第10卷 第3期　　海 洋 与 湖 沼　　Vol. 10, No. 3
1979 年 7 月　　OCEANOLOGIA ET LIMNOLOGIA SINICA　　July, 1979

黄海潮能的消耗*

方 国 洪
（中国科学院海洋研究所）

本文的计算表明，在黄海，主要太阴和主要太阳半日分潮所具有的潮能大约为 2.3×10^{22} 尔格。在黄海海面上所观测到的风速平均约为 7 米/秒。在这个风力作用下，海浪的平均波高大约为 0.8 米，因而整个黄海海浪所具有的能量平均不会超过大约 0.3×10^{22} 尔格。而在这个风力作用下，风海流所具有的能量则更小。因此一般情况下，在黄海发生的各种动力学过程中，潮汐是一种相当重要的运动。对这种运动过程作深入的研究，不仅对其本身而且对其他动力学过程的研究都有重要的意义。

早在半个多世纪以前，Jeffreys (1921) 在研究世界各个浅水海区的潮汐摩擦时，就对黄海潮能的消耗量进行过估算。由于当时观测资料的缺乏，计算是比较粗略的。同时在这篇论文中，Jeffreys 还统计了世界各地 S_2 和 M_2 分潮的振幅比，得到平均值为 1:2.73，显著小于引潮力的振幅比 1:2.15。他指出，这一现象产生自摩擦的非线性。但是他的这一观点在其后相当长的一段时间里似乎没有引起海洋学家们充分注意。例如许多海洋学家都注意到在北海这个比值自北向南减小，但是在解释这个现象时都没有提到摩擦的非线性这个重要的因素。一直到七十年代初，Gallagher 和 Munk (1971) 以及 Garrett (1972) 根据他们自己和 Jeffreys (1959) 的结果才又明确地指出，由于摩擦的非线性，S_2 和 M_2 分潮因摩擦而衰减的情况是不同的。Gallagher 和 Munk 曾设想，三阶非线性潮波似可以用来估算潮能的消耗情况。这个设想是富有启发性的。不过由于摩擦产生的三阶潮波通常很小，而且它又与非摩擦的非线性因素混在一起，由它的成长情况估计潮能消耗看来是很困难的。我们这里将根据摩擦非线性所导致的另一结果，即大潮和小潮期间源潮波衰减情况的差异来估算潮能的消耗。

应当指出，造成整个海洋 $S_2:M_2$ 的实测平均值小于理论值的原因，除了 Jeffreys 提到过的摩擦非线性之外，还有两个值得考虑的因素。一是大气半日分波的影响。因为主要半日气压分波 $S_2(p)$ 具有与引力潮 S_2 相同的频率，其振幅约为后者的 1/10，位相相差约 112°[7]，因而我们可以期望，$S_2(p)$ 能够把 S_2 分潮减弱大约 1/30[1)]。另外，一些研究工作表明，似乎大洋的共振频率更接近于 M_2 分潮。例如 Wunsch (1972) 得出北大西洋的共振周期为 14.8 小时，这无疑是北大西洋 $S_2:M_2$ 显著小于理论值的重要原因。不过对整个大

* 中国科学院海洋研究所调查研究报告第 489 号。本文曾于 1976 年 5 月与美国纯粹与应用数学访华代表团作过交流；毛汉礼教授给予热情鼓励并审阅本文；山东海洋学院动力海洋学教研室在百忙中讨论过本文初稿。谨此致谢。
本刊编辑部收到稿件日期：1978 年 10 月 4 日。

1) Munk 和 Cartwright (1966), Cartwright (1968) 和 Zetler (1971) 等对某些海区的分析则表明 $S_2(p)$ 的影响比这个估计值要大。

洋，这个因素的作用还是不十分肯定的。对于象黄海这样以协振潮为主的陆架海区，比值 $S_2:M_2$ 随地点的变化不可能是气压波引起的。同时，由于黄海比较平坦（各横断面的平均水深变化不大），而且由外海输入的潮能几乎完全在本海区消耗掉，故地形对比值 $S_2:M_2$ 的影响是不重要的。因此我们有可能根据 $S_2:M_2$ 的变化，或小潮振幅和大潮振幅比值随地点的变化来估算潮能的消耗。

一、数　据

我们取通过遮归岛（济州岛西端）和绿华山的断面作为黄海的湾口断面。这个断面东起遮归岛，西至绿华山西南 50 公里，宽度约为 480 公里，平均水深大约 52 米。断面中点的位置在遮归岛西南 240 公里，绿华山东北 190 公里处，即北纬 31°55′，东经 124°06′。这个断面以北的整个黄海是一个比较平坦的水域，平均水深 47 米，总面积大约是 4×10^5 平方公里。从湾口断面中点至海湾北端的距离约 860 公里，故海湾的平均宽度约 465 公里。在一个水深 47 米的沟渠中，M_2 潮波的 Kelvin 波波长约为 960 公里，故我们所研究的海湾长度约等于 0.9 波长。因而半日潮和全日潮都不会在这里产生共振现象。

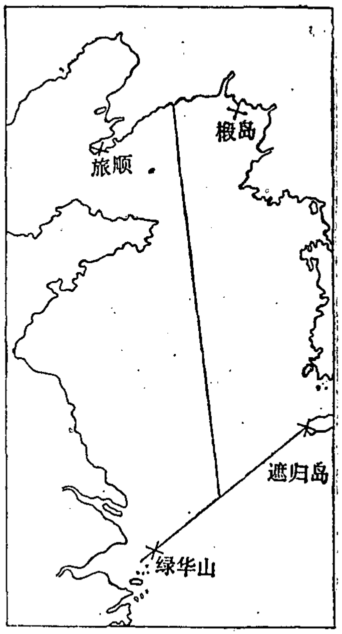

图 1　黄　　海

在湾口，绿华山有由一年观测资料所得的调和常数，但遮归岛仅仅有由 3 个月观测所得的常数。湾顶除了旅顺和大连，也没有一年以上的资料，所以只能选取旅顺（3 年）和椴岛（4 个半月）作为代表。这四个地点的有关调和常数已列于表 1 中。表中仅列出少数我们要用到的分潮常数，目的在于求出半日潮大潮和小潮的振幅。所录调和常数根据文献[8]。

