第9卷 第2期 海洋与湖沼 Vol. 9, No. 2
1978年7月 OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA July, 1978

论风生波的正向力、切向力的共振、偶合及涡动耗散综合模式*

袁业立
(中国科学院海洋研究所)

本文从实际涡动海水的运动方程出发，导出了描述风生波初生阶段成长过程的波面演化方程，讨论了波面正向力、切向力以及涡动粘滞性在这个过程中的作用。

第一、二节所导出的波面演化方程表明，海波成长过程类似一振动系统，其外扰动力为加权 $\frac{|\mathbf{k}|}{\rho}$ 的波面正向力场与波面切向力散度场的和，切向力与正向力一样也通过共振和偶合两种方式向海波输入能量。在第三节中给出了关于二维波数谱的解。它表明，在波面正向力和切向力的共同作用下，二维波数谱呈线性-指数型成长，其指数成长率应为正向力偶合能量吸收率 $\frac{|\mathbf{k}|\gamma}{\rho}$、切向力偶合能量吸收率 $|\mathbf{k}|L$ 以及涡动粘滞耗散率 $-4[\nu+M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2$ 之和。同时也对 Miles 综合模式的比例系数作了修正，它应是总外扰动力的波数频率谱。

一、问题的提法

我们认为，海水是均匀的不可压缩的粘性流体，置坐标原点 o 于平均海平面 ox_1x_2 上，x_3 轴向上为正。这样，描述海波生成过程的方程组，边界条件和初始条件可写成如下形式：

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+gx_3\right)+\nabla(\tau_{ij}+\sigma_{ij}), \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0, \tag{1.2}$$

在海面 $x_3=\zeta(x_1, x_2, t)$ 上，

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u_1\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}+u_2\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}=u_3, \tag{1.3}$$

$$\left(\tau_{ij}+\sigma_{ij}-\frac{p}{\rho}\delta_{ij}\right)\mathbf{n}_\zeta=\left(-\frac{p_0}{\rho}+\frac{T}{\rho}\Delta_1\zeta\right)\mathbf{n}_\zeta+\boldsymbol{\tau}_0; \tag{1.4}$$

在海底 $x_3=-H$ 或 $x_3=-\infty$，

$$u_1=u_2=u_3=0; \tag{1.5}$$

初始时刻海水是平静的；其中 $\mathbf{v}=(u_1, u_2, u_3)$，表示水体平均运动的速度场；$p$ 表示平均压力场；g 表示重力加速度；ν 表示分子运动粘性系数；T 表示水气界面的表面张力系数；

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第422号；本工作承毛汉礼先生的鼓励和指导，并得到甘子均、许秦、张庆华等同志具体帮助，特此致衷心感谢。

$\sigma_{ij}=\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$，表示分子粘性应力张量；$\tau_{ij}$ 表示涡动 Reynolds 应力张量；$\mathbf{n}_\zeta$ 表示波面的外法向单位矢量；p_0 表示波面上大气的压力场；$\boldsymbol{\tau}_0=(\tau_1, \tau_2)$ 表示波面上大气对水体的切向力场；$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$；$\delta_{ij}$ 表示 Kronecker's delt 函数。

对于实际海波来说，除个别情况外，波动的振幅一般远小于波动的波长，即波动可以认为是小振幅的。这样，我们在讨论海波的生成过程时，常可略去上述方程组和边界条件中的所有二阶项，则得如下线性方程组及边界条件，

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+gx_3\right)+\nabla(\tau_{ij}+\sigma_{ij}), \tag{1.6}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0, \tag{1.7}$$

在波面 $x_3\doteq 0$ 上

$$\tau_{33}+\sigma_{33}-\frac{p}{\rho}=-\frac{p_0}{\rho}+\frac{T}{\rho}\Delta_1\zeta, \tag{1.8}$$

$$\tau_{13}+\sigma_{13}=\tau_1, \tag{1.9}$$

$$\tau_{23}+\sigma_{23}=\tau_2, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=u_3, \tag{1.11}$$

在海底 $x_3=-H$，或 $x_3=-\infty$ 上，

$$u_1=u_2=u_3=0 \tag{1.12}$$

只要我们选取适当大的广义函数类，可以认为我们问题的解及其所涉及的函数均属于该广义函数类。例如，我们可以选取 K' 类广义函数作为我们讨论问题的函数空间（所谓 K' 类广义函数是指作用在无限可微、具有有限基底的函数类 K 上的连续线性泛函数）。这一点将为我们的解所证实。

在 K' 类广义函数空间中，我们对 $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ 作 Fourior 变换

$$(\tilde{\ })=\int_{\mathbf{x}}(\ \ )e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}d\mathbf{x},\quad (\ \ )=(2\pi)^2\int_{\mathbf{k}}(\tilde{\ })e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}d\mathbf{k},$$

则有如下方程组：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial t}=&\left(ik_1, ik_2, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)(\tilde{\tau}_{j1}+\tilde{\sigma}_{j1}, \tilde{\tau}_{j2}+\tilde{\sigma}_{j2}, \tilde{\tau}_{j3}+\tilde{\sigma}_{j3})\\&-\left(ik_1, ik_2, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\tilde{p}}{\rho}+gx_3\delta(\mathbf{k})\right),\quad j=1, 2, 3,\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$ik_1\tilde{u}+ik_2\tilde{u}+\frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial x_3}=0, \tag{1.14}$$

在波面 $x_3\doteq 0$ 上

$$\tilde{\tau}_{33}+\tilde{\sigma}_{33}-\frac{\tilde{p}}{\rho}=-\frac{\tilde{p}_0}{\rho}-\frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^2\tilde{\zeta}, \tag{1.15}$$

$$\tilde{\tau}_{13}+\tilde{\sigma}_{13}=\tilde{\tau}_1, \tag{1.16}$$

$$\tilde{\tau}_{23}+\tilde{\sigma}_{23}=\tilde{\tau}_2, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial t}=\tilde{u}_3; \tag{1.18}$$

