

风生沿岸上升流及沿岸流的一个非稳态模式*

胡敦欣

(中国科学院海洋研究所)

七十年代以来,有关沿岸上升流及沿岸流的研究受到了人们异乎寻常的重视。除其本身的理论意义之外,这主要还是因为世界上的鱼有一半是在面积仅占世界海洋总面积千分之一的沿岸上升流区捕获的缘故(Ryther, 1969)。由于广泛的海上调查,世界上新发现的上升流区愈来愈多。上升流已不再是东部边界流独具的特征了,在西部边界也发现了不少上升流区。

近十年来,在沿岸上升流和沿岸流的研究方面,美国及其它国家的海洋学家们取得了相当大的进展。一方面在观测方法和手段上有了巨大的变革(卫星、各种浮标和船只的联合观测),特别是垂直流速计的问世,为此项研究提供了宝贵的资料。另一方面,在理论研究方面,也有不少新的成就。主要在如下几方面:均匀海洋考虑海面坡度模式的研究;二层、多层或连续层化模式的研究;非稳态问题的研究以及着重考虑海底地形影响的研究。

Hidaka (1954) 由一个稳态均匀的无限深静压海洋导出了三维流速场的动力结构。而 Saito (1956) 则把 Hidaka 的理论推广为非稳态问题(O'Brien 1975)。但是,他的理论还是关于无限深海的,而且风仍取常量的有限风区。本文将把 Saito 的理论推广到浅海,而且风取(随时间和离岸距离)可变的任意风区。由文献(Lighthill, 1958)可知,本文中的所有函数都是可作为广义函数的普通函数。因此,本文的有关运算是在广义函数类 \mathcal{D}' 上进行的。这样我们就可以容易地越过普通函数的 Fourier 变换所要求的过于苛刻的绝对可积的条件。

一、问题的数学提法

假定:海岸为无限平直;海为等深(或无限深)均匀(ρ 为常量);所有的量纵向(沿岸方向)均匀;侧向与垂直向涡动粘滞系数均为常量。取 y 轴沿海岸线, x 轴取离岸为正, z 轴自平均海平面向下为正(如图1)。在不计非线性效应的情况下,则运动方程可写为:

$$\left. \begin{aligned} u_t - \frac{A_h}{\rho} u_{xx} - \frac{A_v}{\rho} u_{zz} - fv + g\zeta_x &= 0, \\ v_t - \frac{A_h}{\rho} v_{xx} - \frac{A_v}{\rho} v_{zz} + fu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

连续方程为

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第468号。
本文承毛汉礼教授指导和袁业立同志提过宝贵意见特此致谢。
本刊编辑部收到稿件日期:1978年10月4日。

$$u_x + w_z = 0, \quad (2)$$

边界条件与初始条件为:

$$z = 0 \quad \begin{cases} -A_v u_x = \tau^x(x, t), \\ -A_v v_x = \tau^y(x, t), \end{cases} \quad (3)$$

$$z = h \quad u = v = w = 0, \quad (4)$$

或

$$z \rightarrow \infty \quad u, v \text{ 为有限值}, \quad (5)$$

$$x = 0 \quad u = v = w = 0, \quad (6)$$

$$x \rightarrow \infty \quad \text{各量为有限值}, \quad (7)$$

$$t = 0 \quad u = v = w = \zeta = 0. \quad (8)$$

其中, u, v 分别为 x 轴和 y 轴方向上的流速分量, A_h, A_v 分别为水平向和垂直向的涡动粘滞系数, $f = 2\omega \sin \varphi$ 为常量, ζ 为海面升高, 仅为 x 和时间 t 的函数, ρ 为海水密度取常量, τ^x, τ^y 分别为风应力在 x 方向和 y 方向上的分量。令

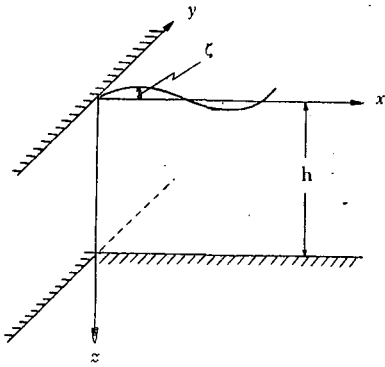


图1 北半球海洋模式

$$W = u + iv, \quad D_v = \pi \sqrt{\frac{A_v}{\rho \omega \sin \varphi}},$$

$$D_h = \pi \sqrt{\frac{A_h}{\rho \omega \sin \varphi}}, \quad \mu = \frac{\pi^2}{\omega \sin \varphi},$$

$$t = \mu T, \quad z = D_v Z, \quad x = D_h \xi, \quad y = D_h \eta, \quad h = D_v H.$$

则方程(1)可写成:

$$W_T - W_{\xi\xi} - W_{ZZ} + 2\pi^2 i W + \frac{g\mu}{D_h} \zeta_\xi = 0. \quad (9)$$