若不考虑浅水分潮，大潮和小潮的振幅可用 $H_{M_2}+H_{S_2}$ 和 $H_{M_2}-H_{S_2}$ 表示。然而在浅水区域，特别对于目前的命题，由非线性摩擦所产生的浅水分潮必须考虑到。在这些分潮中，由 M_2 和 S_2 所产生的最主要的半日分潮为 $2MS_2$ 和 $2SM_2$。其中 $2MS_2$ 和引潮力中含有的源分潮 μ_2 具有相同的频率，因而通常调和分析所得

表 1　遮归岛、绿华山、椴岛和旅顺的调和常数及大潮和小潮的振幅

	遮归岛 33°18′N, 126°09′E		绿华山 30°49′N, 122°38′E		椴岛 39°31′N, 124°40′E		旅顺 38°48′N, 121°15′E	
	H（厘米）	g^0	H（厘米）	g^0	H（厘米）	g^0	H（厘米）	g^0
μ_2			3.8	306			3.9	94
N_2			22.5	271			15.5	269
M_2	76	284	120.0	286	208	238	83.6	299
S_2	29	317	53.2	331	68	293	26.4	355
$2SM_2$			0.9	153			2.6	230
小潮振幅 H''	47.2		67.1		145.4		59.8	
大潮振幅 H'	104.0		171.5		259.2		102.2	

的 μ_2 实际上是这两个分潮的合成。为了求得 $2MS_2$，必须从合成分潮中扣除源分潮 μ_2，后者的数值可用下式近似算得：

$$\begin{cases} H_{\mu_2} = \dfrac{C_{\mu_2}}{C_{N_2}} H_{N_2}, \\ g_{\mu_2} = g_{N_2} - \dfrac{\sigma_{N_2} - \sigma_{\mu_2}}{\sigma_{M_2} - \sigma_{N_2}} (g_{M_2} - g_{N_2})。 \end{cases} \tag{1.1}$$

式中 C 为平衡潮系数，σ 为分潮角速率。

在已知 $2MS_2$ 和 $2SM_2$ 的地点，大潮和小潮的振幅容易求得。用 V 记平衡潮分潮的相角，则大潮时，$V_{S_2} = 0$，$V_{M_2} = g_{M_2} - g_{S_2}$，故有 $V_{2MS_2} = 2(g_{M_2} - g_{S_2})$，$V_{2SM_2} = -(g_{M_2} - g_{S_2})$。由于 H_{2MS_2}，H_{2SM_2} 很小，大潮振幅可由下式计算：

$$H' = H_{M_2} + H_{S_2} + H_{2MS_2}\cos(g_{2MS_2} + g_{S_2} - 2g_{M_2}) + H_{2SM_2}\cos(g_{2SM_2} + g_{M_2} - 2g_{S_2})。 \tag{1.2}$$

类似地，小潮振幅可用

$$H'' = H_{M_2} - H_{S_2} - H_{2MS_2}\cos(g_{2MS_2} + g_{S_2} - 2g_{M_2}) + H_{2SM_2}\cos(g_{2SM_2} + g_{M_2} - 2g_{S_2}) \tag{1.3}$$

来计算。

用上述方法得到绿华山 $H_{2MS_2} = 2.8$ 厘米，$g_{2MS_2} = 352°$，$H' = 171.5$，$H'' = 67.1$；旅顺 $H_{2MS_2} = 5.6$ 厘米，$g_{2MS_2} = 84°$，$H' = 102.2$，$H'' = 59.8$。遗憾的是，遮归岛和椴岛没有 μ_2 和 $2SM_2$ 分潮的调和常数，我们不得不作如下推测。

由式(1.2)和(1.3)知，浅水分潮对大潮和小潮振幅的影响可分别用比值 $\theta' = (H' - H_{M_2} - H_{S_2})/(H_{M_2} + H_{S_2})$ 和 $\theta'' = (H'' - H_{M_2} + H_{S_2})/(H_{M_2} - H_{S_2})$ 来表示。这一影响应当随着潮波的向前传播而增加，因而应当与主要分潮的迟角有关，我们不妨粗略地采用线性关系。遮归岛的 g_{M_2} 与绿华山相差甚小，故可取两地的 θ' 及 θ'' 相等。由此得遮归岛的 $H' = 104.0$ 厘米，$H'' = 47.2$ 厘米。椴岛与绿华山的 g_{M_2} 相差 312°，旅顺与绿华山则相差 373°，因而内插得椴岛 $\theta' = -0.0609$，$\theta'' = 0.0387$，故 $H' = 259.2$ 厘米，$H'' = 145.4$ 厘米。

在上面的处理中，我们认为 $2MS_2$ 和 $2SM_2$ 都是由摩擦非线性直接产生的。之所以能够这样做，是因为旅顺和绿华山的二阶潮波 M_4，MS_4，S_4 等很小，故在 $2MS_2$，$2SM_2$ 中不会包含有实际意义的三阶潮波。

所有四个地点的 H' 和 H'' 均已列于表 1 中。

如果湾口断面上的潮汐和潮流都已知，就容易得到输入黄海的潮波能通量。可惜我们没有这样充分的观测资料，故不得不根据遮归岛和绿华山的潮汐推测整个断面的潮汐和潮流。为了做到这一点，首先要选择比较合适的波型。如果潮波是 Kelvin 波，则潮汐和潮流的振幅可分别用 $H = H_m e^{-\frac{f}{c}y}$ 和 $U = \sqrt{\frac{g}{h}} H$ 来计算，其中 f 为 Coriolis 参量，$C = \sqrt{gh}$，H_m 为断面中点的潮汐振幅，y 轴指向西南。但是实际上在这一断面上潮波显然不具有 Kelvin 波的性质，因为它的右边的振幅小于左边，这与 Kelvin 波恰恰相反。一个最简单又能满足右边振幅小于左边这个条件的是 Poincaré 波，这种波可写成下列形式(参看 Proudman, 1953, § 133)：

$$\begin{cases} \zeta = H_m e^{\frac{\nu}{c}y}\cos(\sigma t - \beta x), \\ u = U_m e^{\frac{\nu}{c}y}\cos(\sigma t - \beta x) \\ \quad = \dfrac{\sigma\sqrt{\sigma^2 - f^2 + \nu^2} + f\nu}{\sigma^2 - f^2}\sqrt{\dfrac{g}{h}}\, H_m e^{\frac{\nu}{c}y}\cos(\sigma t - \beta x), \\ v = V_m e^{\frac{\nu}{c}y}\cos\left(\sigma t - \beta x + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \quad = \dfrac{f\sqrt{\sigma^2 - f^2 + \nu^2} + \sigma\nu}{\sigma^2 - f^2}\sqrt{\dfrac{g}{h}}\, H_m e^{\frac{\nu}{c}y}\cos\left(\sigma t - \beta x + \dfrac{\pi}{2}\right)。 \end{cases} \tag{1.4}$$