在海底 $x_3 = -H$ 或无限深处，

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = \tilde{u}_3 = 0 \tag{1.19}$$

其中

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{12} &= \nu\,(ik_1\tilde{u}_2 + ik_2\tilde{u}_1),\\
\tilde{\sigma}_{13} &= \nu\left(ik_1\tilde{u}_3 + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3}\right),\\
\tilde{\sigma}_{23} &= \nu\left(ik_2\tilde{u}_3 + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_3}\right),\\
\tilde{\sigma}_{jj} &= 2\nu i k_j \tilde{u}_j, \quad j = 1,\ 2,\\
\tilde{\sigma}_{33} &= 2\nu \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_3},
\end{aligned} \tag{1.20}$$

这里我们特别用上横号标记在海面的函数对 $(x_1,\ x_2)$ 的 Fourier 变换。并注意到在线性模式中

$$\lim_{x_3 \Rightarrow \zeta} \widetilde{\psi(x_3)} \doteq \lim_{x_3 \to 0} \widetilde{\psi(x_3)}。$$

大家知道，Fourier 积分把一个 $(-\infty,\ \infty)$ 上的函数看作是具有不同波数的指数(波动)函数的线性组合。这样，上述方程可理解为，波数为 $\mathbf{k}$ 的指数波动的振幅(即所谓振幅谱)所应满足的方程组。

为了进一步求解上述方程组，必须给出关于 $\tilde{\tau}_{ij}$ 的附助关系，采用湍流半经验理论的假定，认为 Reynolds 应力张量的 $\mathbf{k}$ 组分 $\{\tilde{\tau}_{ij}\}$ 可写成如下形式：

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{jj} &= 2M(\mathbf{k})\, ik_j\tilde{u}_j, \quad j = 1,\ 2,\\
\tilde{\tau}_{33} &= 2M(\mathbf{k})\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_3}\\
\tilde{\tau}_{12} &= \tilde{\tau}_{21} = M(\mathbf{k})\,(ik_1\tilde{u}_2 + ik_2\tilde{u}_1)\\
\tilde{\tau}_{13} &= \tilde{\tau}_{31} = M(\mathbf{k})\left(ik_1\tilde{u}_3 + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3}\right)\\
\tilde{\tau}_{23} &= \tilde{\tau}_{32} = M(\mathbf{k})\left(ik_2\tilde{u}_3 + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_3}\right)
\end{aligned} \tag{1.21}$$

这里 $M(\mathbf{k})$ 是与波数 $\mathbf{k}$ 有关的组成涡动粘滞系数，它表示波数大于 k 的湍流小涡旋脉动对波数为 k 的波动组分所产生的粘滞作用。

这样，方程 (1.13)—(1.19) 将写成：

$$\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} - [\nu + M(\mathbf{k})]\left(-|\mathbf{k}|^2\tilde{u}_j + \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial x_3^2}\right) = -ik_j\left(\frac{\tilde{p}}{\rho} + g x_3 \delta(\mathbf{k})\right) \quad j = 1,\ 2, \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial t} - [\nu + M(\mathbf{k})]\left(-|\mathbf{k}|^2\tilde{u}_3 + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial x_3^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\tilde{p}}{\rho} + g x_3 \delta(\mathbf{k})\right) \tag{1.23}$$

$$ik_1\tilde{u}_1 + ik_2\tilde{u}_2 + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_3} = 0 \tag{1.24}$$

$$2[\nu + M(\mathbf{k})]\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_3} - \frac{\tilde{p}}{\rho} = -\frac{\bar{p}_0}{\rho} - \frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^2\zeta, \tag{1.25}$$

$$[\nu + M(\mathbf{k})]\left(ik_1\tilde{u}_3 + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3}\right) = \bar{\tau}_1, \tag{1.26}$$

$$[\nu + M(\mathbf{k})]\left(ik_2\tilde{u}_3 + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_3}\right) = \bar{\tau}_2, \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \tilde{u}_3; \tag{1.28}$$

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 = \tilde{u}_3 = 0 \tag{1.29}$$

我们将引入函数 $\tilde{\phi}$，它满足方程

$$-\left(\frac{\tilde{p}}{\rho} + gx_3\delta(\mathbf{k})\right) = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}, \tag{1.30}$$

由方程 (1.22)—(1.24) 可知

$$\left(|\mathbf{k}|^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = 0。 \tag{1.31}$$

记

$$\tilde{u}_j = ik_j\tilde{\phi} + \tilde{u}_{0j}, \quad j = 1, 2,$$
$$\tilde{u}_3 = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_3} + \tilde{u}_{03}, \tag{1.32}$$

则由初始条件 $\tilde{u}_j|_{t=0} = 0$，可知 $\tilde{\phi}|_{t=0} = \left.\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_3}\right|_{t=0} = \tilde{u}_{0j}\Big|_{t=0} = 0$，因而 $\left.\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x_3^2}\right|_{t=0} = 0$，这样我们可得

$$\left(|\mathbf{k}|^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\tilde{\phi}|_{t=0} = 0。$$

由 (1.31) 式可知，$\tilde{\phi}$ 应满足方程

$$\left(|\mathbf{k}|^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\tilde{\phi} = 0 \tag{1.33}$$