相应的边界条件和初始条件可写成:

$$-A_v W_z|_{z=0} = D_v [\tau^\xi(\xi, T) + i\tau^\eta(\xi, T)] = \tau(\xi, T) D_v, \quad (10)$$

$$W(\xi, H, T) = 0, \quad (11)$$

或

$$W(\xi, \infty, T) \text{ 为有限值}, \quad (12)$$

$$\xi \rightarrow \infty \text{ 时, 各量为有限值}, \quad (13)$$

$$W(\xi, Z, 0) = \zeta(\xi, 0) = 0. \quad (14)$$

二、求解和分析

首先就(9)–(14)式对变量 ξ 进行 Fourier 正弦变换。

令

$$\bar{W}(\lambda, Z, T) = F_\xi[W(\xi, Z, T)], \quad \gamma(\lambda, T) = F_\xi[\zeta_\xi(\xi, T)],$$

$$\bar{\tau}(\lambda, T) = \bar{\tau}^\xi(\lambda, T) + i\bar{\tau}^\eta(\lambda, T) = F_\xi[\tau(\xi, T)] = F_\xi[\tau^\xi(\xi, T) + i\tau^\eta(\xi, T)],$$

并令 $\bar{W} = W_1 e^{-i2\pi^2 T}$, 则(9)–(14)可变成如下形式:

$$W_{1T} - W_{1ZZ} + \lambda^2 W_1 = -\frac{\mu g}{D_h} \gamma(\lambda, T) e^{i2\pi^2 T} \quad (15)$$

$$\text{或} \left. \begin{aligned} -A_v W_{1z}|_{z=0} &= D_v \bar{\tau}(\lambda, T) e^{i2\pi^2 T}, \\ W_{1z}(\lambda, H, T) &= 0, \\ W_1(\lambda, \infty, T) &= \text{有限值}, \\ W_1(\lambda, Z, 0) &= \gamma(\lambda, 0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

这样, 我们的问题就归结为求方程 (15) 满足条件 (16) 的解。实际上, 这是一个具有变动热源与变动表面条件的热传导方程的边值问题。由杜哈美尔 (Duhamel) 定理可知, 若 $W_1(\lambda, Z, T)$ 是方程 (15) 满足条件 (16) 的解, 而 $\Phi(\lambda, Z, T, T')$ 为具有固定热源与固定表面条件的如下边值问题 (A) 的解:

$$\text{或} \left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial T} - \frac{\partial^2}{\partial Z^2} + \lambda^2 \right) \Phi(\lambda, Z, T, T') &= -\frac{\mu g}{D_h} \gamma(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'} \\ -A_v \Phi_z(\lambda, Z, T, T')|_{z=0} &= D_v \bar{\tau}(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'}, \\ \Phi(\lambda, H, T, T') &= 0, \\ \Phi(\lambda, \infty, T, T') &\text{为有限值}, \\ \Phi(\lambda, Z, 0, T') &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

则

$$W_1(\lambda, Z, T) = \frac{\partial}{\partial T} \int_0^T \Phi(\lambda, Z, T - T', T') dT'. \quad (17)$$

因此, 我们必须先求解边值问题 (A)。设 $\bar{\Phi}(\lambda, Z, P, T')$ 为 $\Phi(\lambda, Z, T, T')$ 关于变数 T 的拉普拉斯变换式, 即 $\bar{\Phi}(\lambda, Z, P, T') = L[\Phi(\lambda, Z, T, T')]$, 则问题 (A) 就可以变成如下形式:

$$\bar{\Phi}_{zz} - (\lambda^2 + P)\bar{\Phi} = \frac{\mu g}{D_h} \gamma(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'} \cdot \frac{1}{P} \quad (18)$$

$$-A_v \bar{\Phi}_z|_{z=0} = D_v \bar{\tau}(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'} \cdot \frac{1}{P}, \quad (19)$$

$$\bar{\Phi}(\lambda, H, P, T') = 0, \quad (20)$$

或

$$\bar{\Phi}(\lambda, \infty, P, T') \text{为有限值。} \quad (21)$$

显然, 方程 (18) 的通解是:

$$\bar{\Phi} = C_1 e^{a_1 z} + C_2 e^{-a_1 z} - \frac{a_2}{a_1^2}. \quad (22)$$

式中

$$a_1^2 = \lambda^2 + P,$$

$$a_2 = \frac{\mu g}{D_h} \gamma(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'} \cdot \frac{1}{P}.$$

