发生急遽变化的区域中，則选择更密的网格。

按照选择的网格，在方程中用有限差分代替偏导数。

图2上，用大比例尺表示图1上的一部分。正方形的边长用l表示。

节点的坐标有两个标記——字母和数字。

我們列出一个公式，借助它，偏导数就可有用

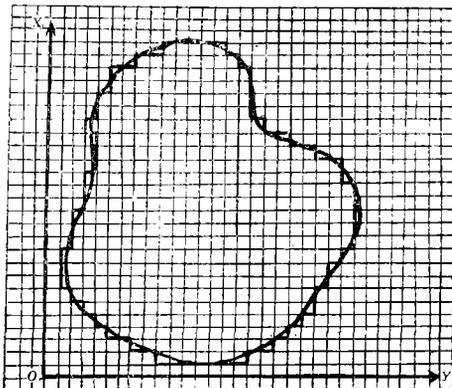


图 1

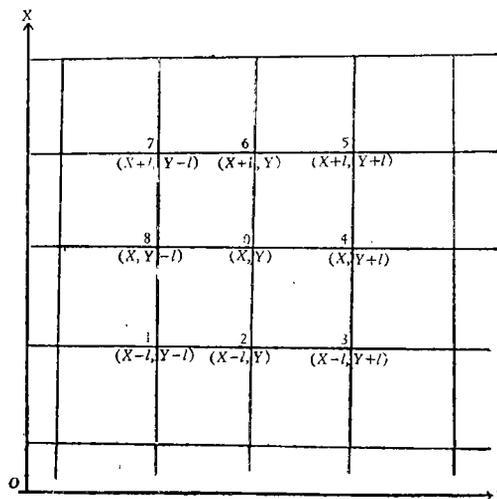


图 2

限差分式来代替。

註  $u = u(x, y)$  —— 已知函数, 那末

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

等, 就是它的偏导数

用近似式<sup>[1]</sup> 替代准确的极限式, 即取

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_{x+l, y} - u_{xy}}{l};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{x, y+l} - u_{xy}}{l}$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{x+l, y} - 2u_{xy} + u_{x-l, y}}{l^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{x, y+l} - 2u_{xy} + u_{x, y-l}}{l^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u_{x+l, y+l} - u_{x+l, y-l} - u_{x-l, y+l} + u_{x-l, y-l}}{4l^2}.$$

用另一符号(见图 2)有:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_6 - u_0}{l}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_4 - u_0}{l};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_6 - 2u_0 + u_2}{l^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_4 - 2u_0 + u_8}{l^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u_5 - u_7 - u_3 + u_1}{4l^2}. \quad (1')$$

这里  $u_{x+l, y} - u_{xy}$  或者  $(u_6 - u_0)$  是  $x$  从  $(x, y)$  点变至  $(x+l, y)$  点, 就是函数  $u(x, y)$  的增量。

例如, 拉普拉斯方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , 可写成下

列有限差分式:

$$\frac{u_{x+l, y} - 2u_{xy} + u_{x-l, y}}{l^2} + \frac{u_{x, y+l} - 2u_{xy} + u_{x, y-l}}{l^2} = 0,$$

由此

$$u_{xy} = \frac{u_{x+l, y} + u_{x-l, y} + u_{x, y+l} + u_{x, y-l}}{4}. \quad (2)$$

或者在数字符号内

$$u_0 = \frac{u_2 + u_4 + u_6 + u_8}{4}. \quad (2')$$

为了检验计算, 有时用公式

$$u_0 = \frac{u_1 + u_3 + u_5 + u_7}{4}$$

来代替式(2)或(2'), 该公式系相对应于计算图解的对角线。

如果在点  $(x, y)$  的隣点中, 函数  $u(x, y)$  的值是已知的, 那末, 在点  $(x, y)$  上  $u(x, y)$  的近似

值就可以根据方程(2)用代数平均法来进行计算。

因此, 就建立了一个方程组, 网格内的每一个节点都可以列出一个方程(2)。如果, 这时边界点上函数  $u(x, y)$  的值为已知, 那末, 我们就得到了此代数方程组各个节点的函数近似值。因此, 偏微分方程的积分问题可以导致代数方程组的求解。在内节点很多的情况下, 代数方程组将由很多方程式构成, 解这一方程组将会遇到计算上的许多困难。但采用迭代法(逐步近似值法), 就可以免除这些困难。这个方法的实质具有近似解的连续性, 然后证明, 建立起来的近似解的连续性是收敛的。在内点中的零次近似可以取任意数值(在边界点上的函数值是根据边界条件给定的)。为了使迭代次数进行得少, 应该尽可能地挑选接近于真实的零次近似。关于区域内函数的数量可以根据函数的物理意义来推测, 或者用边界值的内插法对其进行深入的估计。