将 (1.32) 式代入方程 (1.22)，(1.23)，考虑到 (1.30)，则可知 $\tilde{u}_{0j}$，$j = 1, 2, 3$，应满足如下方程组:

$$\frac{\partial \tilde{u}_{0j}}{\partial t} - [\nu + M(\mathbf{k})]\left(-|\mathbf{k}|^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\tilde{u}_{0j} = 0 \tag{1.34}$$

$$ik_1\tilde{u}_{01} + ik_2\tilde{u}_{02} + \frac{\partial u_{03}}{\partial x_3} = 0$$

以后我们将称 (1.32) 中的 $\left(ik_1\tilde{\phi},\ ik_2\tilde{\phi},\ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_3}\right)$ 为速度场的有势部分，$(\tilde{u}_{01}, \tilde{u}_{02}, \tilde{u}_{03})$ 为速度场的粘性部分。

为了将 (1.30) 式应用于波面，必须先将他返回到 (x_1, x_2, x_3, t) 空间，再将其应用于波面。这样，我们就可得到如下在 (k_1, k_2, t) 空间中的相应方程

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{\tilde{p}}{\rho} + g\zeta = 0。 \tag{1.35}$$

考虑到边界条件 (1.25)，则上式可写成:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + 2[\nu + M(\mathbf{k})]\left(\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_3}\right) + \left(g + \frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^2\right)\zeta + \frac{\bar{p}_0}{\rho} = 0, \tag{1.36}$$

其余海面边界条件应写成:

$$[\nu + M(\mathbf{k})]\left(2ik_1\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_3} + ik_1\tilde{u}_{03} + \frac{\partial\tilde{u}_{01}}{\partial x_3}\right) = \bar{\tau}_1, \tag{1.37}$$

$$[\nu + M(\mathbf{k})]\left(2ik_2\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_3} + ik_2\tilde{u}_{03} + \frac{\partial\tilde{u}_{02}}{\partial x_3}\right) = \bar{\tau}_2, \tag{1.38}$$

海底边界条件应写成:

$$ik_1\tilde{\phi} + \tilde{u}_{01} = ik_2\tilde{\phi} + \tilde{u}_{02} = \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_3} + \tilde{u}_{03} = 0。 \tag{1.39}$$

这样方程 (1.33)、(1.34)、(1.35)、(1.36), 边界条件 (1.37)、(1.38)、(1.39), 和零初始条件将构成一封闭方程组,它是我们进一步讨论的基础。

二、波面波数振幅谱演化方程的导出及其在海波谱段中的解

由上节可知,我们的问题归结为求解如下方程组和边界条件的零初始值问题:

$$\left(-|\mathbf{k}|^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\tilde{\phi} = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\tilde{u}_{0j}}{\partial t} - [\nu + M(\mathbf{k})]\left(-|\mathbf{k}|^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\tilde{u}_{0j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

$$ik_1\tilde{u}_{01} + ik_2\tilde{u}_{02} + \frac{\partial\tilde{u}_{03}}{\partial x_3} = 0, \tag{2.3}$$

在海面 $x_3 = 0$ 上

$$\tilde{u}_{03} + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_3} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \tag{2.4}$$

$$[\nu + M(\mathbf{k})]\left(2ik_1\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_3} + ik_1\tilde{u}_{03} + \frac{\partial\tilde{u}_{01}}{\partial x_3}\right) = \bar{\tau}_1, \tag{2.5}$$

$$[\nu + M(\mathbf{k})]\left(2ik_2\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_3} + ik_2\tilde{u}_{03} + \frac{\partial\tilde{u}_{02}}{\partial x_3}\right) = \bar{\tau}_2, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t} + 2[\nu + M(\mathbf{k})]\left(\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial\tilde{u}_3}{\partial x_3}\right) + \left(g + \frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^2\right)\zeta + \frac{\bar{p}_0}{\rho} = 0 \tag{2.7}$$

在无限深处,

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_3} = \tilde{u}_{0j} = 0, \quad (j = 1, 2, 3) \tag{2.8}$$

由于本文的主要目的是确定海面波谱的成长规律,由 (2.7) 式可知, 只须确定海面上势函数 $\tilde{\phi}$ 和速度场粘性部分垂直分量的某些导数即可。为此, 我们将上述方程作如下归纳:

由 (2.5) $\times\ ik_1$ + (2.6) $\times\ ik_2$, 则有

$$-2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_3} + [\nu + M(\mathbf{k})]\left[-|\mathbf{k}|^2\tilde{u}_{03} + \frac{\partial}{\partial x_3}(ik_1\tilde{u}_{01} + ik_2\tilde{u}_{02})\right]$$
$$= ik_1\bar{\tau}_1 + ik_2\bar{\tau}_2$$

再利用 (2.3), (2.2) 及 (2.4) 式则可得

$$\frac{\partial\tilde{u}_{03}}{\partial t} = -D\tau - 2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2\frac{\partial\zeta}{\partial t} \tag{2.9}$$

再由 (2.4) 式则可得

$$\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial t\partial x_3} = D\tau + \frac{\partial^2\tilde{\zeta}}{\partial t^2} + 2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2\frac{\partial\tilde{\zeta}}{\partial t} \tag{2.10}$$

其中

$$D\tau = (2\pi)^{-2}\int_{\mathbf{x}} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}_0 e^{-i\mathbf{kx}} d\,\mathbf{x}$$