为了确定积分常数 C_1 和 C_2 , 除了海面边界条件之外, 还要用到海底的边界条件, 所以为方便起见, 我们分无限深海和有限深海两种情况来讨论。

1. 无限深海的情况

由 (21) 式, 显然可得 $C_1 = 0$ 。由 (19) 式可求得

$$C_2 = \frac{D_v \bar{\tau}(\lambda, T')}{A_v a_1 P} e^{i2\pi^2 T'}.$$

这样, (22) 式满足 (19) 和 (21) 的特解为:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\lambda, Z, P, T') &= \frac{D_v \bar{\tau}(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'}}{A_v} \cdot \frac{1}{P\sqrt{P+\lambda^2}} \exp[-\sqrt{P+\lambda^2}Z] \\ &\quad - \frac{\mu g}{D_h} \gamma(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'} \cdot \frac{1}{P(P+\lambda^2)}. \end{aligned} \quad (23)$$

则 (Диткин и Прудников, 1965)

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\lambda, Z, T, T') &= L^{-1}[\bar{\Phi}(\lambda, Z, P, T')] \\ &= \frac{D_v \bar{\tau}(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'}}{2A_v \lambda} \left[e^{-\lambda Z} \text{Erfc}\left(\frac{Z}{2\sqrt{T}} - \sqrt{T}\lambda\right) - e^{\lambda Z} \text{Erfc}\left(\frac{Z}{2\sqrt{T}} + \sqrt{T}\lambda\right) \right] \\ &\quad - \frac{\mu g}{D_h} \gamma(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'} \cdot \frac{1}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda^2 T}). \end{aligned} \quad (24)$$

由 (17) 式立刻可得

$$\begin{aligned} W_1(\lambda, Z, T) &= \frac{D_v}{\sqrt{\pi} A_v} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-T'}} \exp\left[i2\pi^2 T' - \frac{Z^2}{4(T-T')}\right] \bar{\tau}(\lambda, T') e^{-(T-T')\lambda^2} dT' \\ &\quad - \frac{\mu g}{D_h} \int_0^T \exp[-(T-T')\lambda^2 + i2\pi^2 T'] \gamma(\lambda, T') dT'. \end{aligned} \quad (25)$$

从而容易得到 (Erdelyi et al., 1954) 无限深海情况下非稳态风生海流的水平流速表达式

$$\begin{aligned} W(\xi, Z, T) &= e^{-i2\pi^2 T} \{F_s^{-1}[W_1]\} \\ &= \frac{D_v}{2\pi A_v} \int_0^T \frac{e^{-i2\pi^2 T_1}}{T_1} \cdot e^{-Z^2/4T_1} dT_1 \int_0^\infty \tau(\alpha, T-T_1) [e^{-(\xi-\alpha)^2/4T_1} \\ &\quad - e^{-(\xi+\alpha)^2/4T_1}] d\alpha - \frac{g\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\pi} A_h/\rho} \int_0^T \frac{e^{-i2\pi^2 T_1}}{T_1} dT_1 \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} \\ &\quad \cdot [e^{-(\xi-\alpha)^2/4T_1} - e^{-(\xi+\alpha)^2/4T_1}] d\alpha. \end{aligned} \quad (26)$$

将上式的实部和虚部分开, 容易得到两个水平流速分量的表达式:

$$\begin{aligned} u(\xi, Z, T) &= \frac{D_v}{2\pi A_v} \int_0^T \frac{1}{T_1} e^{-Z^2/4T_1} dT_1 \int_0^\infty [\tau^\xi(\alpha, T-T_1) \cos 2\pi^2 T_1 \\ &\quad + \tau^\eta(\alpha, T-T_1) \sin 2\pi^2 T_1] \cdot [e^{-(\xi-\alpha)^2/4T_1} - e^{-(\xi+\alpha)^2/4T_1}] d\alpha \\ &\quad - \frac{g\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\pi} A_h/\rho} \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} [e^{-(\xi-\alpha)^2/4T_1} - e^{-(\xi+\alpha)^2/4T_1}] d\alpha, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} v(\xi, Z, T) &= \frac{D_v}{2\pi A_v} \int_0^T \frac{1}{T_1} e^{-Z^2/4T_1} dT_1 \int_0^\infty [\tau^\eta(\alpha, T-T_1) \cos 2\pi^2 T_1 \\ &\quad - \tau^\xi(\alpha, T-T_1) \sin 2\pi^2 T_1] \cdot [e^{-(\xi-\alpha)^2/4T_1} - e^{-(\xi+\alpha)^2/4T_1}] d\alpha \\ &\quad + \frac{g\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\pi} A_h/\rho} \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} [e^{-(\xi-\alpha)^2/4T_1} - e^{-(\xi+\alpha)^2/4T_1}] d\alpha. \end{aligned} \quad (28)$$

由上述结果可以看出, 水平流速有两部分组成。第一项为纯漂流, 即直接由海面风应力驱动而生的, 这一项随深度 Z 的增加以指数形式迅速衰减。第二项则是由纯漂流产生的海面坡度所引起的流动。由公式可以看出, 这后一项与深度 Z 无关, 即如果海面一旦产