这里仍记 $c = \sqrt{gh}$。ν 和 H_m 的数值可由遮归岛和绿华山的潮汐振幅来确定，其结果是大潮时 $H'_m = 137.5$ 厘米，$\nu' = 0.262 \times 10^{-4}$ 秒$^{-1}$；小潮时 $H''_m = 57.4$ 厘米，$\nu'' = 0.185 \times 10^{-4}$ 秒$^{-1}$。为简单计，不妨认为大潮和小潮的 ν 值相同且取其平均值 $\nu = 0.224 \times 10^{-4}$ 秒$^{-1}$。将 $\sigma = 1.405 \times 10^{-4}$ 秒$^{-1}$，$f = 0.771 \times 10^{-4}$ 秒$^{-1}$代入式(1.4)，则可算得 $U = 1.34\sqrt{\frac{g}{h}}H$，$V = 0.90\sqrt{\frac{g}{h}}H$。由此可知，在湾口断面上潮流具有强烈的右旋性质，潮流椭圆短轴和长轴之比约为 2:3。同时比值 U/H 较 Kelvin 波的情况增加了大约 1/3：大潮时有 $U' = 80e^{0.99\times10^{-8}y}$ 厘米/秒，小潮时有 $U'' = 33e^{0.99\times10^{-8}y}$ 厘米/秒。

由(1.4)可得入射波在湾口断面的能通量为：

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\rho g h}{T}\int_{-B/2}^{B/2}\int_0^T \zeta u\, dt\, dy \\ &= \frac{1}{2}\rho g\left(\frac{c^2}{\nu}\operatorname{sh}\frac{\nu}{c}B\right)\frac{\sigma\sqrt{\sigma^2 - f^2 + \nu^2} + f\nu}{\sigma^2 - f^2}H_m^2 \\ &= (0.753 \times 10^{14}\ \text{克}\cdot\text{秒}^{-3})H_m^2。 \end{aligned} \tag{1.5}$$

式中取 $\rho = 1.02$ 克·厘米$^{-3}$，$g = 980$ 厘米·秒$^{-2}$，B 和 h 为断面宽度和平均水深，分别为 4.8×10^7 和 5.2×10^3 厘米。将 H'_m 和 H''_m 代入上式，便得大潮和小潮的能通量，分别为：

$$\begin{cases} \Phi' = 1.42 \times 10^{18}\ \text{尔格}\cdot\text{秒}^{-1}, \\ \Phi'' = 0.25 \times 10^{18}\ \text{尔格}\cdot\text{秒}^{-1}。 \end{cases} \tag{1.6}$$

所得 Φ' 的数值略大于 Jeffreys (1921) 的结果，部分地由于所取断面较 Jeffreys 所取断面更南一些。

小潮至大潮期间的能通量的平均值可粗略地用 $\Phi^* = \frac{H_{M_2}^2 + H_{S_2}^2}{(H_{M_2} + H_{S_2})^2}\Phi'$ 来估算，由此得 $\Phi^* \approx \frac{1 + r^2}{2}\Phi' \approx \frac{1}{2}(\Phi' + \Phi'') = 0.83 \times 10^{18}$ 尔格·秒$^{-1}$。这表明，借助于主要太阴和太阳半日潮波，东海向黄海输送的功率是 8300 万瓩。如果计及其余分潮波，其数值大约会在一亿瓩左右。

由前面的 H'_m 和 H''_m 可得湾口的小潮潮差对大潮潮差的比值为 $r = H''_m/H'_m = 0.417$。

在前面的计算过程中，我们忽略了反射波对遮归岛和绿华山调和常数的影响。这主要是考虑到反射波到达这里时已很微弱。另外，从黄海的长度来估计，在湾口断面反射波

和入射波的潮汐位相差在 0.4π 左右，故合成振幅和入射波振幅相差不会太大。还有一点需要指出，实际潮波的波型当然会比 (1.4) 来得复杂。但是一些实际观测资料表明，在湾口断面附近，潮流确具有强烈的右旋性质。我们认为，虽然由于地形的复杂性，湾口断面潮汐和潮流分布的细节将不会与波型 (1.4) 吻合得很好(例如由于西海岸的影响，断面西边的潮流可能不如东边旋转得那么显著，因而相应地在西部潮差向东递减得可能也较缓慢)，但是作为整体来看，用波型(1.4)来估算入射波的能通量是能够得到接近实际的结果的。

二、非线性摩擦作用下长波的衰减

我们来考察在摩擦力作用下长波的衰减情况。许多作者在摩擦力与流速具有线性关系的假定下研究过潮波的衰减情况，如果沟渠是均匀的则潮波的振幅将依指数函数随着距离的增加而衰减。但是实际上，在浅海摩擦力并非流速的线性函数，而更接近于平方关系。这使得问题的解决变得困难得多。在这里我们将对弱摩擦情况给出一个近似结果。