这样，波面波数振幅谱演化过程即可归结为求解方程组 (2.1)，(2.2 之 3) 及边界条件 (2.9)，(2.10)，(2.7) 和 (2.8)。为了求解这个方程组，我们首先将所涉及的函数作如下延拓：

$$\psi(t) = \begin{cases}\psi(t) & t > 0,\\ 0 & t \leqslant 0,\end{cases}$$

并对变数 t 作 Fourier 变换 $(2\pi)^{-1}\int_t (\quad)e^{-i\sigma t}dt$，这样，在广义函数空间 z' 中，相应的方程组为：

$$\left(-|\mathbf{k}|^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\tilde{\phi}(\mathbf{k}, x_3, \sigma) = 0 \tag{2.11}$$

$$\left(i\sigma + [\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2 - [\nu + M(\mathbf{k})]\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\tilde{u}_{03}(\mathbf{k}, z, \sigma) = 0 \tag{2.12}$$

$$i\sigma\tilde{u}_{03}\rfloor_{x_3=0} = -\overline{D\tau}(\mathbf{k}, \sigma) - 2i\sigma[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2\tilde{\zeta}(\mathbf{k}, \sigma) \tag{2.13}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_3}\right\rfloor_{x_3=0} = (i\sigma + 2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2)\tilde{\zeta}(\mathbf{k}, \sigma) + \frac{\overline{D\tau}(\mathbf{k}, \sigma)}{i\sigma} \tag{2.14}$$

$$\left[i\sigma\tilde{\phi} + 2[\nu + M(\mathbf{k})]\frac{\partial^2\tilde{\phi}}{\partial x_3^2} + 2[\nu + M(\mathbf{k})]\frac{\partial\tilde{u}_{03}}{\partial x_3}\right]_{x_3=0} + \left(g + \frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^2\right)\tilde{\zeta}(\mathbf{k}, \sigma) + \frac{\bar{p}_0(\mathbf{k}, \sigma)}{\rho} = 0 \tag{2.15}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_3}\right\rfloor_{x_3=-\infty} = \tilde{u}_{03}\rfloor_{x_3=-\infty} = 0 \tag{2.16}$$

其中

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}, z, \sigma) = (2\pi)^{-1}\int_t \tilde{\psi}(\mathbf{k}, z, t)e^{-i\sigma t}dt,$$

由方程 (2.11) 和 (2.12) 考虑到边界条件 (2.16) 易知

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}, x_3, \sigma) = \bar{\phi}(\mathbf{k}, \sigma)e^{|\mathbf{k}|x_3}$$

$$\tilde{u}_{03}(\mathbf{k}, x_3, \sigma) = \bar{u}_{03}(\mathbf{k}, \sigma)e^{mx_3}$$

其中 $m = \sqrt{\frac{i\sigma}{\nu + M(\mathbf{k})} + |\mathbf{k}|^2}$，$R_e m > 0$。将这样的结果代入(2.13)，(2.14)及 (2.15)，则可得

$$i\sigma\bar{u}_{03} = -\overline{D\tau} - 2i\sigma[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2\bar{\zeta} \tag{2.17}$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{|\mathbf{k}|}\left[\frac{\overline{D\tau}}{i\sigma} + (i\sigma + 2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2)\bar{\zeta}\right] \tag{2.18}$$

$$(i\sigma + 2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2)\bar{\phi} + 2[\nu + M(\mathbf{k})]m\bar{u}_{03} + \left(g + \frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^2\right)\bar{\zeta} + \frac{\bar{p}_0}{\rho} = 0 \tag{2.19}$$

由 (2.17), (2.18) 消去 (2.19) 中的 $\bar{\Phi}$, $\bar{u}_{03}$, 则得描述波面波数振幅谱的演化方程:

$$\Big[(i\sigma + 2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2)^2 - 2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2 2[\nu + M(\mathbf{k})]m|\mathbf{k}| + \left(g|\mathbf{k}| + \frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^3\right)\Big]\bar{\zeta} + \left[1 + \frac{2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2}{i\sigma}\left(1 - \frac{m}{|\mathbf{k}|}\right)\right]\overline{D\tau} + \frac{|\mathbf{k}|}{\rho}\bar{p}_0 = 0 \tag{2.20}$$

这个方程类似一个振动系统,它清楚地揭示了外力场在生波过程中的作用方式,即正压力场的作用是直接的,而切向力则以散度场的形式起作用。

为了求解这个方程所描述的风浪成长过程,必须给出其中 $D\tau$ 和 $\bar{p}_0$ 的具体表达式,由附录可知,

$$\overline{D\tau} = \overline{D\tau}_0(\mathbf{k}, \sigma) - i\sigma|\mathbf{k}|L\bar{\zeta}(\mathbf{k}, \sigma)$$

其中

$$L = c_\tau \frac{\rho'}{\rho}|\mathbf{u}|(1 + \cos^2\alpha)\left(\frac{|\mathbf{u}|\cos\alpha}{c(\mathbf{k})} - 2\right);$$

而按 Phillips-Miles 理论, $\bar{p}_0$ 可写成两项和的形式,即

$$\bar{p}_0 = \bar{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma) - i\sigma\gamma\bar{\zeta}(\mathbf{k}, \sigma)$$

其中

$$\gamma \doteq -\frac{\pi\rho' c}{|\mathbf{k}|} \cdot \frac{U''}{U'}\Big|_{x_{3c}} \cdot \frac{W^2|_{x_{3c}}}{\bar{\zeta}^2} \equiv c\rho\theta_1,$$