生坡度, 则由此产生的流速从上到下直至无限深的地方都是一样的。这就意味着海水运动的动能是无限的了。因为, 即使海面坡度再小, 只要它有了个非零的有限值, 就会有上述推论结果。但是必须指出, 这一结果是不符合能量守恒原理的。因为风生海流的全部能量均来源于海面的风, 而速度有限的风是不可能产生能量无限的海流的。所以在这种情况下, 海面坡度必须为零。这就是说, 当海洋的深度趋于无限时, 即使在近岸, 风生海面坡度也必将趋于零。这样, (5) 式中所取的边界条件, 即当 $Z \rightarrow \infty$ 时, u, v 为有限值, 这个有限值必须是零。这就是通常所取的 $Z \rightarrow \infty$ 时流速为零的条件。至此, 我们马上可以由连续方程求得无限深海风生垂直流速的表达式:

$$\begin{aligned} \omega(\xi, Z, T) = & \frac{D_v^2}{4\sqrt{\pi} A_v D_h} \int_0^T \frac{1}{T_1^{3/2}} \operatorname{Erf}\left(\frac{Z}{2\sqrt{T_1}}\right) dT_1 \int_0^\infty [\tau^\xi(\alpha, T - T_1) \cos 2\pi^2 T_1 \\ & + \tau^\eta(\alpha, T - T_1) \sin 2\pi^2 T_1] [(\xi - \alpha)e^{-(\xi - \alpha)^2/4T_1} - (\xi + \alpha)e^{-(\xi + \alpha)^2/4T_1}] d\alpha. \end{aligned} \quad (29)$$

2. 有限深海的情况

当我们假定海洋为等深, 即海底 $Z = H = \text{常数}$, 则 (22) 式满足 (19) 和 (20) 的特解如下:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\lambda, Z, P, T') = & \frac{D_v \bar{v}(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'}}{A_v} \cdot \frac{1}{P\sqrt{P + \lambda^2}} \cdot \frac{\operatorname{sh}[\sqrt{P + \lambda^2}(H - Z)]}{\operatorname{ch}[\sqrt{P + \lambda^2}H]} \\ & + G \frac{1}{P(P + \lambda^2)} \cdot \frac{\operatorname{ch}[\sqrt{P + \lambda^2}Z]}{\operatorname{ch}[\sqrt{P + \lambda^2}H]} - G \frac{1}{P(P + \lambda^2)}. \end{aligned} \quad (30)$$

式中

$$G = \frac{\mu g}{D_h} \gamma(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'}.$$

同样, 对 (30) 式进行拉普拉斯反变换可得 (Oberhettinger and Badii, 1973)

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, Z, T, T') = & L^{-1}[\bar{\Phi}(\lambda, Z, P, T')] \\ = & \frac{D_v \bar{v}(\lambda, T') e^{i2\pi^2 T'}}{A_v H} \int_0^T \theta_1\left(\frac{H - Z}{2H} \middle| \frac{i\pi(T - \tau)}{H^2}\right) e^{-\lambda^2(T - \tau)} d\tau \\ & + \frac{G}{H} \int_0^T \frac{1}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda^2 \tau}) \frac{\partial}{\partial Z} \theta_1\left(\frac{Z}{2H} \middle| \frac{i\pi(T - \tau)}{H^2}\right) e^{-\lambda^2(T - \tau)} d\tau \\ & - G \frac{1}{\lambda^2} (1 - e^{-\lambda^2 T}). \end{aligned} \quad (31)$$

式中 θ_1 为西塔函数, 记为 $\theta_1(v|\tau) = (-i\tau)^{-1/2} \sum_{\eta=-\infty}^{\infty} (-1)^\eta e^{-i\pi(v - \frac{1}{2} + \eta)2/\tau}$ 再由 (17) 式可以得到

$$\begin{aligned} W_1 = & \frac{D_v}{A_v H} \int_0^T e^{i2\pi^2 T'} \theta_1\left(\frac{H - Z}{2H} \middle| \frac{i\pi(T - T')}{H^2}\right) \bar{v}(\lambda, T') e^{-\lambda^2(T - T')} dT' \\ & + \frac{\mu g}{HD_h} \int_0^T e^{i2\pi^2 T'} dT' \int_0^{T - T'} \gamma(\lambda, T') e^{-\lambda^2(T - T')} \frac{\partial}{\partial Z} \theta_1\left(\frac{Z}{2H} \middle| \frac{i\pi T_1}{H^2}\right) dT_1 \\ & - \frac{\mu g}{HD_h} \int_0^T e^{i2\pi^2 T'} \gamma(\lambda, T') e^{-\lambda^2(T - T')} dT', \end{aligned} \quad (32)$$