假设摩擦力与流速的平方成比例，方向与流速相反，即假定

$$F = -K\rho|u|u, \tag{2.1}$$

其中 K 称为平方摩擦系数。本来，流速 u 中除了源潮波之外，还包含着因非线性效应引起的其他频率的高阶分量。但是 Jeffreys (1959) 及 Gallagher 和 Munk (1971) 的研究表明，如果有两个分潮同时存在，且小分潮和大分潮的潮流振幅比为 s，则小分潮能使大分潮所受到的摩擦力增加，增加的量级为 s^2。而在实际海洋中，高阶分量比较小，故它们对源潮波所受到的摩擦力的影响是可以忽略的。因此上式中 u 可只考虑源潮波本身。写

$$u = U\cos(\sigma t - \varphi), \tag{2.2}$$

代入式(2.1)并取频率 σ 的项，可得

$$F = -\frac{8}{3\pi}K\rho U u。 \tag{2.3}$$

因此在均匀沟渠中决定源潮波运动的微分方程可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + kUu + g\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + h\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

式中

$$k = \frac{8}{3\pi}K/h。 \tag{2.5}$$

由于 U 值与函数 u 有关，故方程(2.4)是非线性的。我们下面来讨论满足这组方程的前进波应具有的形式。讨论将限于弱摩擦的情况，亦即假定比值

$$\mu = \frac{kU}{\sigma} \tag{2.6}$$

为一小量。这在黄海是可以满足的，以后的计算将表明，黄海的 μ 值平均约在 0.2 左右。

方程组(2.4)的零阶(即忽略摩擦力)近似解是

$$
\begin{cases}
u = U\cos(\sigma t - \beta x), \\
\zeta = H\cos(\sigma t - \beta x), \\
H = \dfrac{h}{c} U, \\
\beta = \sigma/c, \quad c = \sqrt{gh}。
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

这个解是众所周知的，在这里列出它的目的是想指出这种波所具有的下列性质，这些性质都是容易验证的：

(i) 潮汐振幅正比于潮流的振幅，即

$$H = \frac{h}{c} U。\tag{2.8}$$

(ii) 平均单位时间通过某一宽度为 B 的横断面的能量，即能通量 Φ 与潮汐或潮流振幅的平方成比例，即

$$\Phi = \frac{1}{T}\int_0^T \rho g S\zeta u dt = \frac{1}{2}\rho c S U^2 = \frac{1}{2}\rho g c B H^2, \tag{2.9}$$

式中 S 为横断面面积，$T = 2\pi/\sigma$。

(iii) 动能和势能相等，且能量以波速传播，即

$$E = 2E_k = 2E_p = \Phi/c, \tag{2.10}$$

式中 E_k, E_p 和 E 分别代表单位距离的两横断面之间动能、势能和总能量(对时间)的平均值。

考虑了摩擦力后，方程 (2.4) 的求解要困难些。但在 μ 值较小时，我们可以满足于求得一阶近似解。为了求得一阶近似解，可以在方程中忽略或增添求解所需要的二阶小量项。容易验证，长波

$$
\begin{cases}
u = U\cos(\sigma t - \beta x), \\
\zeta = H\left[\cos(\sigma t - \beta x) + \dfrac{\mu}{2}\sin(\sigma t - \beta x)\right], \\
U = U_0\left(1 + \dfrac{1}{2}\mu_0\beta x\right)^{-1}, \\
H = \dfrac{h}{c} U, \\
\mu_0 = kU_0/\sigma, \\
\beta = \sigma/c = \sigma/\sqrt{gh}
\end{cases}
\tag{2.11}
$$

满足下列微分方程：

$$
\begin{cases}
\left(1 - \dfrac{\mu^2}{2}\right)\dfrac{\partial u}{\partial t} + kUu + g\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \\
\dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + h\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0。
\end{cases}
\tag{2.12}
$$

其中 U_0 代表 $x = 0$ 处的 U 值。因(2.12)与(2.4)仅相差一个二阶小项，故(2.11)可看作是(2.4)的一阶近似解。

没有必要进一步寻求(2.4)的更高阶的近似解，因为这组方程对本来的物理现象顶多

也只准确到一阶小量。就拿摩擦力来讲，在非定常流动的情况下，它不会只决定于当时的流速，而应当还与在这以前的流速有关。在(2.12)的运动方程中，摩擦力被取为

$$F = -\frac{8}{3\pi} K\rho U \left(u - \frac{\mu}{2} \frac{\partial u}{\sigma \partial t}\right), \tag{2.13}$$

显示了 F 主要与当时的流速有关，同时部分地还与当时的流速变化有关。若以式(2.2)代入，则略去高阶小量后有

$$F = -\frac{8}{3\pi} K\rho U^2 \cos(\sigma t - \varphi - \varepsilon), \tag{2.14}$$

其中

$$\varepsilon = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\mu}{2}。 \tag{2.15}$$

这表明摩擦力比流速落后一个位相 ε，这是颇为合理的。作者在另一项研究工作中，曾发现摩擦力确比流速落后一个位相，对一些实测资料的计算表明，其角度平均在 0.1 弧度左右，这与式(2.15)中取 $\mu = 0.2$ 的 ε 值相近。这样看来，虽然 (2.12) 中二阶小项是为了求解方便而增添的，是没有物理根据的，但是事实上当 μ 较小时，这个方程与实际情况的符合程度不一定比方程(2.4)差。因此对方程(2.4)我们将满足于一阶近似解(2.11)。

如不考虑二阶小量，式(2.11)中的H即代表着潮汐的振幅。与潮流振幅U一样，它也可写作：

$$H = H_0\left(1 + \frac{1}{2}\mu_0\beta x\right)^{-1}, \tag{2.16}$$

其中 H_0 为 $x = 0$ 处的H值。

容易验证，如忽略二阶小量，则前面提到过的零阶解的性质 (i)—(iii) 一阶解仍然具备。特别关于能通量，有

$$\Phi = \Phi_0\left(1 + \frac{1}{2}\mu_0\beta x\right)^{-2}, \tag{2.17}$$

式中 Φ_0 为 $x = 0$ 处的能通量。

前面我们由解(2.11)导出式(2.17)，而 (2.11) 仅在均匀沟渠中才适用，并且在求解过程中 Coriolis 力也没有考虑到。但是式(2.17)可以稍加推广而适用于更普遍的情形。