Miles (1959) 根据 Orr-Sommerfeld 方程的数值解,计算了无量纲量

$$\beta \equiv \frac{\rho}{\rho'}\frac{\theta}{[U_1\cos\alpha/c]^2}$$

其中

$$U_1 = \kappa^{-1}u_*;$$

U 表示海面以上的风速剖面; x_{3c} 表示临界高度; $\overline{D\tau}_0(\mathbf{k}, \sigma)$ 和 $\bar{\omega}_0(\mathbf{k}, \sigma)$ 分别表示海面切向力散度场和压力场的非波生部分的波数振幅谱对 t 的 Fourier 变换, 将这些结果代入方程 (2.20),则可得如下方程:

$$\Big\{(i\sigma)^2 + i\sigma\left[4[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}|\left(L + \frac{\gamma}{\rho}\right)\right] + \left(g|\mathbf{k}| + \frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^3\right) + (2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2)^2\left[1 - \frac{m}{|\mathbf{k}|}\right] - 2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2\left(1 - \frac{m}{|\mathbf{k}|}\right)|\mathbf{k}|L\Big\}\bar{\zeta} + \left[1 + \frac{2[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2}{i\sigma}\left(1 - \frac{m}{|\mathbf{k}|}\right)\right]\overline{D\tau}_0 + \frac{|\mathbf{k}|}{\rho}\bar{\omega}_0 = 0 \tag{2.20'}$$

这就是我们所要求的以 σ 为变数的波面波数振幅谱的演化方程。

在风浪谱分析过程中,常可发现如下事实,即对于一随风区成长的波谱中的某一组成波来说,在传出距离为它的一个波长之后,该组成波的波幅变化率是不显著的。这表明在风浪谱段中,各组成波均是慢变化的。为此,我们用 JONSWAP 谱作了计算验证,如表 1 所示,不论对于较低频的峰频组成波, 或对于风波谱段中较高频组成波 (波长约 0.1 米), 或以非线性相互作用为显著特征的峰频前的组成波均有这一事实存在。这一事实表明方程 (2.21) 中 $i\sigma$ 一次项的系数与波动频率之比应为一小量,即有

$$\frac{\left|4[\nu + M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{k}|\left(L + \frac{\gamma}{\rho}\right)\right|}{\sigma'} \ll 1$$

表 1　JONSWAP 谱谱分量单位波长变化率（风速：40 米/秒）

无因次风区	$\tilde{x}$	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5
风　区	x　（米）	163	1632	16326	163265	1632650	16326500
波长为 0.1 米的组成波频率 $f_{\lambda=0.1}$	$f_{\lambda=0.1}\,(H_z)$	3.949	3.949	3.949	3.949	3.949	3.949
频率为 $f_{\lambda=0.1}$ 的谱分量的变化率	$\dfrac{E_x(f_{\lambda=0.1})-E_{x+10\lambda}^{(f_{\lambda=0.1})}}{10E_x(f_{\lambda=0.1})}$	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001	<0.001
峰　频　f_m	$f_m(H_z)$	0.8575	0.4011	0.1876	0.0877	0.0410	0.0192
峰频谱分量的变化率	$\dfrac{E_x(f_m)-E_{x+10\lambda m}^{(f_m)}}{10E_x(f_m)}$	0.004	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001
0.8 倍峰频	$0.8\,f_m(H_z)$	0.686	0.321	0.151	0.070	0.033	0.015
0.8 倍峰频谱分量的变化率	$\dfrac{E_x(0.8f_m)-E_{x+10\lambda 0.8fm}^{(0.8)}}{10E_x(0.8f_m)}$	0.10	0.04	0.02	0.01	<0.01	<0.01

因此

$$\frac{4[\nu+M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2}{\sigma'}\ll 1,\quad \frac{|\mathbf{k}|L}{\sigma'}\ll 1,\quad |\mathbf{k}|\frac{\gamma}{\rho}\Big/\sigma'\ll 1. \tag{2.21}$$

我们注意到 Miles (1962) 在他的工作中，曾作为先验条件而引入 $4[\nu+M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2/\sigma'\ll 1$ 这个条件。

对于其频率偏离 $\sigma'=\sqrt{g|\mathbf{k}|+\frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^3}$ 不大的实际波浪来说，考虑到 (2.21) 的量级关系，仅保留方程 (2.20′) 中量级低于

$$0\left[\frac{[\nu+M]|\mathbf{k}|^2}{\sigma'}\bar{\zeta},\ \frac{|\mathbf{k}|L}{\sigma'}\bar{\zeta},\ \frac{|\mathbf{k}|\frac{\gamma}{\rho}}{\sigma'}\bar{\zeta}\right]$$

的各项以及外扰动力的主要部分，则可得风波谱段中的波面波数振幅谱的演化方程

$$[(i\sigma)^2+i\sigma(-2m(\mathbf{k}))+\sigma'^2]\bar{\zeta}+\overline{W}=0 \tag{2.22}$$

其中

$$\sigma'^2=g|\mathbf{k}|+\frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^3,\quad m(\mathbf{k})=-2[\nu+M]|\mathbf{k}|^2+\frac{|\mathbf{k}|}{2}\left(L+\frac{\gamma}{\rho}\right)$$

$$\overline{W}(\mathbf{k},\sigma)=\overline{D\tau_0}(\mathbf{k},\sigma)+\frac{|\mathbf{k}|}{\rho}\bar{\omega}_0(\mathbf{k},\sigma)$$

或作平移变换 $\tilde{\sigma}=\sigma+im(\mathbf{k})$，则得

$$[(i\tilde{\sigma})^2+\sigma_1^2]\zeta'(\mathbf{k},\tilde{\sigma})+W'(\mathbf{k},\tilde{\sigma})=0$$

其中

$$\sigma_1^2=\sigma'^2-m^2,\quad \zeta'(\mathbf{k},\tilde{\sigma})=\bar{\zeta}(\mathbf{k},\tilde{\sigma}-im)$$

$$W'(\mathbf{k},\tilde{\sigma})=\overline{D\tau_0}(\mathbf{k},\tilde{\sigma}-im)+\frac{|\mathbf{k}|}{\rho}\bar{\omega}_0(\mathbf{k},\tilde{\sigma}-im)$$