进而就可以得出 (Erdelyi et al., 1954) 有限深海非稳态风生海流的水平复速度表达式

$$W(\xi, Z, T) = e^{-i2\pi^2 T} F_r^{-1}[W_1]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{D_v}{2A_v H \sqrt{\pi}} \int_0^T \frac{e^{-i2\pi^2 T_1}}{T_1^{1/2}} \theta_1 \left(\frac{H-Z}{2H} \middle| \frac{i\pi T_1}{H^2} \right) dT_1 \int_0^\infty \tau(\alpha, T-T') E d\alpha \\
&\quad + \frac{g\mu}{2\sqrt{\pi} D_h H} \int_0^T \frac{e^{-i2\pi^2 T_1}}{T_1^{1/2}} dT_1 \int_0^{T_1} \frac{\partial}{\partial Z} \theta_1 \left(\frac{Z}{2H} \middle| \frac{i\pi\nu}{H^2} \right) d\nu \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} E d\alpha \\
&\quad - \frac{g\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\pi} A_h / \rho} \int_0^T \frac{e^{-i2\pi^2 T_1}}{T_1^{1/2}} dT_1 \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} E d\alpha. \tag{33}
\end{aligned}$$

其分量形式为:

$$\begin{aligned}
u(\xi, Z, T) &= \frac{D_v}{2A_v H \sqrt{\pi}} \int_0^T \frac{1}{T_1^{1/2}} \theta_1 \left(\frac{H-Z}{2H} \middle| \frac{i\pi T_1}{H^2} \right) dT_1 \\
&\quad \cdot \int_0^\infty [\tau^\xi(\alpha, T-T_1) \cos 2\pi^2 T_1 + \tau^\eta(\alpha, T-T_1) \sin 2\pi^2 T_1] E d\alpha \\
&\quad + \frac{g\mu}{2\sqrt{\pi} D_h H} \int_0^T \frac{\cos 2\pi^2 T_1}{T_1^{1/2}} dT_1 \int_0^{T_1} \frac{\partial}{\partial Z} \theta_1 \left(\frac{Z}{2H} \middle| \frac{i\pi\nu}{H^2} \right) d\nu \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} E d\alpha \\
&\quad - \frac{g\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\pi} A_h / \rho} \int_0^T \frac{\cos 2\pi^2 T_1}{T_1^{1/2}} dT_1 \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} E d\alpha, \tag{34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(\xi, Z, T) &= \frac{D_v}{2A_v H \sqrt{\pi}} \int_0^T \frac{1}{T_1^{1/2}} \theta_1 \left(\frac{H-Z}{2H} \middle| \frac{i\pi T_1}{H^2} \right) dT_1 \\
&\quad \cdot \int_0^\infty [\tau^\eta(\alpha, T-T_1) \cos 2\pi^2 T_1 - \tau^\xi(\alpha, T-T_1) \sin 2\pi^2 T_1] \cdot E d\alpha \\
&\quad - \frac{g\mu}{2\sqrt{\pi} D_h H} \int_0^T \frac{\sin 2\pi^2 T_1}{T_1^{1/2}} dT_1 \int_0^{T_1} \frac{\partial}{\partial Z} \theta_1 \left(\frac{Z}{2H} \middle| \frac{i\pi\nu}{H^2} \right) d\nu \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} E d\alpha \\
&\quad + \frac{g\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\pi} A_h / \rho} \int_0^T \frac{\sin 2\pi^2 T_1}{T_1^{1/2}} dT_1 \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} E d\alpha, \tag{35}
\end{aligned}$$

式中 $E = e^{-(\xi-\alpha)^2/4T_1} - e^{-(\xi+\alpha)^2/4T_1}$ 。由连续方程, 马上可以求得其垂直流速表达式

$$\begin{aligned}
w(\xi, Z, T) &= \frac{D_v^2}{4A_v \sqrt{\pi} D_h H} \int_0^T \frac{1}{T_1^{3/2}} dT_1 \int_H^Z \theta_1 \left(\frac{H-Z}{2H} \middle| \frac{i\pi T_1}{H^2} \right) dZ \\
&\quad \cdot \int_0^\infty [\tau^\xi(\alpha, T-T_1) \cos 2\pi^2 T_1 + \tau^\eta(\alpha, T-T_1) \sin 2\pi^2 T_1] \cdot E_a d\alpha \\
&\quad + \frac{gD_v\mu}{4\sqrt{\pi} D_h^2 H} \int_0^T \frac{\cos 2\pi^2 T_1}{T_1^{3/2}} dT_1 \int_0^{T_1} \left[\theta_1 \left(\frac{Z}{2H} \middle| \frac{i\pi\nu}{H^2} \right) - \theta_1 \left(\frac{1}{2} \middle| \frac{i\pi\nu}{H^2} \right) \right] d\nu \\
&\quad \cdot \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} E_a d\alpha + \frac{g\sqrt{\mu}(H-Z)D_v}{4\sqrt{\pi} A_h / \rho D_h} \int_0^T \frac{\cos 2\pi^2 T_1}{T_1^{3/2}} dT_1 \\
&\quad \cdot \int_0^\infty \frac{\partial \zeta(\alpha, T-T_1)}{\partial \alpha} E_a d\alpha. \tag{36}
\end{aligned}$$