第一次近似是借助于公式(2)根据零次近似计算得到的, 并且, 该公式右边的值也是从零次近似中取得的。第一次以及以下的近似计算对所有的内点都引入一个连续性中。第二次近似计算系根据第一次的计算, 以此类推。直到所有内点上的函数值在前后两次迭代中所得数值不超过一给定的计算准确度时为止。在所有的迭代中, 边界条件是不变的。例如, 整个计算可以沿水平或垂直方向从这一点到另一点逐点地进行。在上述连续计算的情况下, 为了加速迭代收敛过程, 可以用在同样迭代中已经求得的邻点函数值。

在迭代法中, 计算上所犯的偶然差错, 不可能在近似的收敛过程中出现, 偶然的差错会增加一些补充的迭代。

在这里所谈到的数值计算方法中, 解的误差是由下列因素引起的, 即函数的边界值移到网格廓线上, 以及方程式中的偏导数被有限差分式所代替。适当地选择网格的大小和形状就可以缩小这些误差。此外, 实际求解问题时, 在实际廓线上有节点的函数值并不都是给定的。当把实际廓线上的函数值移到网格廓线上, 或为了确定廓线中间各点的函数值时使用了内插公式, 特别是著名的牛顿内插公式。该方法用下列步骤求得。假设函数  $f(x)$  可展成级数, 而且在等间距  $h$  的网节上函数值为已知。为了使内插公式具有简单的形式, 我们写出函数  $f(x_0 \pm xh)$  靠近  $x = x_0$  点的级数展

开式:

$$f(x_0 \pm xh) = f(x_0) \pm x f'(x_0) + \frac{x(x-1)}{2!} f''(x_0) \pm \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} f'''(x_0) + \dots$$

用有限差分式代替偏导数,求得:

$$f(x_0 + xh) = f(x_0) + x \Delta f(x_0) + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 f(x_0) + \dots, \quad (3)$$

$$f(x_0 - xh) = f(x_0) - x \Delta f(x_0) + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 f(x_0) + \dots, \quad (3')$$

式(3)称为前半頓內插公式, (3') 称为后半頓內插公式。

在公式(3)和(3')中,  $x_0$  是一个网节的横坐标,  $(x_0 \pm xh)$  是我们来计算函数值的节点横坐标,  $x$  是一个任意的正的整数:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

$$\Delta^2 f(x_0) = f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)$$

等等。

牛頓的公式在外推法中也可以应用, 即可计算在给定函数值的綫段外点的函数值。在实际使用牛頓公式时, 象經常那样, 我們只取前三項。

上面談到了数值计算的一般概念, 現在我們来探討一下潮汐方程的积分問題。关于潮波的传播問題, 采用下列偏微分方程来进行积分:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v + \alpha u = -g \frac{\partial}{\partial x} (\zeta - \bar{\zeta}),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u + \alpha v = -g \frac{\partial}{\partial y} (\zeta - \bar{\zeta}), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(Hu)}{\partial x} - \frac{\partial(Hv)}{\partial y}, \quad (5)$$

这里, 使用了下列符号:  $u, v$  是潮流流速在  $x, y$  軸上的分量,  $\omega$  ——地球自轉角速度的垂直分量,  $g$  ——重力加速度,  $H$  ——水域深度,  $\zeta$  ——在自由水面上, 水自由面的升高,  $g\bar{\zeta}$  ——外力位势,  $t$  ——時間,  $\alpha$  ——摩擦系数。方程(4)是运动方程。方程式(5)是連續性方程。方程組(4)是在一般簡化的情况下, 即略去非綫性項和垂直运动的速度分量, 从流体动力方程中求得。取水的密度等于 1。此外, 沿垂綫上有流体静压分布。

如果研究的海区与大洋連接的面积不大, 对于在这区域内的潮汐, 外力可以略去不計。那末, 在这种情况下, 我們將对下列微分方程組求积分

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v + \alpha u = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u + \alpha v = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(Hu)}{\partial x} - \frac{\partial(Hv)}{\partial y}, \quad (7)$$