这个方程在广义函数空间 z' 上的解应是：

$$\zeta'(\mathbf{k},\tilde{\sigma})=c_1\delta(\tilde{\sigma}-\sigma_1)+c_2\delta(\tilde{\sigma}+\sigma_1)+\frac{W'(\mathbf{k},\tilde{\sigma})}{\tilde{\sigma}^2-\sigma_1^2},$$

返回到 t 变数，则得

$$\zeta_1'(\mathbf{k},t)=c_1e^{i\sigma_1 t}+c_2e^{-i\sigma_1 t}-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}G(t-t_1)W_1'(\mathbf{k},t_1)dt_1$$
$$=A_1\sin\sigma_1 t+A_2\cos\sigma_1 t-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}G(t-t_1)W_1'(\mathbf{k},t_1)dt_1$$

其中 c_1, c_2 或 A_1, A_2 均为待定常数；ψ_1' 表示 ψ' 的 Fourier 反变换；$G(t)$ 如注*所示。

考虑到当 $t\leqslant 0$ 时，$\overline{W}(t)=0$ 以及 $\zeta_1'(\mathbf{k},t)=\bar{\zeta}(\mathbf{k},t)e^{-mt}$, $W_1'(\mathbf{k},t)=\overline{W}(\mathbf{k},t)e^{-mt}$ 和零初始条件

$$\bar{\zeta}(\mathbf{k},t)|_{t=0}=\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$$

则可得波面波数振幅谱的演化样本。

$$\bar{\zeta}(\mathbf{k},t)=-(2\pi\sigma_1)^{-1}\int_0^{\infty}\overline{W}(\mathbf{k},t_1)e^{m(t-t_1)}2\pi H(t-t_1)\sin\sigma_1(t-t_1)dt_1$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sigma_1}\displaystyle\int_0^t\overline{W}(\mathbf{k},t_1)e^{m(t-t_1)}\sin\sigma_1(t-t_1)dt_1, & \text{当 } t>0,\\ 0, & \text{当 } t\leqslant 0\end{cases}\tag{2.23}$$

其中

$$\overline{W}(\mathbf{k},t)=\overline{D\tau_0}(\mathbf{k},t)+\frac{|\mathbf{k}|}{\rho}\bar{\omega}_0(\mathbf{k},t)$$
$$\overline{D\tau_0}(\mathbf{k},t)=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbf{x}}\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_{00}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}d\mathbf{x},$$
$$\bar{\omega}_0(\mathbf{k},t)=(2\pi)^{-1}\int_{\mathbf{x}}p_{00}(\mathbf{x},t)e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}d\mathbf{x},$$
$$m(\mathbf{k})=-2[\nu+M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2+\frac{|\mathbf{k}|}{2}\left(L+\frac{\gamma}{\rho}\right).\tag{2.24}$$

* i) Fourier 反变换的卷积定理

$$\text{若 } g(\sigma)=(2\pi)^{-1}\int_t G(t)e^{-i\sigma t}dt$$

则

$$\int_\sigma g(\sigma)f(\sigma)e^{i\sigma t}d\sigma=(2\pi)^{-1}\int_{t_1}F(t_1)G(t-t_1)dt_1$$

ii) 计算 $G(t)=\displaystyle\int_\sigma\frac{-1}{\sigma^2-\sigma'^2}e^{i\sigma t}d\sigma$

$$G(t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-1}{\sigma^2-\sigma'^2}e^{i\sigma t}d\sigma=\frac{1}{\sigma'}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ipt}}{ip}dp\cdot\sin\sigma' t$$

而

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ipt}}{ip}dp\right)_t'=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ipt}dp=2\pi\delta(t)=2\pi(H(t))_t'$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ipt}}{ip}dp=2\pi H(t)+c$$

因为奇函数的 Fourier 变换仍是奇函数，因此应有 $c=-\pi$，即

$$G(t)=\frac{1}{\sigma'}[2\pi H(t)-\pi]\sin\sigma' t$$

其中 $H(t)$ 表示 Heaviside 单位函数。

三、综合模式的二维波数谱的导出

如果压力场非波生部分和切向力散度场非波生部分是均匀的，则波动场也是均匀的，即若

$$\Pi(\mathbf{k},t_1,t_2)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)=\overline{\bar{W}(\mathbf{k},t_1)\bar{W}^*(\mathbf{k}_1,t_2)}$$

$$\Phi(\mathbf{k},t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)=\overline{\zeta(\mathbf{k},t)\zeta^*(\mathbf{k}_1,t)} \tag{3.1}$$

则由 2.23 可知，

$$\Phi(\mathbf{k},t)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)=\frac{1}{\sqrt{(\sigma^2-m^2)(\sigma_1^2-m_1^2)}}\int_0^t\int_0^t\Pi(\mathbf{k},t_1,t_2)\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)$$

$$\times e^{-m(t_1-t)-m_1(t_2-t_1)}\sin\sqrt{\sigma^2-m^2}(t_1-t)\sin\sqrt{\sigma_1^2-m_1^2}(t_2-t)dt_1dt_2 \tag{3.2}$$

其中 $\Pi(\mathbf{k},t_1,t_2)$ 表示非波生外扰动场时间交相关的波数谱；$\Phi(\mathbf{k},t)$ 表示波面的波数谱；* 号表示复共轭数；上横号表示集合平均；m,σ 是 $\mathbf{k}$ 的函数；m_1,σ_1 是 $\mathbf{k}_1$ 的函数。

将 (3.2) 式在整个 $\mathbf{k}_1$ 平面上作积分，则得二维波数谱

$$\Phi(\mathbf{k},t)=\frac{1}{\sigma^2-m^2}\int_0^t\int_0^t\Pi(\mathbf{k},t_1,t_2)e^{2mt-m(t_1-t_2)}$$

$$\times\sin\sqrt{\sigma^2-m^2}(t_1-t)\sin\sqrt{\sigma_1^2-m_1^2}(t_2-t)dt_1dt_2, \tag{3.3}$$