式中 $E_a = (\xi - \alpha) e^{-(\xi-\alpha)^2/4T_1} - (\xi + \alpha) e^{-(\xi+\alpha)^2/4T_1}$ 。

3. 海面坡度的确定

上面已经讨论过, 在海深为无限的情况下, 海面坡度趋于零 ($\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \rightarrow 0$)。因此, 由 (27)–(29) 根据实测的风场可以算出三维流速场的结构图式。

但是, 在有限深海的情况下, 在近岸区必然产生海面坡度, 也就是说 $\partial \zeta / \partial \xi$ 在近岸区必有非零值。这样, 在计算有限深海的三维流速时, 就必须考虑海面坡度对流场的贡献。尽管随着技术科学的发展, 海上测量手段有了巨大的变革, 人们利用卫星可以测得海上的风速、风向和水位, 但是, 目前用卫星测量海面高度的精度还只能达到 ± 20 厘米; 即使美国预计 1978 年发射的海洋卫星, 测量海面高度的精度也只能达到 ± 10 厘米 (渡边贯太郎, 1977), 这还不能满足中尺度海流研究的需要。因为, 一般说来, $O(fv) = 10^{-3}$, 在现有测量误差情况下, 要使得 $O\left(g \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 10^{-3}$, Δx 的量级就必须为几百公里以上。似乎可以这样认为, 当卫星测量海面高度的精度再提高一些的话, 譬如 $O(\Delta \zeta) = 1$ ($\Delta \zeta$ 为测量误差) 或更小, 则根据卫星连续测得的海面风速和海面坡度由公式 (34)–(36) 就可以算出浅海风生非稳态的流速场。但是目前还做不到, 海面坡度还只能通过其他途径来解决。

我们由连续方程可以求得如下海面高度的公式:

$$\begin{aligned}
 \zeta(\xi, T) = & D \int_0^T dT_2 \int_0^{T_2} \frac{dT_1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \int_0^H e^{-(Z-2nH)^2/4T_1} dZ \\
 & \cdot \int_0^{\infty} [\tau^{\xi}(\alpha, T - T_1) \cos 2\pi^2 T_1 + \tau^{\eta}(\alpha, T - T_1) \sin 2\pi^2 T_1] \cdot E_a d\alpha \\
 & + G_1 \int_0^T dT_2 \int_0^{T_2} \frac{\cos 2\pi^2 T_1}{T_1^{3/2}} dT_1 \int_0^{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot \left[\frac{e^{-n^2 H^2/4t_1} - e^{-(2n-1)^2 H^2/4t_1}}{t_1^{1/2}} \right] dt_1 \\
 & \cdot \int_0^{\infty} \frac{\partial \zeta(\alpha, T - T_1)}{\partial \alpha} E_a d\alpha - G_2 \int_0^T dT_2 \int_0^{T_2} \frac{\cos 2\pi^2 T_1}{T_1^{3/2}} dT_1 \int_0^{\infty} \frac{\partial \zeta(\alpha, T - T_1)}{\partial \alpha} E_a d\alpha \\
 & - \frac{2D}{D_v} \int_0^T \frac{\partial \zeta(\xi, T_2)}{\partial \xi} dT_2 \int_0^{T_2} \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 H^2/4T_1} dT_1 \\
 & \cdot \int_0^{\infty} [\tau^{\xi}(\alpha, T - T_1) \cos 2\pi^2 T_1 + \tau^{\eta}(\alpha, T - T_1) \sin 2\pi^2 T_1] E d\alpha \\
 & + \frac{G_1}{D_v} \int_0^T \frac{\partial \zeta(\xi, T_2)}{\partial \xi} dT_2 \int_0^{T_2} \frac{\cos 2\pi^2 T_1}{T_1^{1/2}} dT_1 \cdot \int_0^{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{n(2n-1)H}{t_1^{3/2}} \\
 & \cdot e^{-(2n-1)^2 H^2/4t_1} dt_1 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\partial \zeta(\alpha, T - T_1)}{\partial \alpha} E d\alpha + \frac{2G_2}{D_v} \int_0^T \frac{\partial \zeta(\xi, T_2)}{\partial \xi} dT_2 \\
 & \cdot \int_0^{T_2} \frac{\cos 2\pi^2 T_1}{T_1^{1/2}} dT_1 \int_0^{\infty} \frac{\partial \zeta(\alpha, T - T_1)}{\partial \alpha} E d\alpha. \tag{37}
 \end{aligned}$$