$u, v, \zeta$  是時間的未知函数。边界条件是水不流进海区的垂壁。

数值  $2\omega u, 2\omega v$  是科氏力的分量;  $\alpha u, \alpha v$  是摩擦力的分量。

对于任意形状的海区, 方程(6)和(7)沒有分析形式的积分。但对某些个别情况和特殊形状的海区, 例如, 圓形的, 长方形的等等, 已經得到了这方程組的分析解。关于水的底摩擦提出了下述意見, 即这个力随着海区深度增加而减小; 随着深度的增加, 流体质点之間的內摩擦亦将增加, 在到达了某个深度以后它就大于对海底的摩擦力。在方程(6)和(7)中沒有考虑內摩擦力, 因为对于深度較大的海区, 方程內的底摩擦力是可以略去的。在論文[2,3]中, 认为在深度大于 100 米的海区内摩擦力等于零。从观察中得到, 摩擦的量值决定于振动的週期。因此, 这里以  $b = \frac{\alpha}{\sigma}$  代替摩擦系数  $\alpha, \sigma$  是潮波的角速度, “ $b$ ” 如表 1 中所列出的。

表 1

$H$ (米)	100	50	30	10和小于10米
$b$	0.1—0.2	0.5	0.5—1.0	1.0—2.0

从上表中可以看出, 摩擦对角速度相同的潮波性质的影响系随着深度增加而减小。在其他的著作[5,6]中亦确定了摩擦系数“ $\alpha$ ”的量值, 在著作[5]中則取它与潮流最大速度成正比而与节点的深度成反比。为了计算摩擦力就必须知道最大流速。为了消除時間因素, 我們假定潮波可由下式确定:

$$\zeta = Z \cos(\sigma t - g_0), \quad (8)$$

上式中  $Z$  和  $g_0$  是坐标的函数;  $\sigma$  是潮波的角速度。公式(8)可以写成

$$\zeta = Z \cos \sigma t \cos g_0 + Z \sin \sigma t \sin g_0$$

的形式, 如果引入符号

$$Z \cos g_0 = \zeta', \quad Z \sin g_0 = \zeta'',$$

那末水位的升高就可以写成:

$$\xi = \xi' \cos \sigma t + \xi'' \sin \sigma t. \quad (9)$$

公式(9)决定于潮流速度的分量  $u$  和  $v$

$$\begin{aligned} u &= U \cos(\sigma t - \nu), \\ v &= V \cos(\sigma t - \chi); \end{aligned} \quad (10)$$

或

$$\begin{aligned} u &= u' \cos \sigma t + u'' \sin \sigma t, \\ v &= v' \cos \sigma t + v'' \sin \sigma t; \end{aligned} \quad (11)$$

上式中

$$\begin{aligned} u' &= U \cos \nu; & v' &= V \cos \chi; \\ u'' &= U \sin \nu; & v'' &= V \sin \chi; \end{aligned}$$

如果  $\xi', \xi'', u', u'', v', v''$  都已知的話, 那末就能根据下列公式計算  $Z, U, V, g_0, \nu, \chi$ :

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\xi'^2 + \xi''^2}; & U &= \sqrt{u'^2 + u''^2}; \\ V &= \sqrt{v'^2 + v''^2}; & g_0 &= \arctg \frac{\xi''}{\xi'}; \\ \nu &= \arctg \frac{u''}{u'}; & \chi &= \arctg \frac{v''}{v'}. \end{aligned}$$

在实际海区中传播着的不規則形式的潮波, 是由无数个象方程(8)所表示的那种諧波所組成的。这种潮波能用調和分析方法将它分解为独立的諧波。假如从很多諧波中选择最多的項做为本問題中  $\xi$  的每一个解, 結果, 潮位就可按公式

$$\xi = \sum \xi_i = \sum_{(i)} Z_i \cos(\sigma_i t - g_{i0}) \quad (12)$$

計算。例如, 在潮汐理論中, 潮位的計算系由4, 6, 8 以至 12 和 24 个諧波組成, 而有时却只有一个。

这里将敘述对一个分量的求解方法。我們取海区深度  $H$  在一个正方形內是不变的。那末对于一个正方形的网格, 方程(6,7)可以写成:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v + \alpha u &= -g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u + \alpha v &= -g \frac{\partial \xi}{\partial y}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (14)$$

如果略去底摩擦項, 方程(13)就簡化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v &= -g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u &= -g \frac{\partial \xi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (15)$$

以下将敘述方程組(13,14)或沒有摩擦情况下方程組(15,14)的数值积分方法。可以求解以下两个問題:

1. 在沿海区边界的潮位值給定的情况下, 求

海区中部符合于上述微分方程組的潮位值;