进一步，我们假定压力场和切向力场的非波生部分不但是均匀的而且也是平稳的，即

$$\Pi(\mathbf{k},t_1,t_2)=\Pi(\mathbf{k},t_1-t_2)$$

则

$$\Phi(\mathbf{k},t)=\frac{1}{2(\sigma^2-m^2)}\int_0^t\int_0^t\Pi(\mathbf{k},t_1-t_2)e^{2mt-m(t_1+t_2)}$$

$$\times[\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}(t_1-t_2)-\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}((t_1+t_2)-2t)]dt_1dt_2$$

作变数变换

$$t_1-t_2=T_1,\quad t_1+t_2=T$$

则

$$\Phi(\mathbf{k},t)=\frac{1}{4(\sigma^2-m^2)}\iint_X\Pi(\mathbf{k},T_1)e^{2mt-mT}$$

$$\times[\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}T_1-\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}(T-2t)]dT_1dT$$

$$=\frac{e^{2mt}}{4(\sigma^2-m^2)}\left\{\int_0^t\Pi(\mathbf{k},T_1)\int_{T_1}^{-T_1+2t}e^{-mT}\right.$$

$$\times[\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}T_1-\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}(T-2t)]dT_1$$

$$+\int_{-t}^0\Pi(\mathbf{k},T_1)\int_{-T_1}^{T_1+2t}e^{-mT}$$

$$\left.\times[\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}T_1-\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}(T-2t)]dT_1\right\}$$

对上式第二项积分作变数变换

$$T_1=-T_1',$$

并注意到

$$\Pi(\mathbf{k},T)=\Pi(\mathbf{k},-T),$$

则有

$$\Phi(\mathbf{k}, t)=\frac{e^{2mt}}{2(\sigma^2-m^2)}\int_0^t \Pi(\mathbf{k}, T_1)\int_{T_1}^{-T_1+2t} e^{-mT}$$

$$\times[\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}T_1-\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}(T-2t)]dT_1$$

$$=\frac{e^{2mt}}{2(\sigma^2-m^2)}\left\{-\frac{1}{m}\int_0^t[e^{mT_1-2mt}-e^{-mT_1}]\Pi(\mathbf{k}, T_1)\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}T_1dT_1\right.$$

$$-\frac{1}{\sigma}\int_0^t(e^{mT_1-2mt}(-m\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}T_1-\sqrt{\sigma^2-m^2}\sin\sqrt{\sigma^2-m^2}T_1)$$

$$-e^{-mT_1}(-m\cos\sqrt{\sigma^2-m^2}(T_1-2t)$$

$$\left.+\sqrt{\sigma^2-m^2}\sin\sqrt{\sigma^2-m^2}(T_1-2t)))\Pi(\mathbf{k}, T_1)dT\right\} \tag{3.4}$$

因为风生波场是慢变化的，即有

$$0(\sigma)\gg 0(m)$$

据此，作为一种近似形式，我们仅保留 (3.4) 式的主要部分，并认为扰动谱 $\Pi(\mathbf{k}, T)$ 在 $T>1/\sigma$ 时实质上为 0，即认为非波生外扰动场的涡动时间尺度与 σ^{-1} 同量级，这样，我们就得到了二维波数谱的渐近表达式：

$$\Phi(\mathbf{k}, t)\doteq\frac{1}{2m\sigma^2}(e^{2mt}-1)\int_0^{t\sim\infty}\Pi(\mathbf{k}, T)\cos\sigma T dT$$

$$\doteq\frac{1}{2m\sigma^2}(e^{2mt}-1)\Pi(\mathbf{k}, \sigma) \tag{3.5}$$

其中 $\Pi(\mathbf{k}, \sigma)$ 表示加权的外扰动力场非波生部分的频率波数谱。

四、结 论

1. 本文从涡动粘性流体运动方程组出发，导出了在 z' 空间中的波面演化方程 (2.20) 和海波谱段的近似波面演化方程 (2.22)，它们表明，海波成长过程是一固有频率为 $\sigma'=\sqrt{g|\mathbf{k}|+\frac{T}{\rho}|\mathbf{k}|^3}$ 的振动系统，其外扰动力为加权 $\frac{|\mathbf{k}|}{\rho}$ 的波面正向力和波面切向力的散度场之和，一经给出波面正向力和切向力的合理形式，即可根据这两个方程确定波面的演化样本。

2. 基于 Phillips-Miles 理论和 Neŭmann 推广公式所给出的波面正向力和切向力的表达式，本文给出了在外力场非波生部分为均匀的和平稳的情况下的波数谱的表达式，它表明，切向力在生波过程中和正向力一样，也有共振和偶合两种作用方式，在正向力和切向力的联合作用下，二维波数谱将随时间呈线性-指数型成长。在 $mt<1$ 的时间间隔内，海波主要由共振作用而线性成长。而后由于已经产生的海波与大气的偶合作用，海波将按 e^{2mt} 呈指数型成长，其指数成长率 $2m$ 应包括三项：$\frac{|\mathbf{k}|\gamma}{\rho}$ 为正向力偶合能量吸收率；$|\mathbf{k}|L$ 为切向力偶合能量吸收率；$-4[\nu+M(\mathbf{k})]|\mathbf{k}|^2$ 为由于海水的粘滞性所造成的耗散。切向力的共振偶合作用和耗散作用是粘滞性的一对双生的效应。正如 (3.5) 式所示其比例系数 $\Pi(\mathbf{k}, \sigma)$ 也得到修正，它应是结论 1 中所指出的外扰动力的波数频率谱，而