假设一个在沟渠中传播的前进波满足性质 (i) 和 (ii)，沟渠横断面的海面宽度 B 和平均深度 h 是 x 的函数。今取相距 Δx 的两个横断面。设 x 断面的能通量为 Φ，则通过 $x+\Delta x$断面的能通量为$\Phi+\frac{d\Phi}{dx}\Delta x$，因而长波从 x 断面传播到 $x + \Delta x$ 断面时，平均单位时间的能量的损失为$-\frac{d\Phi}{dx}\Delta x$，它应等于这两断面之间平均单位时间摩擦所作的功，这个功可用

$$\Delta D = \frac{1}{T}\int_0^T (-Fu) B\Delta x\, dt \tag{2.18}$$

来计算。将式(2.3)代入，便得

$$\Delta D = \frac{4}{3\pi} K\rho U^3 B\Delta x。 \tag{2.19}$$

因此我们有

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{4}{3\pi} K\rho B U^3。 \tag{2.20}$$

再由式(2.9)即可得关于能通量的方程

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\alpha\Phi^{3/2}, \tag{2.21}$$

式中

$$\alpha = \frac{4}{3\pi} K\rho B \Big/ \left(\frac{1}{2}\rho c S\right)^{3/2}。 \tag{2.22}$$

式(2.21)的解为

$$\Phi^{-1/2} - \Phi_0^{-1/2} = \frac{1}{2}\int_0^x \alpha dx = \frac{1}{2}\bar{\alpha}x, \tag{2.23}$$

或者

$$\Phi = \Phi_0\left(1 + \frac{1}{2}\Phi_0^{1/2}\bar{\alpha}x\right)^{-2}。 \tag{2.24}$$

上两式中 $\bar{\alpha}$ 表示 α 在 $(0,\ x)$ 区间内的平均值。

式(2.24)是基于能量守恒原理得出的[1]，在推导过程中还利用了长前进波的性质(i)—(iii)中的一个[即式(2.9)]。前已指出，若 μ 为一小量，摩擦力的存在将不影响这些性质。而地形的不很剧烈的变化也不会影响这些性质(例如参看 Lamb, 1932, pp. 273—5)。同时容易验证，Kelvin 波也具备这些性质，因此在沟渠中考虑了 Coriolis 力之后关系式(2.24)仍然有效。

式(2.24)[式(2.11)是其特例]表明在非线性情况下，长波的衰减不但与沟渠的固有动力学性质(深度、宽度和摩擦系数)有关，而且与长波的强度(振幅或能通量)有关，这是它跟线性情况的一个重大差别。假设在大潮时潮波能通量为 Φ'，小潮时为 Φ''，则由(2.24)可知，比值

$$\frac{\Phi''}{\Phi'} = \frac{\Phi_0''}{\Phi_0'}\left[\frac{1 + \frac{1}{2}\Phi_0'^{\frac{1}{2}}\bar{\alpha}x}{1 + \frac{1}{2}\Phi_0''^{\frac{1}{2}}\bar{\alpha}x}\right]^2 \tag{2.25}$$

当 $\Phi_0' > \Phi_0''$ 时为 x 的单调增加函数。这说明沿着潮波传播的方向，比值 Φ''/Φ' 将逐渐增大。它的增大也意味着小潮振幅 H'' 对大潮振幅 H' 的比值 $r = H''/H'$ 的增大。由于 H'' 和 H' 主要分别决定于分潮 M_2 和 S_2 振幅之差与和，故 H''/H' 的增大也就意味着比值 H_{S_2}/H_{M_2} 的减小。

附带指出，对于具有一定宽度的海湾，由于地球自转所产生的 Coriolis 力的作用，在北半球反射波相对于入射波的重要性在左岸(面向湾内)要比右岸大，而反射波又经受了较长距离的摩擦作用，因而摩擦作用还将使左岸的 $S_2:M_2$ 小于右岸的数值。

这一节中，摩擦力与流速的平方成比例这一假定并不是必不可少的。例如，假定摩擦

1) 当然也可以由运动和连续方程出发导出能量方程，如在第四节所做的那样。

力与流速的 n 次方成比例,即以

$$F = -K\rho|u|^{n-1}u \tag{2.26}$$

代替式(2.1),则它的频率 σ 的分量可写为

$$F = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n+1)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} K\rho U^{n-1}u_0 \tag{2.27}$$

而式(2.11)中的 U 将由下式表达:

$$U = U_0\left(1 + \frac{n-1}{2}\mu_0\beta x\right)^{-\frac{1}{n-1}}。 \tag{2.28}$$

当 $n > 1$ 时,振幅或能通量的衰减情况与前述 $n = 2$ 的情况性质上是一样的。但当$n \to 1$ 时,上式趋于

$$U = U_0 e^{-\frac{1}{2}\mu\beta x}, \tag{2.29}$$

这里 μ 与 U 无关。即对于线性摩擦,长波按指数函数衰减,且衰减的速度与潮波的强度无关。

对于非均匀的沟渠,亦有类似于式(2.24)的推广了的公式:

$$\Phi = \Phi_0\left[1 + \frac{n-1}{2}\Phi_0^{\frac{n-1}{2}}\bar{\alpha}x\right]^{-\frac{2}{n-1}}。 \tag{2.30}$$

对于黄海,没有实际的观测资料可用来确定 n 值,我们仍将采用一般的数值,即取 $n = 2$。

三、黄海潮能的消耗

黄海的潮汐振动是依靠湾外输入的能量来维持的,故除了湾顶附近存在着横向波动之外,基本上是由一支入射波和一支弱得多的反射波迭加构成的。黄海的宽度不足以容许一支入射的 Poincaré 波存在,故入射和反射波都属于Kelvin 波类型。因此我们可以把黄海看作一个半封闭的沟渠,从而上节的结果将可以近似地应用于本海区。