2. 在海区边界上流速分量給定的条件下, 求整个海区中滿足于方程組的流速分量。

流速的分量同样可借流体动力学方程并根据潮位来确定。而在某些区域内, 不可能沿边界測得潮位, 因此第二个問題的求解应当是独立的。

我們从第一种問題开始。把(9), (11)所表示的  $\xi, u$  和  $v$  代入方程(13,14), 并令  $\cos \sigma t$  和  $\sin \sigma t$  的系数分別相等, 就可得到对于  $\xi', \xi'', u', u'', v', v''$  的微分方程組

$$\begin{aligned} \sigma u' + 2\omega v'' - \alpha u'' &= g \frac{\partial \xi''}{\partial x}, \\ \sigma u'' - 2\omega v' + \alpha u' &= -g \frac{\partial \xi'}{\partial x}, \\ \sigma v' - 2\omega u'' - \alpha v'' &= g \frac{\partial \xi''}{\partial y}, \\ \sigma v'' + 2\omega u' + \alpha v' &= -g \frac{\partial \xi'}{\partial y}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma \xi' &= H \left( \frac{\partial u''}{\partial x} + \frac{\partial v''}{\partial y} \right), \\ \sigma \xi'' &= -H \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

从方程(16,17)消去函数  $u', u'', v', v''$ 。为此, 我們应从(16)中得到他們, 并以此代入(17)的两个方程式。方程組(16)的行列式为:

$$d = \begin{vmatrix} \sigma & -\alpha & 0 & 2\omega \\ \alpha & \sigma & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & \sigma & -\alpha \\ 2\omega & 0 & \alpha & \sigma \end{vmatrix} = (\alpha^2 - \sigma^2 + 4\omega^2)^2 \times 4\alpha^2 \sigma^2. \quad (18)$$

进行簡单的計算后, 我們得到:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{g}{d} \left[ -\alpha(\alpha^2 + \sigma^2 + 4\omega^2) \frac{\partial \xi'}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \sigma(\alpha^2 + \sigma^2 - 4\omega^2) \frac{\partial \xi''}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - 2\omega(\alpha^2 - \sigma^2 + 4\omega^2) \frac{\partial \xi'}{\partial y} + 4\alpha\omega\sigma \frac{\partial \xi''}{\partial y} \right], \\ u'' &= \frac{g}{d} \left[ -\sigma(\alpha^2 + \sigma^2 - 4\omega^2) \frac{\partial \xi'}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha(\alpha^2 + \sigma^2 + 4\omega^2) \frac{\partial \xi''}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. - 2\omega(\alpha^2 - \sigma^2 + 4\omega^2) \frac{\partial \xi''}{\partial y} - 4\alpha\omega\sigma \frac{\partial \xi'}{\partial y} \right], \\ v' &= \frac{g}{d} \left[ 2\omega(\alpha^2 - \sigma^2 + 4\omega^2) \frac{\partial \xi'}{\partial x} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4\omega\alpha\sigma\frac{\partial\xi''}{\partial x} - \alpha(\alpha^2 + \sigma^2 + 4\omega^2)\frac{\partial\xi'}{\partial y} + \\
& + \sigma(\alpha^2 + \sigma^2 - 4\omega^2)\frac{\partial\xi''}{\partial y} \Big], \\
v'' = & \frac{g}{d} \left[ 4\alpha\omega\sigma\frac{\partial\xi'}{\partial x} + 2\omega(\alpha^2 - \sigma^2 + 4\omega^2)\frac{\partial\xi''}{\partial x} - \right. \\
& - \sigma(\alpha^2 + \sigma^2 - 4\omega^2)\frac{\partial\xi'}{\partial y} - \\
& \left. - \alpha(\alpha^2 + \sigma^2 + 4\omega^2)\frac{\partial\xi''}{\partial y} \right].
\end{aligned}$$

以上列的  $u', u'', v'$  和  $v''$  值代入方程(17), 我們得到:

$$\begin{aligned}
\sigma\xi'' = & -\frac{Hg}{d} [\alpha(\sigma^2 + \alpha^2 + 4\omega^2)\Delta\xi'' + \\
& + \sigma(\sigma^2 + \alpha^2 - 4\omega^2)\Delta\xi'], \\
\sigma\xi'' = & -\frac{Hg}{d} [\sigma(\sigma^2 + \alpha^2 - 4\omega^2)\Delta\xi'' - \\
& - \alpha(\alpha^2 + \sigma^2 + 4\omega^2)\Delta\xi']; \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A = & \frac{4[\sigma(\sigma^2 + \alpha^2 - 4\omega^2)]^2 + 4[\alpha(\alpha^2 + \sigma^2 + 4\omega^2)]^2 - \frac{\sigma^2 d^2}{Hg}(\sigma^2 + \alpha^2 - 4\omega^2)}{\left[ \frac{\sigma d^2}{Hg} - 4\sigma(\sigma^2 + \alpha^2 - 4\omega^2) \right]^2 + 16[\alpha(\alpha^2 + \sigma^2 + 4\omega^2)]^2}, \\
B = & \frac{\alpha(\alpha^2 + \sigma^2 + 4\omega^2)}{\left[ \frac{\sigma d^2}{Hg} - 4\sigma(\sigma^2 + \alpha^2 - 4\omega^2) \right]^2 + 16[\alpha(\alpha^2 + \sigma^2 + 4\omega^2)]^2}.
\end{aligned}$$