Miles 的模式中它仅是加权 $\frac{|\mathbf{k}|}{\rho}$ 的正向力非波生部分的波数频率谱。

3. 与正向力偶合能量吸收率一样，切向力偶合能量吸收率 $|\mathbf{k}|L$ 具有显著的方向性，当风速与波数 $\mathbf{k}$ 同向时（$\cos\alpha > 0$），切向力将促使波浪成长，反之在风速与波数 $\mathbf{k}$ 反向时（$\cos\alpha < 0$），切向力将使波浪衰减。

4. 在 Sverdrup-Munk 的能量平衡方程式中

$$\frac{\rho g}{2}\frac{\partial A}{\partial t} = T_P + T_\tau - T_M$$

若取 $T_\tau = C_\tau\rho' U^2 k^2 c A$，$T_M = 2M'k^3c^2A$，则可得初生阶段切向力指数成长率为

$$2C_\tau \frac{\rho'}{\rho} U^2 k/c,$$

指数能量耗散率为

$$-4\frac{M'}{\rho}k^2$$

这与我们所得的结果相同，但应指出这是一种巧合。这主要是由于所取的参数类同而受量纲控制的结果。

5. 应当指出，考虑涡动粘滞作用的海波成长过程的更精细的研究，还有待于给出更合乎物理实际的海面切向力形式以及精确地确定与各组成波相对应的涡动粘滞系数。

附录：关于波面切向力的半经验公式——Neumann 经验公式的推广

在推广 Neumann 经验公式以获得海面切向力的近似表达式时，我们想象可将大气和水体划分为三部分，即：水气边界层及边界层的外部水体运动和外部大气运动。象一般边界层问题的处理方法一样，可认为边界层是一层极薄的流体，大气和海水通过它而相互作用。我们将用深处速度为 $\mathbf{u}$ 的理想大气绕流过随机波面

$$\zeta(\mathbf{x},t)=\int_{\mathbf{k}}\zeta_1(\mathbf{k},t)e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}d\mathbf{k}$$

时，水面附近的气流速度和水体速度作为边界层的外部速度，并认为大气通过边界层传递给水体的切向力与这两个外部速度的差 $\mathbf{u}$ 的平方成比例，且方向相同。这样，在波动是小振幅的和慢变化的条件下，容易得知

$$\boldsymbol{\tau}_0 = C_\tau\bar{\mathbf{u}}|\mathbf{u}| = \boldsymbol{\tau}_{00} + iC_\tau\frac{\rho'}{\rho}\int_{\mathbf{k}}\left(\cos\alpha\,\mathbf{u} + \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}|\mathbf{u}|\right)\left(\frac{|\mathbf{u}|\cos\alpha}{C(\mathbf{k})} - 2\right)\times\frac{\partial\zeta_1(\mathbf{k},t)}{\partial t}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}d\mathbf{k}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_0 = \operatorname{div}\boldsymbol{\tau}_{00} - \int_{\mathbf{k}}|\mathbf{k}|\,L\frac{\partial\zeta_1(\mathbf{k},t)}{\partial t}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}d\mathbf{k} \tag{A, 1}$$

其中

$$L = C_\tau\frac{\rho'}{\rho}|\mathbf{u}|\,(1+\cos^2\alpha)\left(\frac{|\mathbf{u}|\cos\alpha}{C(\mathbf{k})} - 2\right)$$

$\boldsymbol{\tau}_0$ 表示大气对海面的切向力；$\boldsymbol{\tau}_{00}$ 表示切向力 $\boldsymbol{\tau}$ 的非波生部分；α 表示风向和波向之间的夹角；ρ'，ρ 分别表示大气和海水的密度；$C(\mathbf{k})$ 表示波数为 $\mathbf{k}$ 的组成波波速；C_τ 为切向力系数。

在单个波且风与波同向的情况下，若风速远大于波速，由公式 (A,1) 容易得到周知的 Neumann 经验公式

$$\tau = C_t'\frac{\rho'}{\rho}U^2[1 + 2\pi\delta\sin k(x - ct)]$$

其中 δ 表示波陡；$\delta = H/\lambda$；H 为波高；λ 为波长，因此我们称 (A,1) 为 Neumann 经验公式的推广。

主要参考文献

[1] Gel'Fand, M. and G. E. Shilov, 1964. Generalized Functions. Academic Press. 423 pp.
[2] Kinsman, B., 1965. Wind waves. Prentice-Hall, Inc., Englewoor Cliffs, N. J. 676 pp.
[3] Miles, J. M. 1959, 1962. On the generation of surface waves by shear flow. Part 2 and Part 4. *Jour. Fluid Mech.* 6(4): 568—582, 13(3): 433—488.
[4] Phillips, O. M., 1966. The Dynamics of the Upper Ocean. Cambridge University Press. 261 pp.

A COMBINED MODEL FOR THE RESONANCE-COUPLING OF NORMAL PRESSURE AND SHEARING FORCE AND THE DISSIPATION BY EDDY VISCOSITY*

Yuan Yeli

(Institute of Oceanology, Academia Sinica)

ABSTRACT

A resolution of three-dimentional linear equations of the viscosity flow into the potential part and viscosity part is made in the first section.

From this an evalutional equation of the amplitude spectrum for the wave surface is derived. The solution of this equation in the interval of wind-wave spectrum shows that in the initial stage of the wind-generated wave the two-dimentional wave-number spectrum grows according to linear--exponentail low. The exponential growth rate of our model is the sum of the coupling energy absorption rates caused by normal pressure and shearing force and the dissipation rate by eddy viscosity. Then Miles' result (1962) is modified in our work.

* Contribution No. 422 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.