如果我们能够求得通过湾顶断面的入射波能通量,则平均单位时间入射波在整个海区所消耗的能量 $\mathscr{D}$ 便可由等式

$$\mathscr{D} = \Phi_0 - \Phi_L \tag{3.1}$$

来求得,式中 Φ_0 和 Φ_L 分别代表湾口 ($x = 0$) 和湾顶 ($x = L$) 的能通量。如果沟渠无限长,计算 Φ_L 将与计算 Φ_0 一样地容易;而对于半封闭的海湾,则情况就要复杂得多,因为我们不能由观测直接得知入射波在湾顶的振幅。或许有人会简单地认为,在湾顶入射波和反射波的振幅都应当等于实测值的一半。然而这是一个很不确切的概念,只有当不存在地转偏向力的作用或者海湾宽度很小时情况才是如此。在 Coriolis 力的影响下,海湾内必定存在一列横向波动的 Poincaré 波[1,16]。这列波的振幅在湾顶最大,随着离湾顶的距离的增加而迅速减小,而且总是增加了湾顶的潮差。Coriolis 参量愈大,海湾愈宽,其影响也愈显著。在黄海情况还要复杂些,因为渤海的存在又大大地影响了黄海顶部的潮汐。但是文献[1]的计算表明,潮波在反射过程中,因摩擦引起的能量的损失是不大的,故在这个过

程中，非线性效应可予忽略。因此当入射波在这里增大若干倍时，反射波、横向波因而合成波都将增大相同的倍数。由此可知，实测的(即合成波的) r 值将等于入射波的 r 值。由椴岛和旅顺平均可得湾顶 $r = 0.573$。

将式(2.23)应用于大潮和小潮，便得

$$\frac{1}{\sqrt{\Phi'_L}} - \frac{1}{\sqrt{\Phi'_0}} = \frac{1}{\sqrt{\Phi''_L}} - \frac{1}{\sqrt{\Phi''_0}}。\tag{3.2}$$

又因能通量与潮汐振幅的平方成比例，故有

$$\begin{cases}\Phi''_0/\Phi'_0 = r_0^2, \\ \Phi''_L/\Phi'_L = r_L^2。\end{cases}\tag{3.3}$$

将前已算得的 $r_0 = 0.417$，$r_L = 0.573$ 代入上两式，可得

$$\frac{\Phi'_L}{\Phi'_0} = \left[\frac{r_0(1-r_L)}{r_L(1-r_0)}\right]^2 = 0.28。\tag{3.4}$$

由此可知，大潮期间入射波从湾口传播到湾顶，其能量消耗了大约 72%。剩下 28% 的能量，一小部分进入渤海，大部分则作为反射波而向湾口传播。

渤海海峡的宽度约为 83 公里，平均水深 42 米，而在这里大潮时的振幅约 80 厘米。由此作一粗略估计，输入渤海的能通量(即渤海的能量消耗率)约为 5×10^{16} 尔格/秒，与黄海湾顶入射波能通量相比约占 13%；与湾口入射波能通量相比约占 4%。因而在黄海顶端反射波的能通量大约是湾口入射波能通量的 24%。假设反射波通过黄海而进入东海时，与入射波一样，其中 72% 的能量也被消耗掉，那么回到东海的能通量只剩下 7%。所以，在黄海大潮期间单位时间消耗的能量约占入射波能通量的 89%，亦即 1.26×10^{18} 尔格·秒$^{-1}$。

对于小潮也可作类似的讨论。例如由(3.3)和(3.4)可得

$$\frac{\Phi''_L}{\Phi''_0} = \left(\frac{1-r_L}{1-r_0}\right)^2 = 0.54。\tag{3.5}$$

即入射波到达湾顶时，能量约剩 54%。这些能量的分配情况是：7% 进入渤海，47% 作为反射波向南传播。

由式(2.23)还可得到整个海区的 α 平均值为：

$$\bar{\alpha} = \frac{2}{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi'_L}} - \frac{1}{\sqrt{\Phi'_0}}\right) = 1.74\times10^{-17}\text{C. G. S.}\tag{3.6}$$

式中 $L = 8.6\times10^7$ 厘米，$\Phi'_0 = 1.42\times10^{18}$ 尔格·秒$^{-1}$，$\Phi'_L = 0.28\Phi'_0$ 是前面已经给出的。以黄海的平均宽度 $\bar{B} = 4.65\times10^7$ 厘米，平均深度 $\bar{h} = 4.7\times10^3$ 厘米代入式(2.22)可得平方摩擦系数为：

$$K = \frac{3\pi}{8}\sqrt{\frac{1}{2}\rho\bar{B}(\bar{c}\bar{h})^3}\,\bar{\alpha} = 0.0032。\tag{3.7}$$

整个黄海入射波的潮能 $\mathscr{E}_i$ 可以由式(2.10)及(2.24)得出：

$$\mathscr{E}_i = \int_0^L E dx = \int_0^L \frac{\Phi}{c} dx = \Phi_0 \int_0^L \frac{1}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\Phi_0^{1/2}\bar{\alpha}x\right)^{-2} dx。\tag{3.8}$$

将 c 和 $\bar{\alpha}$ 以整个海区的平均值代替，可积分得

$$\mathscr{E}_i = \frac{L}{\bar{c}}\sqrt{\Phi_0\Phi_L}。\tag{3.9}$$

由此可得大潮期间整个黄海入射波的总能量为

$$\mathscr{E}_i' = 3.0 \times 10^{22} \text{尔格}。\tag{3.10}$$

又因反射波的能量为入射波的 24%，故考虑到反射波后，黄海大潮期间的总潮能为

$$\mathscr{E}' = 3.7 \times 10^{22} \text{尔格}。\tag{3.11}$$

黄海的总面积为 4×10^{15} 厘米^2，故平均单位面积所具有的能量为 0.93×10^7 尔格·厘米$^{-2}$，其中动能与势能约各占一半。考虑到单位面积动能和势能各等于 $\frac{1}{4}\rho hU^2$ 和 $\frac{1}{4}\rho gH^2$，即可知大潮期间潮流和潮汐平均振幅各为：

$$\begin{cases}\bar{U}' = 62 \text{ 厘米/秒},\\ \bar{H}' = 136 \text{ 厘米},\end{cases}\tag{3.12}$$

因而平均大潮差约为 2.7 米。

小潮至大潮的平均总潮能可用 $\mathscr{E}^* \approx \left[\frac{H_{M_2}^2 + H_{S_2}^2}{(H_{M_2} + H_{S_2})^2}\right]\mathscr{E}' \approx \frac{1+\bar{r}^2}{2}\mathscr{E}'$ 来估算，其中 $\bar{r}$ 为黄海 r 之平均值，近似可取 r_0 和 r_L 的平均值，即 $\bar{r} = 0.495$。因此

$$\mathscr{E}^* = 2.3 \times 10^{22} \text{尔格}。\tag{3.13}$$

由此可得黄海潮流和潮汐的平均振幅分别约为

$$\begin{cases}\bar{U}^* = 49 \text{ 厘米/秒},\\ \bar{H}^* = 107 \text{ 厘米}。\end{cases}\tag{3.14}$$