式中

$$D = \frac{\mu D_v^2}{4\pi A_v D_h}, \quad G_1 = \frac{g\mu^2 D_v}{4\pi D_h^2}, \quad G_2 = \frac{g\mu^{3/2} D_v H}{4\sqrt{\pi A_h/\rho} D_h}.$$

这样,在作数值计算时,我们可以以所分时间间隔按如下顺序进行:对于第一个时刻先用第一项算出对应于各个 ξ 的海面 ζ 值,同时算出此刻的海面坡度 $\partial\zeta/\partial\xi$ 。再求下一相邻时刻对应于各个 ξ 的海面 ζ ,这时公式(37)第二至第六项中的海面坡度正好用上时刻所算出的值代入,算出这一时刻的 ζ 值之后,接着再求出这一时刻的海面坡度 $\partial\zeta/\partial\xi$ 。依次类推算下去,可以算得任意时刻 T 海面的形状 $\zeta(\xi, T)$ 和海面坡度 $\partial\zeta(\xi, T)/\partial\xi$ 。同时,由算得的 $\partial\zeta/\partial\xi$ 值代入(34)–(36)就可以算出对应时刻的三维流速值。

三、讨 论

1. Saito 把 Hidaka 的理论推广到非稳态的情况,但仍取有限的均匀风区。本文则把 Saito 的理论推广到有限深海和可变风(随时间和离岸距离都可变)的情况。显然,把无限深海的模式推广到有限深海的情况,近岸必产生海面坡度,这在方程里必须增加压力梯度项。此外,海面风应力取可变的无限风区,这就增加了求解的困难。本文通过杜哈美尔定理和引用广义函数的概念,从而求得了流速的表达式。

显然,当海为无限深($H \rightarrow \infty$) (海面坡度消失),风为常量 τ ,风区宽度为 L 时,则本文的解(33)可简化为:

$$W(\xi, Z, T) = \frac{D_v \tau}{A_v \sqrt{\pi}} \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T_1}} \exp\left(-\frac{Z^2}{4T_1} + i2\pi^2 T_1\right) \cdot \left\{ \operatorname{Erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{T_1}}\right) - \frac{1}{2} \left[\operatorname{Erf}\left(\frac{\xi+L}{2\sqrt{T_1}}\right) + \operatorname{Erf}\left(\frac{\xi-L}{2\sqrt{T_1}}\right) \right] \right\} dT_1.$$

这就是 Saito 的解。由此可见,本文的解要比 Saito 的解普遍得多。

2. 当风应力在整个空间取常量 τ ,而且流趋于稳态($T \rightarrow \infty$)的情况下,本文有限深海的解(33)的纯漂流部分可作如下简化为:

$$W_\tau = \frac{D_v \tau}{2A_v \sqrt{\pi} H} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-i2\pi^2 T_1}}{\sqrt{T_1}} \theta_1\left(\frac{H-Z}{2H} \middle| \frac{i\pi T_1}{H^2}\right) \cdot E dT_1 \\ = \frac{2D_v \tau}{\pi A_v} \int_0^\xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n K_0(a\sqrt{(Z-2nH)^2 + \eta^2}) d\eta.$$

式中 $a = e^{i\pi/4} \sqrt{2} \pi$ 。这就是李心铭、汪景庸(1965)的解。也就是说李、汪关于有限深海近岸风海流的解仅为本文(33)当风为常值($\tau = \text{constant}$)海流趋于稳定($T \rightarrow \infty$)的简单情况下解的一部分(纯漂流部分)。

综上所述,似乎可以说本文是 Saito 理论的推广,也可以说是李、汪模式的推广。

3. 由(33)–(37)可以看到:

- a. 海流成长时间与局地时间 t 的大小无直接关系,而与无维时间 T 的大小有关;
- b. 环流空间结构的大小与局地空间的大小无直接关系,而与无维空间 (ξ, Z) 的大小有关。结论是高纬度区海流成长得比低纬度区快,而其环流结构的局地空间高纬度区要比低纬度区小。这也就是说风海流在 (T, ξ, Z) 时空尺度内是相似的;
- c. 由于地转的作用,海流和海面在成长过程中将随时间作周期性变化和振荡。在 $\varphi = 30^\circ$ 的地方,其周期为 24 小时,其变幅随时间而减小。

4. 为了考查岸边摩擦对海流的影响, 先将 (33) 中纯漂流项 (w_r), 在风应力为常量的情况下进行简化, 这时

$$w_r = \frac{Dv\tau}{A_v H} \int_0^T e^{-i2\pi^2 T_1 \theta_1} \left(\frac{H-Z}{2H} \left| \frac{i\pi T_1}{H^2} \right. \right) \operatorname{Erf} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{T_1}} \right) dT_1.$$