这样就能利用方程(21)计算网格中节点上的  $\xi'$  和  $\xi''$ 。

在开始进行计算以前, 首先必须以网格代替实际边界所包围的区域。其次, 必须将实际边界上的潮位用网格的值引至边界上。然后计算网格内部每个节点的常数  $A$  和  $B$ 。

经过这些初始的计算后, 就可转到确定  $\xi'$  和  $\xi''$  上来。取  $\xi'$  和  $\xi''$  的零值为任意的。可以用公式(21)计算第一次近似值, 应当以零次近似值代替公式(21)右边的  $\xi'$  和  $\xi''$ 。在边界上的  $\xi'$  和  $\xi''$  是不变的。同样以公式(21), 根据第一次近似值计算第二次近似值, 以及其他等等。这个计算方法, 象上面所说的, 叫做迭代法。

以上述方法为例, 进行了鄂霍次克海内太阳半日潮波引起的潮位计算。图3给出了等潮差线, 它是由潮位相等的各点联结而成。鄂霍次克海的这个分布图的一般特征已被观察和其他研究工作所证实了。

应用数值方法同样可以求解运动的速度分量。为此, 以(17)的  $\xi'$  和  $\xi''$  值代入方程(16), 我们就获得:

上式中,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  是拉普拉斯算子。

不考虑摩擦 ( $\alpha = 0$ ), 方程(19)就简化为:

$$\begin{aligned}
\sigma\xi'' = & -\frac{Hg\sigma}{d}(\sigma^2 - 4\omega^2)\Delta\xi', \\
\sigma\xi'' = & -\frac{Hg\sigma}{d}(\sigma^2 - 4\omega^2)\Delta\xi'', \quad (20)
\end{aligned}$$

式中  $d = (4\omega^2 - \sigma^2)$ 。

我们根据公式(1)以有限增量代替方程(19)中的偏导数。

经过了这些变换以后, 我们获得了以下的有限差分方程:

$$\begin{aligned}
\xi'_0 = & A(\xi'_2 + \xi'_4 + \xi'_6 + \xi'_8) - \\
& - B(\xi''_2 + \xi''_4 + \xi''_6 + \xi''_8), \\
\xi''_0 = & B(\xi'_2 + \xi'_4 + \xi'_6 + \xi'_8) + \\
& + A(\xi''_2 + \xi''_4 + \xi''_6 + \xi''_8); \quad (21)
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
\sigma u'' + 2\omega v'' - \alpha u'' = & -\frac{Hg}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial x \partial y} \right), \\
\sigma u'' - 2\omega v'' + \alpha u'' = & -\frac{Hg}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 u''}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v''}{\partial x \partial y} \right), \\
\sigma v'' - 2\omega u'' - \alpha v'' = & -\frac{Hg}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right), \\
\sigma v'' + 2\omega u'' + \alpha v'' = & -\frac{Hg}{\sigma} \left( \frac{\partial^2 u''}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v''}{\partial y^2} \right). \quad (22)
\end{aligned}$$

用有限差分代替偏导数, 就有

$$\begin{aligned}
\sigma u''_0 + 2\omega v''_0 - \alpha u''_0 = & - \\
& - \frac{Hg}{\sigma} \left( \frac{u''_6 - 2u''_0 + u''_2}{l^2} + \frac{v''_5 - v''_7 - v''_3 + v''_1}{4l^2} \right), \\
\sigma u''_0 - 2\omega v''_0 + \alpha u''_0 = & - \\
& - \frac{Hg}{\sigma} \left( \frac{u''_6 - 2u''_0 + u''_2}{l^2} + \frac{v''_5 - v''_7 - v''_3 + v''_1}{4l^2} \right), \\
\sigma v''_0 - 2\omega u''_0 - \alpha v''_0 = & - \\
& - \frac{Hg}{\sigma} \left( \frac{u''_5 - u''_7 - u''_3 + u''_1}{4l^2} + \frac{v''_4 - 2v''_0 + v''_2}{l^2} \right), \\
\sigma v''_0 + 2\omega u''_0 + \alpha v''_0 = & - \\
& - \frac{Hg}{\sigma} \left( \frac{u''_5 - u''_7 - u''_3 + u''_1}{4l^2} + \frac{v''_4 - 2v''_0 + v''_2}{l^2} \right);
\end{aligned}$$