因此黄海的平均潮差大约是 2.1 米。

由前面结果可算得黄海 μ 值平均为 $\bar{\mu}^* = \frac{8}{3\pi}\frac{K\bar{U}^*}{\sigma\bar{h}} \approx 0.2$。

由 $Q = \sigma\mathscr{E}/\mathscr{D}$ 还可算得黄海半日潮在大潮和小潮时以及平均的 Q 值分别为

$$\begin{cases}Q' = 3.3,\\ Q'' = 6.6,\\ Q^* = 5.0。\end{cases}\tag{3.15}$$

四、关于反射波和入射波的相互作用

在上一节的演算过程中，我们没有考虑反射波对入射波的摩擦的影响。由于反射波的能量仍然为入射波的大约 24% 至 47%，相对来说不算太小，因此有必要研究一下，忽略反射波对入射波的非线性效应能够对前面的计算结果带来多大影响。

在同时考虑入射波和反射波的情况下，潮流和水位可写成：

$$\begin{cases}u = u_i + u_r,\\ \zeta = \zeta_i + \zeta_r,\end{cases}\tag{4.1}$$

这里下标 i 和 r 分别代表入射和反射波。类似地，这两支波的其他有关的量我们也用下标 i 和 r 加以区分，而合成波的有关量则不加下标。例如我们用 U_i, U_r 和 U 代表入射、反射和合成波的潮流振幅，但是 U 是式(4.1)中 u 的振幅，一般地 $U \neq U_i + U_r$。

为了简单起见，我们考虑均匀沟渠中的情况。由(2.4)知对于在均匀沟渠中传播方向相反的两支波，应满足：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + kUu_i + g\dfrac{\partial \zeta_i}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \zeta_i}{\partial t} + h\dfrac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u_r}{\partial t} + kUu_r + g\dfrac{\partial \zeta_r}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \zeta_r}{\partial t} + h\dfrac{\partial u_r}{\partial x} = 0, \\ U = (u_i + u_r)\text{之振幅。} \end{cases} \tag{4.2}$$

对第一式作运算 $\frac{1}{T}\int_0^T u_i[\cdots]\,dt$，对第二式作运算 $\frac{g}{hT}\int_0^T \zeta_i[\cdots]\,dt$，然后相加，可得

$$\frac{1}{2}kUU_i^2 + \frac{g}{T}\int_0^T \frac{\partial(\zeta_i u_i)}{\partial x}\,dt = 0。 \tag{4.3}$$

由第二节的讨论可知(参看式(2.9))，如忽略 μ^2 项，则应有 $\frac{g}{T}\int_0^T(\zeta_i u_i)dt = \frac{1}{2}cU_i^2$。代入上式可得：

$$\frac{d(\ln U_i)}{dx} = -\frac{k}{2c}U = -\frac{4}{3\pi}\frac{K}{ch}U。 \tag{4.4}$$

对于反射波情况类似，不过这时有 $\frac{g}{T}\int_0^T(\zeta_r u_r) = -\frac{1}{2}cU_r^2$，因而有

$$\frac{d(\ln U_r)}{dx} = \frac{k}{2c}U = \frac{4}{3\pi}\frac{K}{ch}U。 \tag{4.5}$$

由上面两个式子我们得到一个有用的结果：

$$U_iU_r = \text{const}。 \tag{4.6}$$

同样地，H_iH_r，$\Phi_i\Phi_r$ 当然也不随地点变化。

虽然对于方程组(4.2)不可能找到一个简单形式的分析解，但是我们可以用逐步迭代的方法很容易地求得其近似的数值解。例如我们可以先不考虑反射波，以式(2.11)中的 U 代入式(4.4)右端，得到 U_i 的第一近似 $U_i^{(1)}$(实际上 $U_i^{(1)}$ 还是原来式(2.11)中的 U)，由(4.6)得 U_r 的第一近似 $U_r^{(1)}$。u_i，u_r 的第一近似解可写作 $u_i^{(1)} = U_i^{(1)}\cos(\sigma t - \beta x)$，$u_r^{(1)} = U_r^{(1)}\cos(\sigma t + \beta x + \varphi)$，从而可求出 U 的第一近似 $U^{(1)}$。将 $U^{(1)}$ 代入(4.4)右端可得出第二近似 $U_i^{(2)}$，再由(4.6)可得 $U_r^{(2)}$，……。

为了考察由于忽略反射波的影响而在上节的计算结果中带来的误差的大小，我们对(4.4)作积分 $\int_0^L[\cdots]dx$，并应用于大潮和小潮，可得：

$$\begin{cases} \ln\dfrac{U'_{iL}}{U'_{i0}} = -\dfrac{4}{3\pi}\dfrac{KL}{ch}\bar{U}', \\ \ln\dfrac{U''_{iL}}{U''_{i0}} = -\dfrac{4}{3\pi}\dfrac{KL}{ch}\bar{U}'', \end{cases} \tag{4.7}$$

式中 $\bar{U}'=\frac{1}{L}\int_0^L U'dx$, $\bar{U}''=\frac{1}{L}\int_0^L U''dx$, 分别代表整个海区在大潮和小潮时潮流振幅的平均值。由上式可解出平方摩擦系数 K:

$$K=\frac{3\pi}{4}\frac{ch\ln(r_L/r_0)}{L(\bar{U}'-\bar{U}'')}。\tag{4.8}$$

再将此式代回到(4.7)可得:

$$\begin{cases}\dfrac{U'_{iL}}{U'_{i0}}=\left(\dfrac{r_0}{r_L}\right)^{\bar{U}'/(\bar{U}'-\bar{U}'')},\\[2ex] \dfrac{U''_{iL}}{U''_{i0}}=\left(\dfrac{r_0}{r_L}\right)^{\bar{U}''/(\bar{U}'-\bar{U}'')}。\end{cases}\tag{4.9}$$