由上式可见, 岸边摩擦对海流的影响是以误差函数形式 ($\operatorname{Erf}(\xi/2\sqrt{T_1})$) 呈现的。对某一时刻来说, 离岸距离 (ξ) 大于某个值 (ξ_a) 之后, 则误差函数趋于 1 (当 $\xi/2\sqrt{T_1} > 1.82$ 时, 则 $\operatorname{Erf}(\xi/2\sqrt{T_1}) > 0.99$), 这就是说, 当 $\xi > \xi_a$ 时岸边的影响甚微。更重要的结果是, 由 $\operatorname{Erf}(\xi/2\sqrt{T_1})$ 可以看出, 岸边摩擦影响的宽度是时间的函数, 时间愈短, 影响宽度愈窄。

由于 ξ 在 (33) 式后两项 (w_s) 中的位置与在 w_r 中的位置是一样的, 所以岸边对 w_s 的影响也同上, 即对某一时刻来说, 当 ξ 大于某个值 ξ_a 之后, 流速与 ξ 就无多大关系了。这一点是极为重要的。因此, 当 $\xi > \xi_a$, 则横向输送满足 $\frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} = 0$, 从而 $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$, 即在 $\xi > \xi_a$ 的地方海面将不产生起伏 (当然, 这必须是在常量风的情况下), 海面坡度仅在 $\xi < \xi_a$ 的近岸区产生。上面已讲过, ξ_a 是时间的函数, 这样似乎可以得出结论: 当常量风加到海面之后, 有限深海海面坡度的产生, 先从岸边开始, 随时间的增加, 其范围逐渐向外扩展, 直到摩擦宽度为止。近岸由于海面坡度的产生, 其沿岸流 v 相对外海而言, 必有一附加成分, 从而产生沿岸射流。这种现象不仅在美国沿岸存在, 在其他沿岸同样也已观测到。似乎可以认为, 即使在均匀的平底海洋, 沿岸射流也照常可以产生, 这主要是海岸对海流的粘滞作用和连续性要求造成的。

参 考 文 献

- [1] 李心铭、江景镛, 1965. 位势理论和象方法在风海流与升降流研究中的应用. 海洋与湖沼 7(2):94—112.
- [2] Lighthill M. J., 1958. 傅里叶分析与广义函数引论(王建华译). 科学出版社, 81 页.
- [3] Sneddon I. N., 1951. 傅里叶变换。(何衍璋、张燮译). 科学出版社, 645 页.
- [4] 渡边贯太郎, 1977. 海洋研究に利用可能な人工卫星资料. 海洋科学 9(16):39—44.
- [5] Erdelyi, A. et al., 1954. Tables of Integral Transforms. Vol. 1, McGraw-Hill. 391 pp.
- [6] Hidaka, K., 1954. A contribution to the theory of upwelling and coastal currents. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 35(3):431—444.
- [7] Oberhettinger, F. and L. Badii, 1973. Tables of Laplace Transforms. Springer Verlag. 428 pp.
- [8] O'Brien, J. J., 1975. Models of coastal upwelling. In Numerical Models of Ocean Circulation, 204—215, NAS.
- [9] Ryther, J. H., 1969. Photosynthesis and fish production in the sea. *Science*, 166:72—76.
- [10] Saito, Y., 1956. The theory of the transient state concerning upwelling and coastal current. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 37(1):38—42.
- [11] В. А. Диткин и А. П. Прудников, 1965. Справочник по Операционному Исчислению. Изд. Высшая Школа. 465 pp.

**A TIME-DEPENDENT MODEL CONCERNING WIND-DRIVEN
UPWELLING AND COASTAL CURRENT IN SHALLOW
SEA WITH UNIFORM DEPTH***

Hu Dunxin

(Institute of Oceanology, Academia Sinica)

ABSTRACT

Saito extended Hidaka's well-known theory on upwelling to an unsteady state, but his theory still dealt with problems concerning infinitely deep ocean, and the region of wind accepted was still finite and uniform.

In the present paper Saito's theory is further extended to such a case where the sea is shallow (finitely deep) and the wind is variable with both time and distance away from coast. Evidently, in the coastal region of shallow sea surface slope must exist, so that the term of pressure gradient in equation of motion has to be considered. In addition, the region where wind blows is considered a variable one. Under such cases, difficulties arise in mathematical manipulations. However, by employing Duhamel's theorem and concept of generalized function the expressions of current velocity are obtained.

It is concluded that, when constant wind is abruptly applied on surface of shallow sea, the slope of sea surface will take place from the very coastal line first and then gradually extend offshore to the friction width D_h with time; in the meantime, the width of effect of coast friction is a function of time, namely, the shorter the time the narrower the width. Finally, we come to another conclusion that the phenomenon coastal jet may also exist even in the sea with uniform depth and homogeneous density. Then, it appears that the effect of coast friction on current and the continuity requirement are the main reasons responsible for such an existence.

* Contribution No. 468 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.