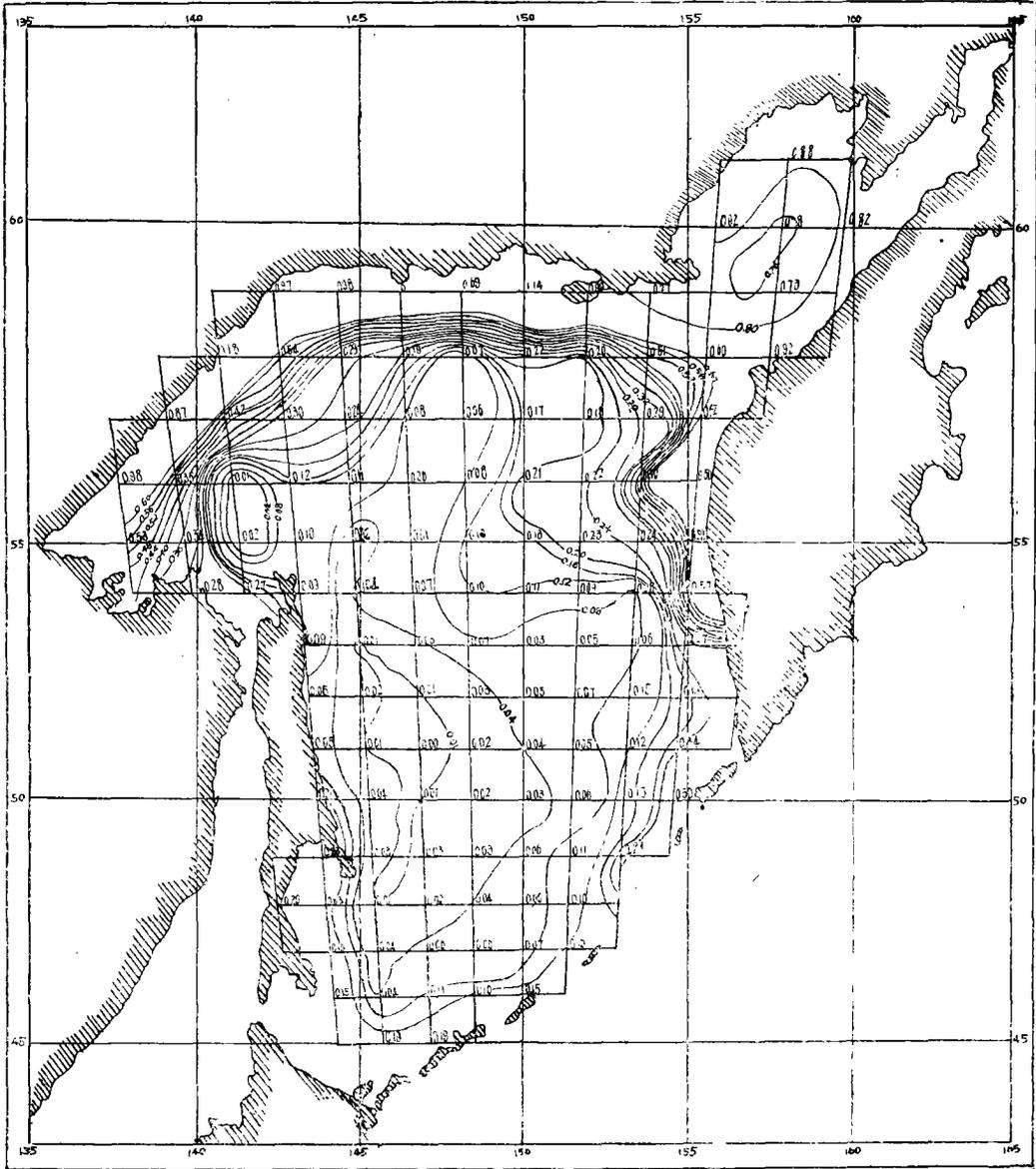


图3 潮汐(M<sub>2</sub>分潮)調和常数H的等值綫图

或

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{2gH}{\sigma^2 l^2}\right) u'_0 - \frac{\alpha}{\sigma} v'_0 + \frac{2\omega}{\sigma} v'_0 &= \\
 &= -\frac{Hg}{4\sigma^2 l^2} [4(u'_2 + u'_6) + v'_1 - v'_3 + v'_5 - v'_7], \\
 \frac{\alpha}{\sigma} v'_0 + \left(1 - \frac{2gH}{\sigma^2 l^2}\right) u'_0 - \frac{2\omega}{\sigma} v'_0 &= \\
 &= -\frac{Hg}{4\sigma^2 l^2} [4(u''_2 + u''_6) + v''_1 - v''_3 + v''_5 - v''_7], \\
 \frac{2\omega}{\sigma} u'_0 + \left(1 - \frac{2gH}{\sigma^2 l^2}\right) v'_0 - \frac{\alpha}{\sigma} u'_0 &= \\
 &= -\frac{Hg}{4\sigma^2 l^2} [4(v'_4 + v'_8) + u'_1 - u'_3 + u'_5 - u'_7], \\
 \frac{2\omega}{\sigma} u'_0 + \frac{\alpha}{\sigma} v'_0 + \left(1 - \frac{2gH}{\sigma^2 l^2}\right) v'_0 &= \\
 &= -\frac{Hg}{4\sigma^2 l^2} [4(v''_4 + v''_8) + u''_1 - u''_3 + u''_5 - u''_7]. \quad (23)
 \end{aligned}$$

我們取符号:  $1 - \frac{2gH}{\sigma^2 l^2} = m$ ;  $\frac{2\omega}{\sigma} = n$ ;  $\frac{\alpha}{\sigma} = b$ .

除此而外, 方程組(17)的右面用  $d_1, d_2, d_3, d_4$  表示, 那末, 方程組的(23)可改寫为:

$$\begin{aligned} mu'_0 - bu''_0 + 0v'_0 + nv''_0 &= d_1, \\ bu'_0 + mu''_0 - nv'_0 + 0v''_0 &= d_2, \\ 0u'_0 - nu''_0 + mv'_0 - bv''_0 &= d_3, \\ mv'_0 + 0u''_0 + bv'_0 + mv''_0 &= d_4. \end{aligned} \quad (24)$$