将入射和反射波的第一近似解取作

$$\begin{cases}u_i^{(1)}=U_{i0}(1+bx)^{-1}\cos(\sigma t-\beta x),\\[1ex] u_r^{(1)}=U_{rL}^{(1)}\dfrac{1+bx}{1+bL}\cos[\sigma t-\beta(2L-x)+\pi]。\end{cases}\tag{4.10}$$

这里我们取于 $x=L$ 处,入射波和反射波的潮流位相相反。并且根据上节的结果,取大潮时 $U_{rL}^{(1)}=\sqrt{0.24}\,U_{i0}$,小潮时 $U_{rL}^{(1)}=\sqrt{0.47}\,U_{i0}$; 对大潮和小潮, b 值满足 $(1+bL)^{-1}=\sqrt{0.28}$ 和 $\sqrt{0.54}$。由上式可得:

$$U^{(1)}=A[1+B\cos 2\beta(L-x)]^{\frac{1}{2}},\tag{4.11}$$

其中 $A^2=U_{i0}^2(1+bx)^{-2}+\left(U_{rL}^{(1)}\dfrac{1+bx}{1+bL}\right)^2$, $B=2U_{i0}U_{rL}^{(1)}/(1+bL)A$。我们以第一近似(4.11)代入(4.9)(此时我们所考察的入射波是第二近似),得到:

$$\begin{cases}\dfrac{\Phi'_{iL}}{\Phi'_{i0}}=\left(\dfrac{U'_{iL}}{U'_{i0}}\right)^2=0.26,\\[2ex] \dfrac{\Phi''_{iL}}{\Phi''_{i0}}=\left(\dfrac{U''_{iL}}{U''_{i0}}\right)^2=0.49。\end{cases}\tag{4.12}$$

将这个结果与式(3.4)和(3.5)比较,可以看出差别不很显著。另外,我们计算了比值$(\bar{U}'_i-\bar{U}''_i)/(\bar{U}'-\bar{U}'')=0.96$, 故用式(4.8)计算摩擦系数时考虑和不考虑反射波差别也不大。由此看来,如考虑反射波对入射波的影响,不会给上一节的计算结果带来实质性的改进。

参 考 文 献

[1] 方国洪、王仁树, 1966。海湾的潮汐和潮流。海洋与湖沼 8(1):60—77。

[2] Cartwright, D. E., 1968. A unified analysis of tides and surges round North and East Britain. *Phil. Trans. Roy. Soc.* A263: 1—55.

[3] Defant, A., 1961. Physical Oceanography, Vol. II. Pregamon Press, Oxford, pp. 364—372.

[4] Gallagher, B. S. and W. H. Munk, 1971. Tides in shallow water. Spectroscopy. *Tellus.* 23(4—5): 346—365.

[5] Garrett, C. J. R., 1972. Tidal resonance in the Bay of Fundy and Gulf of Maine. *Nature,* 238: 441—443.

[6] Hansen, W., 1938. Amplitudenverhältnis und Phasenunterschied der harmonischen Konstanten in der Nordsee. *Ann. Hydr. Mar. Met.* 66: 429—443.

[7] Haurwitz, B., 1956. The geographical distribution of the solar semidiurnal pressure oscillation. New York University, *Meteorol. Pap.* 2(5).

[8] Intern. Hydr. Bureau, 1936. Tides List of Harmonic Constants. Monaco.

[9] Jeffreys, H., 1921. Tidal friction in shallow sea. *Phil. Trans Roy. Soc.* A221: 239—264.
[10] Jeffreys, H., 1959. The Earth (4th ed.). Cambridge, pp. 296—336.
[11] Lamb, H., 1932. Hydrodynamics (6th ed.). Cambridge, pp. 273—275.
[12] Miller, G. R., 1966. The flux of tidal energy out of the deep oceans. *J. Geophys. Res.* **71**(10): 2485-9.
[13] Munk, W. H. and D. E. Cartwright, 1966. Tidal spectroscopy and prediction. *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A259**: 533—581.
[14] Proudman, J., 1953. Dynamical Oceanography. Methuen, London.
[15] Taylor, G. I., 1919. Tidal friction in the Irish Sea. *Phil. Trans. Roy. Soc.* A220: 1—93.
[16] Taylor, G. I., 1921. Tidal oscillations in gulfs and rectangular basins. *Proc. London Math. Soc.*, **2**(20): 148—181.
[17] Wunsch, C., 1972. Bermuda sea level in relation to tides, weather, and baroclinic fluctuations. *Rev. Geophys. Space Phys.* **10**(1): 1—49.
[18] Zetler, B. D., 1971. Radiational ocean tides along the coasts of the United States. *J. Phys. Oceanogr.* **1**(1).

DISSIPATION OF TIDAL ENERGY IN YELLOW SEA*

Fang Guohong

(Institute of Oceanology, Academia Sinica)

ABSTRACT

The solution of a progressive long wave under the action of non-linear friction has been derived in the present paper, and from that it is pointed out that the ratio r of amplitude of neap tide to that of spring tide will increase gradually in the direction of propagation of the waves, and the amplitude ratio $S_2 : M_2$ will decrease accordingly. The effect caused by the frictional nonlinearity is one of the most important factors that make the average value of $S_2 : M_2$ in the world ocean less than the theoretical ratio of the tide-generating forces.

Basing on the tidal constants at the two ends of the mouth section and the variation of the ratio r from the mouth section to the closed end, the following results for Hwang Hai (the Yellow Sea) have been obtained: (i) The energy flux of principal lunar and solar semidiurnal incident waves passing through the mouth section is 0.83×10^{18} erg/sec. (ii) When the waves get to the closed end, about 46% (for neap tide) or 72% (for spring tide) of the energy has been dissipated. (iii) The quadratic friction coefficient is 0.0032. (iv) The total energy of the principal lunar and solar semidiurnal tides in Hwang Hai amounts to ca. 2.3×10^{22} erg. (v) The mean amplitude of tidal current is estimated to be about 49 cm/sec, and the mean range about 2.1 m. (vi) The Q of semidiurnal tide is estimated to be 5.0 on the average.

* Contribution No. 489 from the Institute of Oceanology, Academia Sinica.