这个方程組的行列式等于(18):

$$d = (m^2 + n^2 + b^2)^2 - 4m^2n^2$$

解方程組(24), 我們得到:

$$u'_0 = \frac{\Delta_1}{d}; \quad v'_0 = \frac{\Delta_2}{d}; \quad u''_0 = \frac{\Delta_3}{d}; \quad v''_0 = \frac{\Delta_4}{d};$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} d_1 & -b & 0 & n \\ d_2 & m & -n & 0 \\ d_3 & -n & m & -b \\ d_4 & 0 & b & m \end{vmatrix} = \\ &= n(m^2 + b^2 - n^2)d_1 + b(m^2 + n^2 + b^2)d_2 + \\ &\quad + 2mnbd_3 + n(-m^2 + n^2 + b^2)d_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} m & d_1 & 0 & n \\ b & d_2 & -n & 0 \\ 0 & d_3 & m & -b \\ n & d_4 & b & m \end{vmatrix} = \\ &= -b(m^2 + n^2 + b^2)d_1 + \\ &\quad + m(m^2 - n^2 + b^2)d_2 + \\ &\quad + n(m^2 - n^2 - b^2)d_3 + 2mnbd_4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} m & -b & d_1 & n \\ b & m & d_2 & 0 \\ 0 & -n & d_3 & -b \\ n & 0 & d_4 & m \end{vmatrix} = \\ &= -2mnbd_1 + n(m^2 - n^2 - b^2)d_2 + \\ &\quad + m(m^2 - n^2 + b^2)d_3 + \\ &\quad + m(m^2 - n^2 + b^2)d_4 + \\ &\quad + b(m^2 + n^2 + b^2)d_4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \begin{vmatrix} m & -b & 0 & d_1 \\ b & m & -n & d_2 \\ 0 & -n & m & d_3 \\ n & 0 & b & d_4 \end{vmatrix} = \\ &= -n(m^2 - n^2 - b^2)d_1 - 2mnbd_2 - \\ &\quad - b(m^2 + n^2 + b^2)d_3 + \\ &\quad + m(m^2 - n^2 - b^2)d_4. \end{aligned}$$

如果引入下列符号:

$$\begin{aligned} A &= b(m^2 + n^2 + b^2), \\ B &= m(m^2 - n^2 + b^2), \\ C &= n(-m^2 + n^2 + b^2), \\ D &= 2mnb; \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= Bd_1 + Ad_2 + Dd_3 + Cd_4, \\ \Delta_2 &= -Ad_1 + Bd_2 - Cd_3 + Dd_4, \\ \Delta_3 &= -Dd_1 - Cd_2 + Bd_3 + Ad_4, \\ \Delta_4 &= Cd_1 - Dd_2 - Ad_3 + Bd_4. \end{aligned}$$

現在, 方程組(24)的解可以写成下列形式:

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{Bd_1 + Ad_2 + Dd_3 + Cd_4}{d}, \\ u''_0 &= \frac{-Ad_1 + Bd_2 - Cd_3 + Dd_4}{d}, \\ v'_0 &= \frac{-Dd_1 - Cd_2 + Bd_3 + Ad_4}{d}, \\ v''_0 &= \frac{Cd_1 - Dd_2 - Ad_3 + Bd_4}{d}; \end{aligned} \quad (25)$$

式中

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{gH}{4\sigma^2l^2} [4(u'_2 + u'_6) + v'_1 - v'_3 + v'_5 - v'_7], \\ d_2 &= -\frac{gH}{4\sigma^2l^2} [4(u''_2 + u''_6) + v''_1 - v''_3 + v''_5 - v''_7], \\ d_3 &= -\frac{gH}{4\sigma^2l^2} [4(v'_4 + v'_8) + u'_1 - u'_3 + u'_5 - u'_7], \\ d_4 &= -\frac{gH}{4\sigma^2l^2} [4(v''_4 + v''_8) + u''_1 - u''_3 + u''_5 - u''_7]. \end{aligned}$$

用公式(25)进行潮流速度分量的計算。如同計算潮位一样, 这里也能采用迭代法。为了說明这个方法, 选择了一个具有足够深度而面积不大的区域, 以便略去摩擦, 并能简化方程(25)的計算, 再在沿海区的边界測定流速分量。

測得的速度要用調和分析方法得到各种不同周期的分量。从各种不同的周期中选择一个由半日潮波所引起的速度。在图4上的等值綫系表示不同的流速

$$W = \sqrt{U^2 + V^2}$$

采用了海区中部的实测流速以验证計算的結果。能够得到这样的結論, 即: 在类似問題的求解中, 采用数值方法是非常合适的。

最后应当指出, 本文的部分材料已在著作[2, 3, 5, 6]中闡述了。不过这里考虑了摩擦計算公式, 带有普遍的形式, 这还可用来計算深度不大海区中的波浪参数。根据外海的已知方程同样能

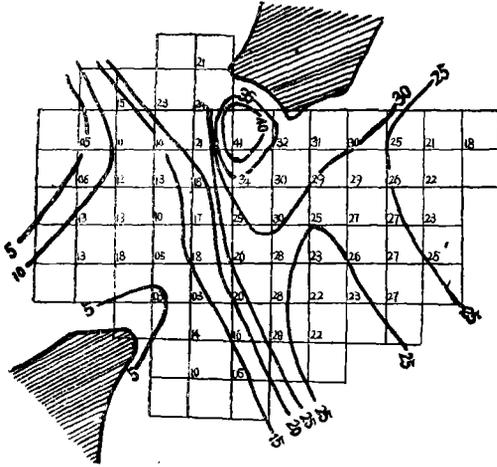


图 4

借运动方程(6)和連續方程(7)来确定流速(关于这个问题,詳見[6])。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гос. тех. теорет. изд. 1950.
- [ 2 ] Болюкаров Г. В. Вычисление гармонических постоянных уровня Охотского моря. Труды ГОИН, вып. 33/45, 1956.
- [ 3 ] Болюкаров Г. В. Численный метод определения составляющих скорости приливного течения. Труды ГОИН, вып. 33/45, 1956.
- [ 4 ] Defart. A. Gezeitenprobleme des Meeres in Landnahe. Probl. Kosm. Phys., Heft VI, Hamburg 1955.
- [ 5 ] Hansen. M. Gezeiten und Gezeitenströme der halbtägigen Hauptmonuteide  $M_2$  in der Nordsee. Dtsch. Hydr. Ztschr., Srganzungsheft 1, 1952.
- [ 6 ] Болюкаров Г. В. Численные методы определения уровня прилива и скорости приливотливных течений. Труды ГОИН, вып. 38, 1957.

原文作者及題目名称:

Г. В. Полукаров.

О численном методе интегрирования уравнений приливов. Доклады на сессии ученого совета государственной океанографического института, посвященной 40-й годовщине великой октябрьской социалистической революции. Москва—1957.

(沈瀛書、張樹榮譯 尤芳潤校)